УДК 514.75

О цилиндроиде, направляющие кривые которого есть винтовые линии

М.А. Чешкова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

A Cylindroid with Circular Helixes as Directing Curves

M.A. Cheshkova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Линейчатая поверхность называется поверхностью Каталана, если ее прямолинейные образующие параллельны некоторой плоскости. К поверхностям Каталана относятся и цилиндроиды. Цилиндроид — линейчатая поверхность, образованная движением прямой линии по двум кривым (направляющим), причем образующая прямая параллельна некоторой плоскости. В работе исследуются цилиндроиды, направляющие кривые которых есть винтовые линии. Возможны четыре случая: 1) обе винтовые линии правозакрученные с одним шагом; 2) обе винтовые линии правозакрученные с разными шагами; 3) одна винтовая линия правозакрученная, другая — левозакрученная, причем обе винтовые линии с одним шагом; 4) одна винтовая линия правозакрученная, другая левозакрученная, обе винтовые линии закручены с разным шагом. Определены полная и средняя кривизны рассматриваемых поверхностей. Только в первом случае средняя кривизна равна нулю. Поверхность в этом случае есть минимальная. Единственная линейчатая минимальная поверхность есть геликоид.

Ключевые слова: цилиндроид, винтовая линия, полная кривизна, средняя кривизна.

A ruled surface is called a Catalan surface if its rectilinear generators are parallel to a certain surface. A cylindroid is the Catalan surface formed by a straight-line movement along two directing curves with a rectilinear generator being parallel to a certain surface. In the paper we study cylindroids with circular helixes as directing curves. There are four cases: 1) the two helixes are right-rotary and they have the same screw pitch, 2) the two helixes are right-rotary and they have different screw pitches, 3) one helix is right-rotary, the second helix is left-rotary and they have the same screw pitch, 4) one helix is right-rotary, the second helix is left-rotary and they have different screw pitches. Total and the mean curvatures of the considered surfaces are calculated. The mean curvature equals to zero in the first case only. The only surface is the minimal surface. A helicoid is the only minimal ruled surface. We construct these surfaces with a help of mathematical software package.

Key words: cylindroid, helix, total curvature, mean curvature.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-11

Цилиндроид — линейчатая поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим кривым, причем во всех положениях образующая прямая параллельна некоторой плоскости параллелизма [1, 2].

В монографии [1] авторы рассматривают цилиндроиды, когда направляющие кривые есть эллипсы и окружности.

Косые цилиндроиды — линейчатые поверхгости, образованные при помощи трех образующих, из которых две кривые, третья — прямая, рассматриваются в [1, 3].

В работе [4] приводится пример цилиндроида, который является листом Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим линейчатую поверхность M

$$r(u,v) = \rho_1(u) + vl(u), \tag{1}$$

где $\rho_1 = \rho_1(u)$ — направляющая кривая, $l(u)$ — вектор образующей прямой.

Потребуем, чтобы линейчатая поверхность (1) была цилиндроидом.

Пусть $\rho_2 = \rho_2(t)$ — вторая направляющая кривая. Тогда

$$l = \rho_1(u) - \rho_2(t).$$

Предположим, что вектор l образующей прямой параллелен некоторой плоскости.

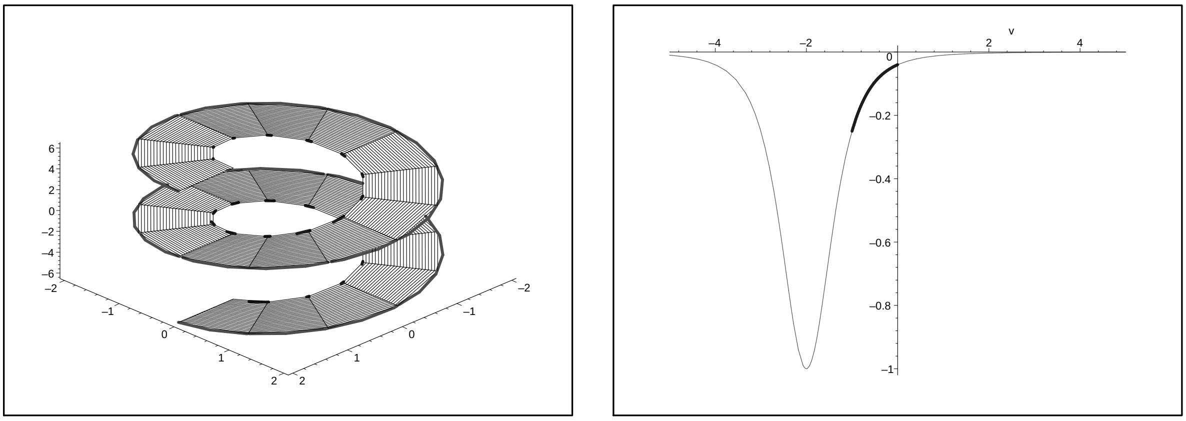

Рис. 1. Геликоид (двойная спираль 1) $u = -2\pi, ...2\pi, v = -1, ..., 1$ и его полная кривизна $v = -5, ..., 5$

Рассмотрим цилиндроиды, когда направляющие кривые есть винтовые линии.

Возможны четыре случая:

1) обе винтовые линии правозакрученные (левозакрученные) с одним шагом;

2) обе винтовые линии правозакрученные (левозакрученные) с разным шагом;

3) обе винтовые линии разнозакрученные с одним шагом;

4) обе винтовые линии разнозакрученные с разным шагом.

Случай 1.

Обе винтовые линии правозакрученные с одним шагом.

Зададим винтовые линии в виде

$$\rho_1(u) = (2\cos(u), 2\sin(u), u), \tag{2}$$

$$\rho_2(t) = (\cos(t), \sin(t), t). \tag{3}$$

Вектор l имеет вид

$$l = (2\cos(u) - \cos(t), 2\sin(u) - \sin(t), u - t). \tag{4}$$

За направляющую плоскость примем плоскость $z = 0$. Тогда имеем $u = t$, $l = (\cos(u), \sin(u), 0)$. Уравнение линейчатой поверхности (1) примет вид

$$r(u,v) = (2\cos(u) + v\cos(u), 2\sin(u) + + v\sin(u), u). \tag{5}$$

Определим среднюю кривизну $H = \frac{1}{2}trase(A)$,и полную кривизну $K = det(A)$, где $A = G^{-1}B, G = (g_{ij}), B = (b_{ij})$, $g_{11} =< r_u, r_u >$, $g_{12} =< r_u, r_v >$, $g_{22} =< r_v, r_v >$,

$$b_{11} = \frac{(r_{uu}, r_u, r_v)}{\sqrt{det(G)}},$$

$$b_{12} = \frac{(r_{uv}, r_u, r_v)}{\sqrt{det(G)}},$$

$$b_{22} = \frac{(r_{vv}, r_u, r_v)}{\sqrt{det(G)}}.$$

Средняя кривизна $H = 0$. Поверхность в этом случае минимальная. Единственная линейчатая минимальная поверхность есть геликоид

Полная кривизна имеет вид

$$K = -\frac{1}{(5 + 4v + v^2)^2}. \tag{6}$$

Используя математический пакет, построим линии и поверхность (рис. 1).

Случай 2.

Обе винтовые линии правозакрученные с разным шагом.

Зададим винтовые линии в виде

$$\rho_1(u) = (2\cos(u), 2\sin(u), u), \tag{7}$$

$$\rho_2(t) = (\cos(t), \sin(t), ht), h \neq 1. \tag{8}$$

Вектор l имеет вид

$$l = (2\cos(u) - \cos(t), 2\sin(u) - \sin(t), u - ht). \tag{9}$$

За направляющую плоскость примем плоскость $z = 0$. Тогда имеем $u = ht$, $l = (\cos(u) - \cos(\frac{u}{h}), \sin(u) - \sin(\frac{u}{h}), 0)$.

Уравнение линейчатой поверхности (1) примет вид

$$r(u,v) = (2\cos(u) + v(\cos(u) - \cos(\frac{u}{h})), \tag{10}$$

$$2\sin(u) + v(\sin(u) - \sin(\frac{u}{h})), u).$$

Используя математический пакет, определим среднюю кривизну $H = \frac{1}{2}trase(A)$ и полную кривизну $K = det(A)$, полагая $h = 2$,

$$K = -\frac{36}{P^2},\ H = -\frac{2\sin(\frac{u}{2})(16 - 8\cos(\frac{u}{2}) + 3v)}{\sqrt{((2\cos(\frac{u}{2}) - 3)P)^3}},$$

$$P = 18\cos(\frac{u}{2})v^2 + 24\cos(\frac{u}{2})v +$$

$$8\cos(\frac{u}{2}) - 48v - 27v^2 + 28.$$

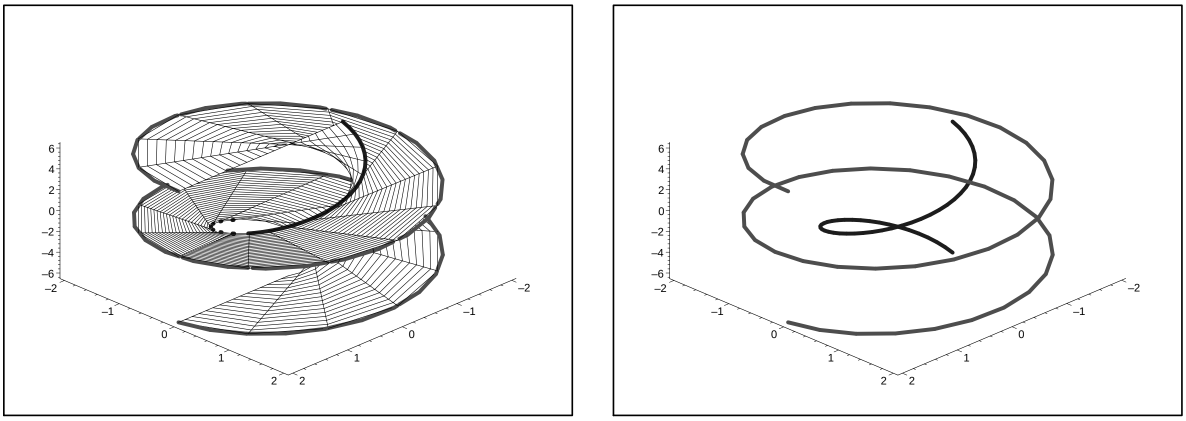

Рис. 2. Двойная спираль 2 и ее направляющие кривые, $u = -2\pi, ..., 2\pi, v = -1, ..., 0$

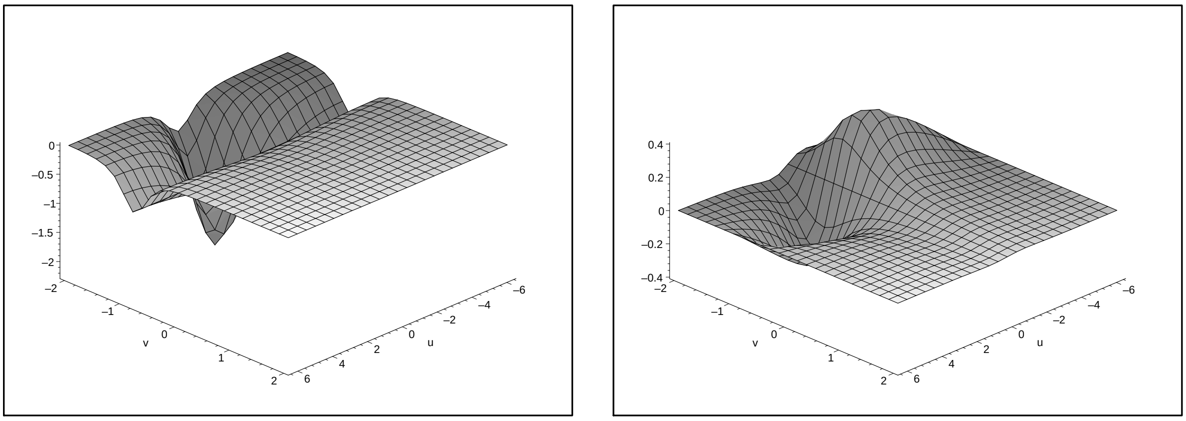

Рис. 3. Полная K и средняя H кривизны двойной спирали 2, $u = -2\pi, ..., 2\pi, v = -2, ..., 2$

Построим эту поверхность (рис. 2) и поверхности кривизн K, H (рис. 3).

Случай 3.

Обе винтовые линии разнозакрученные с одним шагом.

Зададим винтовые линии в виде

$$\rho_1(u) = (2\cos(u), 2\sin(u), u), \tag{11}$$

$$\rho_2(t) = (-\cos(t), \sin(t), t). \tag{12}$$

Тогда

$$l = (2\cos(u) + \cos(t), 2\sin(u) - \sin(t), u - t). \tag{13}$$

За направляющую плоскость примем плоскость $z = 0$. Тогда имеем $u = t$, $l = (3\cos(u), \sin(u), 0)$.

Уравнение линейчатой поверхности (1) примет вид

$$r(u, v) = (2\cos(u) + v(3\cos(u)), 2\sin(u) + \\ + v(\sin(u)), u) \tag{14}$$

Используя математический пакет, определим среднюю кривизну $H = \frac{1}{2}trase(A)$,и полную кривизну $K = det(A)$.

Имеем

$$K = -\frac{9}{Q^2},$$

$$H = -\frac{2\sin(u)\cos(u)(-8\cos(u)^2 + 5 + 12v)}{\sqrt{Q^3}},$$

$$Q = 16\cos(u)^4 + 24\cos(u)^2 + 5 + 24\cos(u)^2 v + 9v^2 + 12v.$$

Построим эту поверхность (рис. 4) и поверхности кривизн K, H (рис. 5).

Случай 4.

Обе винтовые линии разнозакрученные с разным шагом.

Зададим винтовые линии в виде

$$\rho_1(u) = (2\cos(u), 2\sin(u), u), \tag{15}$$

$$\rho_2(t) = (-\cos(t), \sin(t), ht), h \neq 1. \tag{16}$$

Имеем

$$l = (2\cos(u) + \cos(t), 2\sin(u) - \sin(t), u - ht). \tag{17}$$

За направляющую плоскость примем плоскость $z = 0$. Тогда имеем $u = ht$, $l = (\cos(u) + \cos(\frac{u}{h}), \sin(u) - \sin(\frac{u}{h}), 0)$.

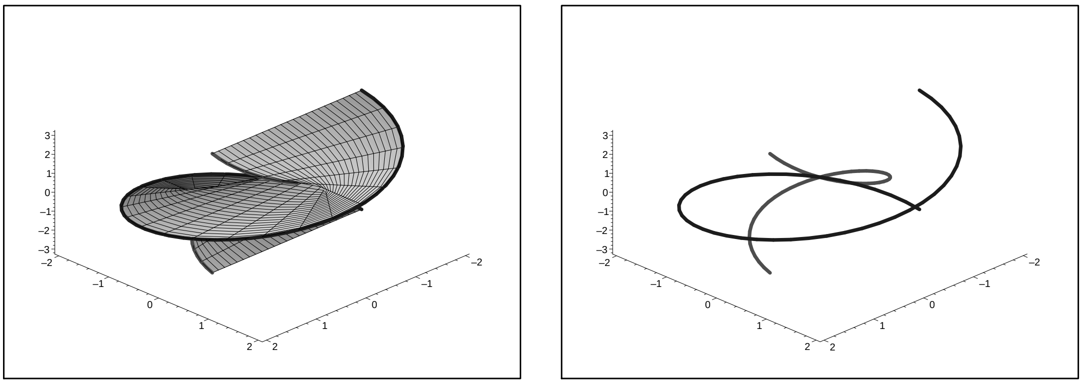

Рис. 4. Двойная спираль 3 и ее направляющие кривые, $u = -\pi, ..., \pi, v = -1, ..., 0$

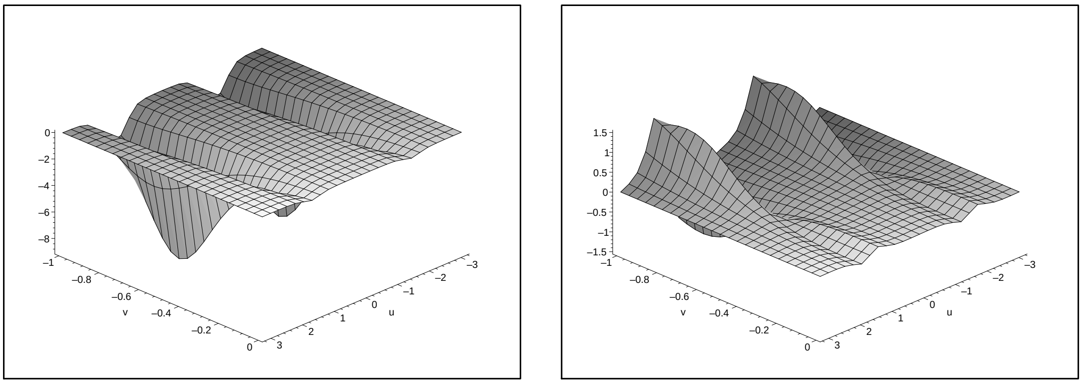

Рис. 5. Полная K и средняя H кривизны двойной спирали 3, $u = -\pi, ..., \pi, v = -1, ..., 0$

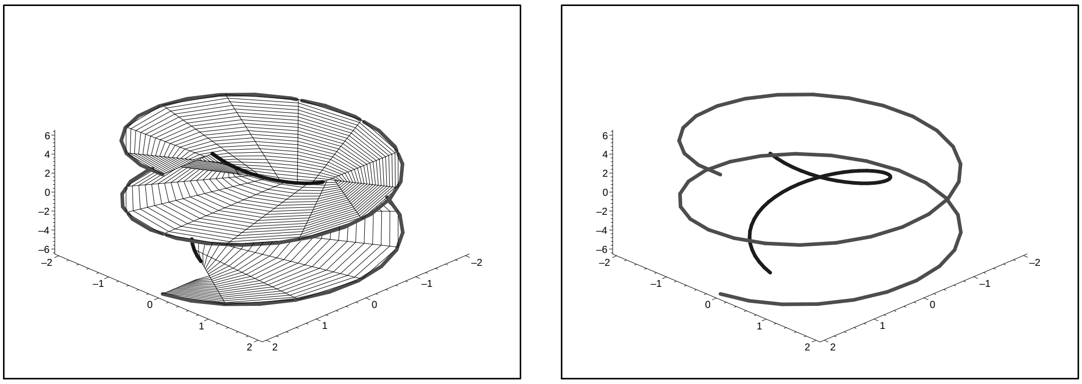

Рис. 6. Двойная спираль 4 и ее направляющие кривые, $u = -2\pi, ..., 2\pi, v = -1, ..., 0$

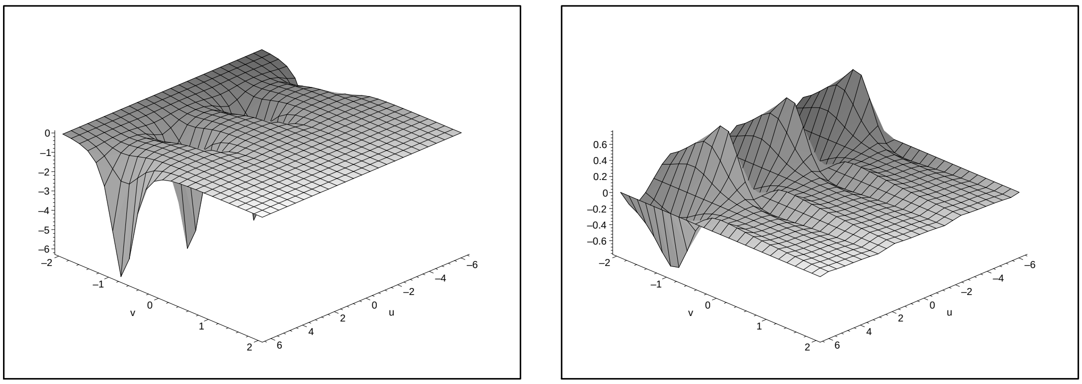

Рис. 7. Полная K и средняя H кривизны двойной спирали 4, $u = -2\pi, ..., 2\pi, v = -2, ..., 2$

Уравнение линейчатой поверхности (1) примет вид

$$r(u,v) = (2\cos(u) + v(\cos(u) + \cos(\frac{u}{h})), \qquad (18)$$

$$2\sin(u) + v(\sin(u) - \sin(\frac{u}{h})), u)$$

Определим среднюю кривизну $H = \frac{1}{2}trase(A)$, и полную кривизну $K = det(A)$, полагая $h = 2$.

Имеем

$$K = -\frac{4}{R^2},$$

$$H = \frac{2\sin(\frac{u}{2})A}{\sqrt{((7 - 6\cos(\frac{u}{2}) + 8\cos(\frac{u}{2}))R)^3}},$$

$$A = -128\cos(\frac{u}{2})^5 + 32\cos(\frac{u}{2})^2 + 128\cos(\frac{u}{2})^3 +$$

$$+108\cos(\frac{u}{2})^2 v - 8 - 24\cos(\frac{u}{2}) - 27v,$$

$$R = 32\cos(\frac{u}{2})^3 + 8\cos(\frac{u}{2})^3 v^2 +$$

$$32\cos(\frac{u}{2})^3 v - 24\cos(\frac{u}{2})v -$$

$$-24\cos(\frac{u}{2}) - 6cos(\frac{u}{2})v^2 + 7v^2 + 16v + 12.$$

Построим эту поверхность (рис. 6) и поверхности кривизн K, H (рис. 7).

Библиографический список

1. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М., 2006.

2. Perez A., McCarthy J.M. Bennett's linkage and the cylindroid // Mechanism and Machine Theory. — 2002. — № 37.

3. Буланов С.Н., Буланов Г.С. Исследование поверхности дважды косого трохоидного цилиндроида с наклонной осью вращения // Прикладная геометрия и инженерная графика. — Киев, 1985. — Вып. 40.

4. Чешкова М.А. Построение листа Мебиуса // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1/1(77).