УДК 514.765

О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли*

Е.Д. Родионов[1], *В.В. Славский*[2], *О.П. Хромова*[1]

[1] Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2] Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

Harmonicity of Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Nonunimodular Nondecomposable Lie Groups

E.D. Rodionov[1], *V.V. Slavskii*[2], *O.P. Khromova*[1]

[1] Altai State University (Barnaul, Russia)
[2] Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

Исследуются римановы многообразия с гармоническим тензором Вейля. В общем случае задача классификации римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля представляется достаточно сложной. Естественно поэтому рассматривать ее в классе однородных римановых пространств в частности, в классе групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В размерности 3 тензор Вейля тривиален. Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля изучались ранее авторами.

Исследуются вещественные четырехмерные неунимодулярные неразложимые группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля. Разработаны методы, которые позволяют свести задачу к решению системы полиномиальных уравнений в алгебрах Ли. Получена полная классификация вещественных четырехмерных неунимодулярных неразложимых алгебр Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с гармоническим тензором Вейля. Среди полученных в результате классификации алгебр Ли выделены те, метрические группы Ли которых не являются конформно плоскими, т.е. имеют нетривиальный тензор Вейля.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, гармонический тензор Вейля.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-10

In this paper, Riemannian manifolds with a harmonic Weyl's tensor are investigated. The problem of Riemannian manifolds classification with a harmonic Weyl's tensor is considered to be complicated. Therefore, it is natural to study it in a class of homogeneous Riemannian spaces and, in particular, in a class of Lie groups with a left invariant Riemannian metrics. When the dimension equals to three the Weyl's tensor is trivial. Therefore, there is a question of the Weyl's tensor being harmonic in metric Lie groups with dimension greater than three. Four-dimensional unimodular Lie algebras of Lie groups with a left invariant Riemannian metrics and a harmonic Weyl's tensor were studied by the authors of the paper.

In the paper we study four-dimensional non-unimodular nondecomposable Lie groups with a left invariant Riemannian metrics and a harmonic Weyl's tensor. Some methods with possible reduction of this problem to solution of the system of polynomial equations in Lie algebras are obtained. As a result of this classification, the Lie algebras with metric Lie groups that are not conformally flat, i.e. have non trivial Weyl's tensor, are distinguished.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, harmonic Weyl tensor.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-90716-мол_рф_нр), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457) и гранта ФЦПК (Соглашение № 8206, заявка № 2012-1.1-12-000-1003-014).

1. Введение. Настоящая работа продолжает исследования по гармоничности тензора Вейля на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, начатые в [2, 3], в неунимодулярном неразложимом случае.

В данной работе применяется классификация и система обозначений 4-мерных вещественных алгебр Ли, полученные Г.М. Мубаракзяновым в [5]. Также использованы результаты работы А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [4], в которой доказано, что для каждой четырехмерной неунимодулярной вещественной алгебры Ли существует ортонормированный базис, в котором структурные константы алгебры Ли имеют удобный для вычисления вид. Определяя компоненты тензора Вейля и его дивергенции в указанном базисе, решается вопрос о гармоничности тензора Вейля на неунимодулярных неразложимых группах Ли.

2. Обозначения и предварительные сведения. Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности $n \geq 4$; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита, через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны Римана, через $r = \mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$ тензор Риччи и через $s = \mathrm{tr}(r)$ скалярную кривизну. Разделив тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни-Номидзу, получим $R = W + A \owedge g$, где W — тензор Вейля, A — тензор одномерной кривизны и $(A \owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,Z) - A(X,V)g(Y,Z) - g(Y,Z)P(X,V)$.

Пусть далее G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [1]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ *метрической алгеброй Ли.*

Фиксируем базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ левоинвариантных векторных полей в G. Положим $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$, $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$, где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам $\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$, $\Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}$, где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Таким образом, тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна s и тензор Вейля W_{ijkt} являются функциями структурных констант c_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. также [2]). Например,

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} - \frac{s(g_{jk}g_{it} - g_{jt}g_{ik})}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n-2}(r_{ik}g_{jt} + r_{jt}g_{ik} - r_{it}g_{jk} - r_{jk}g_{it}). \qquad (1)$$

Дивергенцию тензора Вейля будем определять формулой из [8]

$$\mathrm{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p}, \qquad (2)$$

где $W_{ijkt,p} = \Gamma_{pi}^l W_{ljkt} + \Gamma_{pj}^l W_{ilkt} + \Gamma_{pk}^l W_{ijlt} + \Gamma_{pt}^l W_{ijkl}$ — ковариантные производные тензора Вейля.

Замечание 1. *Воспользовавшись симметриями, которыми обладают тензор Вейля и дивергенция тензора Вейля (см. подробнее [3]), всюду далее будем приводить только существенные (нетривиальные) компоненты указанных тензоров.*

Придерживаясь терминологии работ [1,6], введем следующее понятие.

Определение 1. Риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 4$ называется *C-пространством* или *пространством с гармоническим тензором Вейля*, если $\mathrm{div} W = 0$.

Определение 2. Будем называть алгебру Ли группы Ли *неразложимой*, если ее нельзя представить в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т.е. $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X) \equiv 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, где $\mathrm{ad}X(Y) = [X, Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Лемма. [4]. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 1.*

3. Основные результаты. В данном разделе работы мы рассмотрим все 4-мерные действительные неразложимые неунимодулярные алгебры Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с нулевой дивергенцией тензора Вейля.

Теорема. *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{div} W = 0$ в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 2.*

Доказательство. Рассмотрим последовательно каждую неунимодулярную неразложимую алгебру Ли из таблицы 1.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,2}^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -2$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы. Поскольку для компонент тензора Вейля в приведенном базисе имеются связи: $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$,

Таблица 1

Четырехмерные действительные неразложимые неунимодулярные алгебры Ли

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,2}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^1 = A(\alpha - 1)L$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$, $c_{3,4}^2 = CL$, $c_{3,4}^1 = (B(\alpha - 1) - AC)L$	$C, L > 0$, $\alpha \neq 0, -2$
$\mathbb{A}_{4,3}$	$c_{1,4}^1 = L$, $c_{2,4}^1 = AL$, $c_{3,4}^1 = BL$, $c_{3,4}^2 = CL$	$C, L > 0$
$\mathbb{A}_{4,4}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$, $c_{2,4}^1 = AL$,$c_{3,4}^1 = BL$, $c_{3,4}^2 = CL$,	$A, C, L > 0$
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = L$, $c_{2,4}^1 = A(\alpha - 1)L$, $c_{3,4}^2 = C(\alpha - \beta)L$, $c_{2,4}^2 = \alpha L$, $c_{3,4}^1 = (AC(\alpha - 1) + B(\beta - 1))L$, $c_{3,4}^3 = \beta L$, $-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$	$L > 0$, $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq -1$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^1 = AL$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L$, $c_{2,4}^3 = -\frac{L}{C}$, $c_{3,4}^1 = BL$, $c_{3,4}^2 = CL$	$C, L > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 0$
$\mathbb{A}_{4,7}$	$c_{1,4}^1 = 2A$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^1 = C$, $c_{2,4}^2 = A$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = F$, $c_{3,4}^3 = A$	$A, B, F > 0$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = A(\beta + 1)$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^1 = C$, $c_{2,4}^2 = A$, $c_{3,4}^1 = D$, $c_{3,4}^2 = F(1 - \beta)$, $c_{3,4}^3 = A\beta$	$A, B > 0$, $-1 < \beta \leq 1$
$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^1 = C$, $c_{2,4}^2 = A\alpha$, $c_{2,4}^3 = -AD$, $c_{3,4}^1 = F$, $c_{3,4}^2 = \frac{A}{D}$, $c_{3,4}^3 = A\alpha$	$A, B, D, \alpha > 0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = B$, $c_{1,4}^2 = C$, $c_{2,4}^1 = D$, $c_{3,4}^1 = F$, $c_{3,4}^2 = G$	$A, D > 0$, $C < 0$

и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$, то с учетом (1) существенными являются следующие компоненты тензора Вейля:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{1212} = (1/6)(A^2L^2\alpha^2 - 4L^2B^2A - 2L^2B^2\alpha^2 \\
&- 2A^2L^2\alpha + 4L^2B^2\alpha + A^2L^2 - 2L^2B^2A^2 + \alpha^2L^2 \\
&- \alpha L^2 + 4L^2B^2\alpha A - 2L^2B^2 - 2C^2L^2), \\
&\mathrm{W}_{1213} = (1/4)(AL^2B\alpha^2 - 4AL^2B\alpha - 2A^2L^2\alpha B \\
&+ 2AL^2B + 2A^2L^2B - \alpha L^2C + 2CL^2), \\
&\mathrm{W}_{1223} = (1/4)(3L^2B\alpha - L^2B - AL^2B - AL^2C\alpha \\
&+ AL^2C - 2L^2B\alpha^2 + 2AL^2B\alpha), \\
&\mathrm{W}_{1313} = (1/6)(-A^2L^2\alpha^2 + 2L^2B^2A + L^2B^2\alpha^2 \\
&+ 4A^2L^2\alpha - 2L^2B^2\alpha - 2A^2L^2 + L^2B^2A^2 \\
&+ \alpha^2L^2 - \alpha L^2 - 2L^2B^2\alpha A + L^2B^2 + C^2L^2), \\
&\mathrm{W}_{1323} = (1/4)(-AL^2\alpha + AL^2 + 2AL^2\alpha^2), \\
&\mathrm{W}_{1414} = (1/6)(A^2L^2\alpha^2 + 2L^2B^2A + L^2B^2\alpha^2 \\
&- 2A^2L^2\alpha - 2L^2B^2\alpha + A^2L^2 + L^2B^2A^2 \\
&- 2\alpha^2L^2 + 2\alpha L^2 - 2L^2B^2\alpha A + L^2B^2 + C^2L^2)
\end{aligned}$$

и компоненты дивергенции тензора Вейля согласно (2) равны:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{114} = (1/8)L^3(2\alpha C^2 + 4\alpha B^2 + 4\alpha A^2 - 11\alpha^2B^2 \\
&- 11\alpha^2A^2 + 6\alpha^3B^2 + 6\alpha^3A^2 + A^2B^2 - 12\alpha^2B^2A \\
&+ 6\alpha B^2A^2 + 10\alpha B^2A + 2AB^2 - BAC\alpha^2 + BA^2C\alpha \\
&+ B^2 - BA^2C + 8\alpha - BAC + A^2 + 2BAC\alpha - 8\alpha^2), \\
&\mathrm{divW}_{124} = (1/8)L^3(-4A^3B^2 + 12A^3\alpha - 8A^2B^2 \\
&- 12A^3\alpha^2 + 4A^3\alpha^3 - 12\alpha^2B^2A + 16\alpha B^2A^2 - 4AB^2 \\
&+ 12\alpha B^2A + 16\alpha A - 8\alpha^2A - 2A\alpha^3 - 8A^2B^2\alpha^2 \\
&+ 4A^3B^2\alpha + 4AB^2\alpha^3 - 4BC - 4A^3 + BC\alpha^2 - 6A \\
&+ 3BC\alpha - 4BAC - BAC\alpha), \\
&\mathrm{divW}_{134} = -(1/8)L^3(6B + 6AB + 4BA^2 + 12B^3A \\
&+ 4B^3 - 16\alpha B + 8\alpha^2B - 12B^3A^2\alpha + 12B^3\alpha^2A \\
&- 12B^3\alpha + 12B^3A^2 + 12B^3\alpha^2 - 4B^3\alpha^3 + 3A\alpha^2C \\
&+ 4A^3B + 4B^3A^3 + 4BC^2 - 3A\alpha C - 4A^2B\alpha^3 \\
&+ 12A^2B\alpha^2 - 12A^2B\alpha + 4A^3B\alpha^2 - 8A^3\alpha B + 2B\alpha^3 \\
&- 2BA\alpha^2 - 4BC^2\alpha - 24B^3\alpha A + 4BC^2A - 10BA\alpha), \\
&\mathrm{divW}_{214} = (L^3/8)(6A^3\alpha - 2A^3B^2 - 4A^2B^2 - 6A^3\alpha^2 \\
&+ 2A^3\alpha^3 - 6\alpha^2B^2A + 8\alpha B^2A^2 + 6\alpha B^2A - 2AB^2 \\
&- AC^2 + 10\alpha A - 2\alpha^2A - 4A\alpha^3 + AC^2\alpha - 4A^2B^2\alpha^2 \\
&+ 2A^3B^2\alpha + 2AB^2\alpha^3 - BC - 2A^3 + 4BC\alpha^2 - 4A \\
&- 3BC\alpha - BAC - 4BAC\alpha), \\
&\mathrm{divW}_{224} = -(L^3/8)(4\alpha B^2 - \alpha C^2 - 2\alpha^2B^2 - 9\alpha^2A^2 \\
&+ 6\alpha^3A^2 - 2A^2B^2 + 4\alpha B^2A - 4AB^2 - 4BAC\alpha^2 \\
&- 6C^2 + 4BA^2C\alpha - 2B^2 - 4BA^2C + 4\alpha - 4BAC \\
&+ 3A^2 + 8BAC\alpha - 4\alpha^2), \\
&\mathrm{divW}_{234} = (L^3/8)(4C^3 - A^2C - 5AB - 6AB\alpha^3 \\
&+ 8CB^2A + 2C\alpha^2 - 4C\alpha + 4CB^2 + 4CB^2\alpha^2 \\
&- 8CB^2\alpha + 4CB^2A^2 - 8CB^2\alpha A - A^2C\alpha^2 \\
&+ 2A^2C\alpha + 6A^2B\alpha^2 - A^2B\alpha + 4BA\alpha + 7BA\alpha^2 \\
&- 4C - 5BA^2),
\end{aligned}$$

Таблица 2

Неразложимые четырехмерные действительные неунимодулярные алгебры Ли с левоивариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля

Неразложимая алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$	L>0
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L,\ c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$	$\alpha \neq 0, L > 0$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L, c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$	$\beta > 0, L > 0$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A,\ c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A$	$A > 0$
$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A\alpha, c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha,\ c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = A$	$A > 0, \alpha > 0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A,\ c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = B, c_{1,4}^2 = -c_{2,4}^1 = -D$	$A > 0, D > 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divW}_{314} &= -(L^3/8)(4B - CA + 4AB + 2BA^2 \\
&+ 6B^3A - 10\alpha B + 2\alpha^2 B - 6B^3A^2\alpha + 6B^3\alpha^2 A \\
&+ 2B^3 - 6B^3\alpha + 6B^3A^2 + 6B^3\alpha^2 - 2B^3\alpha^3 \\
&+ 2A\alpha^2 C + 2A^3B + 2B^3A^3 + 2BC^2 + 4B\alpha^3 \\
&- A\alpha C - 2A^2B\alpha^3 + 6A^2B\alpha^2 - 6A^2B\alpha + 2A^3B\alpha^2 \\
&- 4A^3\alpha B - 4BA\alpha^2 - 2BC^2\alpha - 12B^3\alpha A \\
&+ 2BC^2A - 6BA\alpha), \\
\mathrm{divW}_{324} &= (L^3/8)(2C^3 - 5AB - 6AB\alpha^3 + 4CB^2A \\
&+ 2C\alpha^2 - 4C\alpha + 2CB^2 + 2CB^2\alpha^2 - 4CB^2\alpha \\
&+ 2CB^2A^2 - 4CB^2\alpha A - 4C + 6A^2B\alpha^2 \\
&- A^2B\alpha + 4BA\alpha + 7BA\alpha^2 - 5BA^2), \\
\mathrm{divW}_{334} &= (L^3/8)(9\alpha^2B^2 - 3\alpha C^2 - 4\alpha A^2 + 2\alpha^2A^2 \\
&- 6\alpha^3B^2 - 3A^2B^2 + 12\alpha^2B^2A - 6\alpha B^2A^2 - 6AB^2 \\
&- 6\alpha B^2A - 6C^2 - 3BAC\alpha^2 + 3BA^2C\alpha - 3B^2 \\
&- 3BA^2C - 4\alpha - 3BAC + 2A^2 + 6BAC\alpha + 4\alpha^2), \\
\mathrm{divW}_{412} &= L^3(1-\alpha)(2\alpha^2(A + B^2A + A^3) + 3BC \\
&- 4\alpha(A^3 + B^2A + A + B^2A^2) - 3BC\alpha + 2A(A^2 \\
&+ 1 + A^2B^2 + B^2) + 3BAC + 4A^2B^2 - AC^2)/8, \\
\mathrm{divW}_{413} &= (L^3/8)(CA + 2B(1 + A + A^2) + 2B^3 \\
&+ 6B^3A - 6\alpha B + 6\alpha^2B - 6B^3A^2\alpha + 6B^3\alpha^2A \\
&- 6B^3\alpha + 6B^3A^2 + 6B^3\alpha^2 - 2B^3\alpha^3 + A\alpha^2C \\
&+ 2A^3B + 2B^3A^3 + 2BC^2 - 2B\alpha^3 - 2A\alpha C \\
&- 2A^2B\alpha^3 + 6A^2B(\alpha^2 - \alpha) + 2A^3B\alpha^2 + 2BC^2A \\
&- 4A^3\alpha B + 2B(A\alpha^2 - C^2\alpha) - 12B^3\alpha A - 4BA\alpha), \\
\mathrm{divW}_{423} &= CL^3(-2C^2 + A^2 - 2B^2(1 + 2A + \alpha^2 \\
&- 2\alpha + A^2 - 2\alpha A) + \alpha^2A^2 - 2\alpha A^2)/8.
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L и параметра α, получим следующие действительные решения:

1. $A, B, C \in \mathbb{R}, L = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $A = B = C = 0, L \in \mathbb{R}, \alpha = 0$.
3. $A = C = 0, B, L \in \mathbb{R}, \alpha = 1$.
4. $A, L \in \mathbb{R}, B = C = 0, \alpha = 1$.

Поскольку данные решения не удовлетворяют ограничениям леммы, то для метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,2}^{\alpha}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,3}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы. Учитывая, что для компонент тензора Вейля в исследуемом базисе выполняется $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$, получаем, что существенными компонентами тензора Вейля согласно (1) являются

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_{1212} &= (1/6)L^2(A^2+1) - (1/3)L^2(B^2 + C^2), \\
\mathrm{W}_{1213} &= (1/2)AL^2B - (1/4)L^2C, \\
\mathrm{W}_{1223} &= -(1/4)AL^2C - (1/2)L^2B, \\
\mathrm{W}_{1313} &= (1/6)L^2(1 + B^2 + C^2) - (1/3)A^2L^2, \\
\mathrm{W}_{1323} &= (1/2)L^2A, \\
\mathrm{W}_{1414} &= -(1/3)L^2 + (1/6)L^2(1 + B^2 + C^2),
\end{aligned}
$$

а компоненты дивергенции тензора Вейля из (2) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divW}_{114} &= (1/8)L^3(6A^2 + 2C^2 - BAC + 6B^2), \\
\mathrm{divW}_{124} &= (1/8)L^3(4AB^2 + 4A^3 + BC - 2A), \\
\mathrm{divW}_{134} &= (L^3/8)(4B(A^2 + B^2 + C^2) - 3AC - 2B), \\
\mathrm{divW}_{224} &= -(1/8)L^3(6A^2 - C^2 - 4BAC), \\
\mathrm{divW}_{214} &= \frac{L^3}{8}(A(C^2 - 4 + 2A^2 + 2B^2) + 4BC), \\
\mathrm{divW}_{234} &= \frac{L^3}{8}(C(2 - A^2 + 4B^2 + 4C^2) - 6AB), \\
\mathrm{divW}_{314} &= (L^3/4)(B^3 + B(C^2 + A^2 - 2) - AC),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{324} = -(1/4)L^3(3AB - C - CB^2 - C^3),\\
&\mathrm{divW}_{334} = -(3/8)L^3(2B^2 + C^2 + BAC),\\
&\mathrm{divW}_{412} = \frac{L^3}{8}(3BC + A(C^2 - 2B^2 - 2A^2 - 2)),\\
&\mathrm{divW}_{413} = (L^3/8)(AC - 2B(1 + A^2 + B^2 + C^2)),\\
&\mathrm{divW}_{423} = (1/8)CL^3(A^2 - 2B^2 - 2C^2).
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L, получим следующие действительные решения:

1. $A, B, C \in \mathbb{R}, L = 0$.
2. $A = B = C = 0, L \in \mathbb{R}$.

Данные решения не удовлетворяет ограничениям леммы. Следовательно, для метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,3}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,4}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы. Заметим, что в данном базисе имеют место соотношения:$\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$. Поэтому существенные компоненты тензора Вейля согласно (1) примут вид

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{1212} = (1/6)A^2L^2 - (1/3)B^2L^2 - (1/3)C^2L^2,\\
&\mathrm{W}_{1213} = (1/2)AL^2B + (1/4)L^2C,\\
&\mathrm{W}_{1223} = -(1/4)L^2B - (1/4)AL^2C,\\
&\mathrm{W}_{1313} = (1/6)B^2L^2 - (1/3)A^2L^2 + (1/6)C^2L^2,\\
&\mathrm{W}_{1323} = (1/4)L^2A,\\
&\mathrm{W}_{1414} = (1/6)A^2L^2 + (1/6)B^2L^2 + (1/6)C^2L^2,
\end{aligned}
$$

а существенными компонентами дивергенции тензора Вейля согласно (2) будут

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{114} = (1/8)L^3(7A^2 + 7B^2 + 2C^2 - BAC),\\
&\mathrm{divW}_{124} = (1/8)L^3(4AB^2 + 4A^3 - 6A + 5BC),\\
&\mathrm{divW}_{134} = (L^3/8)(4B(A^2 + B^2 + C^2) - 3AC - 6B),\\
&\mathrm{divW}_{214} = (L^3/8)(A(C^2 - 6 + 2B^2) + 5BC + 2A^3),\\
&\mathrm{divW}_{224} = -(1/8)L^3(-2B^2 + 9A^2 - 7C^2 - 4BAC),\\
&\mathrm{divW}_{234} = (L^3/8)(4C^3 - 11AB + C(4B^2 - 6 - A^2)),\\
&\mathrm{divW}_{314} = (L^3/8)(2B(A^2 - 3 + C^2) - 3AC + 2B^3),\\
&\mathrm{divW}_{324} = -(1/8)L^3(11AB + 6C - 2CB^2 - 2C^3),\\
&\mathrm{divW}_{334} = (1/8)L^3(-9B^2 + 2A^2 - 9C^2 - 3BAC),\\
&\mathrm{divW}_{412} = -(1/8)AL^3(-C^2 + 2B^2 + 2A^2),\\
&\mathrm{divW}_{413} = -(1/4)BL^3(A^2 + B^2 + C^2),\\
&\mathrm{divW}_{423} = (1/8)CL^3(A^2 - 2B^2 - 2C^2).
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L, получим следующие действительные решения:

1. $A, B, C \in \mathbb{R}, L = 0$.
2. $A = B = C = 0, L \in \mathbb{R}$.

Данные решения не удовлетворяет ограничениям леммы. Следовательно, для метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,4}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,5}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \le \alpha \le \beta \le 1$, $\alpha + \beta \neq -1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы и заметим, что в этом базисе выполняются соотношения: $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$. Значит, существенными компонентами тензора Вейля, учитывая (1), будут

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{1212} = (1/6)(L^2\beta - 2C^2L^2\beta^2 - 2C^2L^2\alpha^2 + \alpha L^2\beta\\
&+ 4C^2L^2\beta\alpha + \alpha^2L^2 - 2L^2\alpha + A^2L^2 + A^2L^2\alpha^2 + L^2\\
&- 2L^2(\beta^2 + B^2\beta^2 - 2B^2\beta + A^2[\alpha + C^2 + C^2\alpha^2])\\
&+ 4L^2A^2C^2\alpha - 4L^2BAC - 2L^2B^2 - 4L^2AC\alpha B\beta\\
&+ 4L^2AC\alpha B + 4L^2ACB\beta),\\
&\mathrm{W}_{1213} = (1/4)(2L^2(A^2C\alpha^2 + A\beta B\alpha - AB\beta + A^2C)\\
&- A^2L^2C\alpha - 2AL^2B\alpha + 2AL^2B - L^2C\alpha + L^2C\beta\\
&+ 2L^2C\alpha^2 - 2L^2C\alpha\beta),\\
&\mathrm{W}_{1223} = (L^2/4)(\alpha B\beta - 2\alpha AC - \alpha B + AC\beta\alpha - AC\beta\\
&- 2B\beta + 2AC + 2B),\\
&\mathrm{W}_{1313} = (L^2/6)(C^2\beta^2 + C^2\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta - 2C^2\beta\alpha\\
&+ \alpha - 2A^2 - 2A^2\alpha^2 + 4A^2\alpha + B^2\beta^2 - 2B^2\beta + A^2C^2\\
&+ A^2C^2\alpha^2 - 2A^2C^2\alpha + 2BAC + B^2 + \beta^2 + 2AC\alpha B\beta\\
&- 2AC\alpha B - 2ACB\beta - 2\alpha^2 + 1),\\
&\mathrm{W}_{1323} = (1/4)(-AL^2\beta\alpha + AL^2\beta + 2AL^2\alpha - 2AL^2),\\
&\mathrm{W}_{1414} = (L^2/6)(C^2\beta^2 + C^2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta - 2C^2\beta\alpha\\
&+ A^2 + A^2\alpha^2 + \beta^2 + B^2\beta^2 - 2B^2\beta + A^2C^2 - 2 + B^2\\
&+ A^2C^2\alpha^2 - 2A^2C^2\alpha - 2A^2\alpha + 2BAC + 2AC\alpha B\beta\\
&- 2AC\alpha B - 2ACB\beta + \alpha^2 + \alpha).\\
&\mathrm{divW}_{114} = (1/8)L^3(12BAC + 6A^2 + 6B^2 + 4\alpha^2\\
&+ A^2\beta - 4\alpha - 4\beta + 6A^2\alpha^2 + 2C^2\alpha^2 + AC\alpha\beta^2B\\
&- AC\beta^2B - 11ACB\beta - 11AC\alpha B + 10AC\alpha B\beta
\end{aligned}
$$

Компоненты дивергенции тензора Вейля в выбранном базисе согласно (2) примут вид

$$
\begin{aligned}
&+ \alpha^2ACB\beta - \alpha^2ACB + A^2C^2\alpha^2\beta - 2A^2C^2\alpha\beta\\
&- 2B^2\beta\alpha + B^2\beta^2\alpha + A^2C^2\beta - 12B^2\beta + A^2\beta\alpha^2\\
&+ 2C^2\beta^2 + 4\beta^2 + 6B^2\beta^2 - 12A^2\alpha - 12A^2C^2\alpha\\
&+ 6A^2C^2 + 6A^2C^2\alpha^2 - 4C^2\beta\alpha + B^2\alpha - 2A^2\beta\alpha),\\
&\mathrm{divW}_{124} = (L^3/8)(2A - 4C\alpha^2B - 8A^2BC - C^2A\alpha\\
&+ 12A^3C^2\alpha + CB\beta + 8A^2C\alpha^2B\beta + 8A^2CB\beta\\
&- 4A^3 + C^2\beta A + 16A^2C\alpha B + 4C\alpha^2B\beta + 4A^3C^2\alpha^3
\end{aligned}
$$

$+ 8AB^2\beta + 4A(C^2+1)\alpha^3 - 12A^3C^2\alpha^2 - 3AC^2\alpha^2$
$+ 4AB^2\alpha + 4A^3\alpha^3 + 12A^3\alpha - 12A^3\alpha^2 - 4A\alpha\beta$
$+ 3AC^2\beta\alpha - 4A^3C^2 - 4AC^2\beta\alpha^2 - 4C\alpha\beta^2B$
$+ 5C\alpha B\beta - 8AB^2\beta\alpha + 4AB^2\beta^2\alpha - 16A^2C\alpha B\beta$
$- 8A^2C\alpha^2B + 4A\alpha - 4AB^2\beta^2 - CB\beta^2 - 4AB^2$
$- C\alpha B - 10A\alpha^2 + 2A\alpha\beta^2 - 2A\beta^2 + 4A\beta),$

$\mathrm{divW}_{134} = (1/8)L^3(2B - 4A^2B + 2AC + 5AC\alpha$
$- 2B\alpha^2 + 4B^3\beta^3 - 12B^3\beta^2 - 11AC\alpha^2 + 3AC\beta$
$+ 4A^3C\alpha^3 - 12A^3C\alpha^2 + 12A^3C\alpha - 4A^2\alpha^2B$
$+ 8A^2\alpha B + 4AC\alpha^3 - 10B\beta^2 + 4B\alpha - 4\beta B\alpha$
$- 4A^3C + 4B\beta - 24A^2C^2\alpha B\beta - 12A^2C^2\alpha^2B$
$- 4A^3C^3 + 24A^2C^2\alpha B + AC\alpha\beta + 4A^2\alpha^2B\beta$
$- 8A^2\alpha B\beta - 4AC\alpha^2\beta - 6\beta^2AC + 12A^3C^3\alpha$
$+ 4C^3\alpha^3A - 4C^3\alpha^2A - 4C^3\beta^2A + 4C^2\alpha^2B\beta$
$+ 4C^3\beta^2A\alpha + 12(B^2AC\alpha + A^2C^2\alpha^2B\beta) - 4B^3$
$+ 6\beta^2(AC\alpha + 2B^2AC\alpha - 2B^2AC) + 8C^2\beta\alpha B$
$- 24B^2\beta AC\alpha + 24B^2\beta AC - 8C^3\beta\alpha^2A + 8C^3\beta\alpha A$
$- 8C^2\beta^2\alpha B + 12A^2C^2B\beta + 4\beta BA^2 + 4C^2\beta^3B$
$- 12A^3C^3\alpha^2 - 12B^2AC + 4A^3C^3\alpha^3 - 12A^2C^2B$
$- 4C^2\alpha^2B - 4C^2\beta^2B),$

$\mathrm{divW}_{214} = (L^3/8)(4A - C\alpha^2B - 4A^2BC + 6A^3C^2\alpha$
$+ 4C(C\beta A - CA\alpha - B\beta^2 + B\beta + A^2\alpha^2B\beta$
$+ 2A^2\alpha B + A^2B\beta) + C\alpha^2B\beta + 2A^3C^2\alpha^3 + 2A^3\alpha^3$
$+ 2A(2B^2\beta + C^2\alpha^3 - 3A^2C^2\alpha^2 + C^2\alpha^2 + B^2\alpha$
$+ \alpha^3 + 3A^2\alpha - 3A^2\alpha^2 - A^2) - AC^2\beta\alpha - 3AC^2\beta\alpha^2$
$\alpha\beta(5CB - C\beta B + 2A(B^2\beta - 2B^2 - 4ACB - 2))$
$- 4A^2C\alpha^2B - 2AB^2\beta^2 - 2AB^2 - 4C\alpha B - A(4\alpha^2$
$+ \beta^2(C^2 - C^2\alpha - 2\alpha + 2) - 4\beta - 2A\alpha + 2A^2C^2)),$

$\mathrm{divW}_{224} =)(1/8)L^3(4\alpha - 4\beta\alpha^2 - 6A^2 - 4\alpha^2 - 3A^2\beta$
$- 6A^2\alpha^2 + C^2\alpha^2 - 4ABC(\alpha\beta^2 - \beta^2) - 4ACB\beta$
$+ 8AC\alpha B - 4AC\alpha B\beta + 8\alpha^2ACB\beta - 8\alpha^2ACB$
$- 4A^2C^2\alpha^2\beta + 8A^2C^2\alpha\beta + 6A^2C^2\alpha^3 - 4B^2\beta\alpha$
$+ 2B^2\beta^2\alpha - 4A^2C^2\beta - 12C^2\alpha^2\beta + 4\beta^2\alpha + 6C^2\alpha^3$
$+ C^2\beta^2 + 12A^2\alpha + 6A^2C^2\alpha - 12A^2C^2\alpha^2 - 2C^2\beta\alpha$
$+ 6\alpha C^2\beta^2 + 2B^2\alpha - 3A^2\beta\alpha^2 + 6A^2\beta\alpha),$

$\mathrm{divW}_{234} = (L^3/8)(4C^3(A^2\alpha + \alpha^3) - 4C\alpha^2 - 2C\alpha^3$
$+ 8C^2A\alpha^2B\beta - 3A^2C\beta - 2A^2\alpha^3C + 10A^2C\alpha$
$+ 2AB\beta - 8C^3A^2\alpha^2 + 4A\beta^2B + A\alpha^2B + 5A\alpha B$
$+ 4C^3A^2\alpha^3 - 12C^3(\beta\alpha^2 - \beta^2\alpha) + 4CB^2(\alpha - \beta^3)$
$+ 8CB^2\beta^2 - 4CB^2\beta - 4C^3A^2\beta + 6A^2C\alpha\beta$
$- A\alpha^2B\beta - A\alpha B\beta - 4A\beta^2\alpha B - 8CB^2\beta\alpha - 2C\beta$
$+ 4CB^2\beta^2\alpha - 8C^2A\alpha^2B - 4C^3A^2\alpha^2\beta + 10C\alpha\beta^2$
$+ 2C\alpha + 4C\alpha\beta - 6A^2C - 6AB - 8C^2A\alpha\beta^2B$
$+ 8C^3A^2\alpha\beta + 8C^2A\beta^2B + 8C^2A\alpha B - 8C^2AB\beta$
$- 3A^2\alpha^2\beta C - 2A^2C\alpha^2 - 4\beta^3(C^3 + C) - 4\alpha^2C\beta),$

$\mathrm{divW}_{314} = (1/8)L^3(4B - 2A^2B + 4AC + 2AC\alpha$
$- 2B\alpha^2 + 2B^3\beta^3 - 6B^3(\beta^2 - \beta) + 2\beta^3B + 2\beta B\alpha^2$
$- 8AC\alpha^2 + 2A^3C\alpha^3 - 6A^3C\alpha^2 + 6A^3C\alpha - 2B^3$
$- 2A^2\alpha^2B + 4A^2\alpha B + 2AC\alpha^3 - 4B\beta^2 + 4B\alpha$
$- 4\beta B\alpha - 2A^3C^3 - 2A^3C - 2B\beta - 12A^2C^2\alpha B\beta$
$- 6A^2C^2\alpha^2B + 12A^2C^2\alpha B + AC\alpha\beta + 2A^2\alpha^2B\beta$
$- 4A^2\alpha B\beta - AC\alpha^2\beta - 3\beta^2AC + 6A^3C^3\alpha$
$+ 2C^3\alpha^3A - 2C^3\alpha^2A - 2C^3\beta^2A + 2C^2\alpha^2B\beta$
$+ 2C^3\beta^2A\alpha + 6B^2AC\alpha + C^2B\beta(6A^2\alpha^2 + 4\alpha)$
$+ 3\beta^2AC\alpha + 6B^2\beta^2AC(\alpha - 1) - 12B^2\beta AC\alpha$
$+ 12B^2\beta AC - 4C^3\beta\alpha^2A + 4C^3\beta\alpha A - 4C^2\beta^2\alpha B$
$+ 6A^2C^2B\beta + 2\beta BA^2 + 2C^2\beta^3B - 6B^2AC$
$+ 2A^3C^3(\alpha^3 - 3\alpha^2) - 2C^2B(3A^2 + \alpha^2 + \beta^2)),$

$\mathrm{divW}_{324} = (L^3/8)(2C^3\alpha^3 - 4C\alpha^3 + 4C^2A\alpha^2B\beta$
$+ 2C^3A^2\alpha - A^2C\beta - 4A^2\alpha^3C + 8A^2C\alpha + 5AB\beta$
$- 4C^3A^2\alpha^2 + A\beta^2B + 4A\alpha^2B + 2A\alpha B - 4C\alpha^2$
$+ 2C^3A^2\alpha^3 - 6C^3(\beta\alpha^2 - \beta^2\alpha) + 2CB^2\alpha - 2C\beta^3$
$- 2CB^2\beta^3 + 4CB^2\beta^2 - 2CB^2\beta - 2C^3A^2\beta$
$+ 2A^2C\alpha\beta - AB\beta(4\alpha^2 + \alpha + \beta\alpha) - 4CB^2\beta\alpha$
$+ 2CB^2\beta^2\alpha - 4C^2A\alpha^2B - 2C^3A^2\alpha^2\beta + 4C^3A^2\alpha\beta$
$+ 4C\alpha\beta^2 - 2C\beta + 2C\alpha + 4C\alpha\beta - 6A^2C - 6AB$
$- 4C^2A\alpha\beta^2B + 4C^2A\beta^2B + 4C^2A\alpha B - 4C^2AB\beta$
$- A^2\alpha^2\beta C + 2A^2C\alpha^2 - 2C^3\beta^3 + 2\alpha^2C\beta),$

$\mathrm{divW}_{334} = -(L^3/8)(12BAC - 4\beta\alpha^2 + 6B^2 - 4\beta$
$- 2A^2\beta + 3C^2\alpha^2 - 3AC\alpha\beta^2B + 3AC\beta^2B$
$- 15ACB\beta - 3AC\alpha B + 6AC\alpha B\beta + 9\alpha^2ACB\beta$
$- 9\alpha^2ACB - 3A^2C^2\alpha^2\beta + 6A^2C^2\alpha\beta + 6A^2C^2\alpha^3$
$- 6B^2\beta\alpha + 3B^2\beta^2\alpha - 3A^2C^2\beta - 12\beta(B^2 + C^2\alpha^2)$
$+ 4\beta^2\alpha + 6A^2C^2 + 6C^2\alpha^3 + 3C^2\beta^2 + 4\beta^2 + 6B^2\beta^2$
$- 6C^2(A^2\alpha + A^2\alpha^2 + \beta\alpha - \alpha\beta^2) - 2A^2\beta\alpha^2$
$+ 4A^2\beta\alpha + 3B^2\alpha),$

$\mathrm{divW}_{412} = (L^3/8)(1 - \alpha)(2A + 4A^2BC - 4A^3C^2\alpha$
$- 3C^2A\alpha + 3C^2\beta A - 3CB\beta^2 + 3CB\beta - 4A^2C\alpha B$
$- 4A^2CB\beta - 4AB^2\beta + 2A^3C^2\alpha^2 + 2AC^2\alpha^2 + 2A^3$
$- 4A^3\alpha + 2A^3\alpha^2 - AC^2\beta\alpha + 3C\alpha B\beta + 4A^2C\alpha B\beta$
$+ 2AB^2\beta^2 + 2AB^2 - 3C\alpha B - AC^2\beta^2 + 2A\alpha^2$
$- 4A\alpha + 2A^3C^2),$

$\mathrm{divW}_{413} = -(L^3/8)(3AC\alpha - 2B - 2A^2B - 2AC$
$+ 2B^3\beta^3 - 6B^3\beta^2 + 6B^3\beta + 2\beta^3B - 3AC(\alpha^2 - \beta)$

$$+\,2A^3C\alpha^3-6A^3C(\alpha^2-\alpha)-2A^2\alpha^2B+4A^2\alpha B$$
$$+\,2AC\alpha^3-6B\beta^2-2A^3(C^3+C)-12A^2C^2\alpha B\beta$$
$$+\,6B\beta-6A^2C^2\alpha^2B+12A^2C^2\alpha B+2A^2\alpha^2B\beta$$
$$-\,4A^2\alpha B\beta-3AC\alpha^2\beta-3\beta^2AC+6A^3C^3\alpha$$
$$+\,2C^3\alpha^3A-2C^3\alpha^2A-2C^3\beta^2A+2C^2\alpha^2B\beta$$
$$+\,2C^3\beta^2A\alpha+6B^2AC\alpha+6A^2C^2\alpha^2B\beta+4C^2\beta\alpha B$$
$$+\,3\beta^2AC\alpha+6ACB^2(\beta^2\alpha-\beta^2-2\beta\alpha)-2B^3$$
$$+\,12B^2\beta AC-4C^3\beta\alpha^2A+4C^3\beta\alpha A-4C^2\beta^2\alpha B$$
$$+\,6A^2C^2B\beta+2\beta BA^2+2C^2\beta^3B-6B^2AC$$
$$+\,2A^3C^3\alpha^3-6A^3C^3\alpha^2-2C^2B(\alpha^2+\beta^2+3A^2)),$$
$$\mathrm{divW}_{423}=(L^3/8)(\beta-\alpha)(2C^3\alpha^2+2C\alpha^2+2A^2C\alpha^2$$
$$+\,2C^3A^2\alpha^2-4C^3\alpha\beta-4C^3A^2\alpha+3A\alpha B\beta+3AB$$
$$-\,4C^2A\alpha B-4A^2C\alpha+4AC^2\alpha B\beta-4C\alpha\beta-3A\alpha B$$
$$+\,2C^3A^2+2C^3\beta^2+2C(A^2+B^2+\beta^2-2B^2\beta)$$
$$+\,4C^2AB-4C^2AB\beta-3AB\beta+2CB^2\beta^2).$$

Решая подсистему из двух уравнений $\mathrm{divW}_{412}=0$ и $\mathrm{divW}_{423}=0$ относительно параметров α и β, получим единственное решение $\alpha=1$ и $\beta=1$. Подстановка этих значений в систему $\mathrm{divW}=0$ обращает в нуль каждое ее уравнение. Таким образом, единственным решением системы $\mathrm{divW}=0$ является следующий набор структурных констант:

$$A,B,C,L\in\mathbb{R},\ \alpha=1,\ \beta=1.$$

При $L>0$ данное решение удовлетворяет ограничением леммы, и поэтому для алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta},\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если нетривиальные стуктурные константы имеют вид $c_{1,4}^1=c_{2,4}^2=c_{3,4}^3=L$, где $L>0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\neq0$, $\beta\geq0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы. Принимая во внимание, что в этом базисе $\mathrm{W}_{1212}=\mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213}=-\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1223}=\mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1313}=\mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1323}=-\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414}=\mathrm{W}_{2323}$, получаем, что существенными компонентами тензора Вейля согласно (1) являются

$$\mathrm{W}_{1212}=\frac{L^2}{6}(A^2-\beta\alpha-2B^2+\alpha^2+1-2C^2+\frac{1}{C^2}),$$
$$\mathrm{W}_{1213}=(L^2/(4C))(2BAC+(2\beta-\alpha)(C^2-1)),$$
$$\mathrm{W}_{1223}=-(1/4)L^2(-B\beta+AC+2B\alpha),$$
$$\mathrm{W}_{1313}=\frac{L^2}{6}(B^2-\beta\alpha-2A^2+\alpha^2+C^2+C^1-\frac{2}{C^2}),$$
$$\mathrm{W}_{1323}=(L^2/(4C))(-B-AC\beta+2AC\alpha),$$
$$\mathrm{W}_{1414}=\frac{L^2}{6}(A^2+B^2+2\beta\alpha-2\alpha^2+C^2-2+\frac{1}{C^2}),$$

а компоненты дивергенции тензора Вейля из (2) равны

$$\mathrm{divW}_{114}=(1/8)L^3(BAC+2\alpha+A^2C^2\beta+6A^2C^2\alpha$$
$$+\,B^2C^2\beta-BC^3A+6B^2C^2\alpha-8C^2\alpha^2\beta-4\alpha C^2$$
$$+\,8\alpha C^2\beta^2+2\alpha C^4)/C^2,$$
$$\mathrm{divW}_{124}=(1/8)L^3(4A^3C^2-10AC^2\beta\alpha-2AC^2$$
$$+\,6AC^2\beta^2+BC^3\alpha+3C\alpha B+4AB^2C^2+4BC^3\beta$$
$$-\,2AC^2\alpha^2+4A)/C^2,$$
$$\mathrm{divW}_{134}=(1/8)L^3(4A^2BC-3C^2A\alpha-A\alpha-4A\beta$$
$$+\,2C(3B\beta^2-5\alpha B\beta+2B^3+2BC^2-B-\alpha^2B))/C,$$
$$\mathrm{divW}_{214}=(1/8)L^3(2A+CB\beta-4AC^2\alpha^2-6AC^2\beta\alpha$$
$$+\,AC^4+2C\alpha B+4AC^2\beta^2-AC^2+2A^3C^2+BC^3$$
$$+\,2AB^2C^2\beta+4BC^3\alpha)/C^2,$$
$$\mathrm{divW}_{224}=-L^3(3\alpha-3BAC+6\beta+3A^2C^2\beta-2\alpha C^2$$
$$-\,4C^2\alpha^2\beta+6A^2C^2\alpha-4BC^3A-2B^2C^2\beta+4\alpha C^2\beta^2$$
$$-\,\alpha C^4-6C^4\beta)/(8C^2),$$
$$\mathrm{divW}_{234}=-L^3(4C^4\beta^2-2C^4\alpha^2+2+2C^2\alpha^2+4C^4\beta\alpha$$
$$+\,2A^2C^2+2C^4-4C^2\beta^2+5BC^3A\beta+6BC^3A\alpha-4C^6$$
$$-\,4B^2C^4+A^2C^4-4C^2\beta\alpha)/(8C^3),$$
$$\mathrm{divW}_{314}=(1/8)L^3(B-BC^2-4AC\alpha+2B^3C^2+2BC^4$$
$$-\,AC\beta-AC^3\beta-2AC^3\alpha-6C^2\beta\alpha B+2A^2C^2B$$
$$-\,4C^2\alpha^2B+4C^2\beta^2B)/C^2,$$
$$\mathrm{divW}_{324}=-L^3(6BC^3A\alpha-2C^4\alpha^2+2C^2\alpha^2$$
$$+\,4C^4\beta\alpha-4C^2\beta\alpha-B^2C^2+5BC^3A\beta+4C^4\beta^2$$
$$+\,4-2C^2(-2A^2+2\beta^2-C^4+B^2C^2))/(8C^3),$$
$$\mathrm{divW}_{334}=(1/8)L^3(\alpha-4BAC+6\beta+2A^2C^2\beta$$
$$+\,4C^2\alpha^2\beta+2\alpha C^2-6B^2C^2\alpha-3BC^3A-3\alpha C^4$$
$$-\,4\alpha C^2\beta^2-3B^2C^2\beta-6C^4\beta)/C^2,$$
$$\mathrm{divW}_{412}=-(1/8)L^3(2AC^2\alpha^2-CB\beta-4AC^2\beta\alpha$$
$$+\,2A-AC^4+C\alpha B+2AC^2\beta^2-AC^2+2A^3C^2$$
$$+\,2AB^2C^2+3BC^3\beta-3BC^3\alpha)/C^2,$$
$$\mathrm{divW}_{413}=-L^3(2B^3C^2-BC^2+3AC\alpha+2BC^4$$
$$-\,3AC\beta+AC^3\beta-AC^3\alpha-4C^2\beta\alpha B+2A^2C^2B$$
$$-\,B+2C^2\alpha^2B+2C^2\beta^2B)/(8C^2),$$
$$\mathrm{divW}_{423}=(1/8)L^3(B^2C^2+2C^2-2A^2C^2+2C^4$$
$$-\,2-2C^6-2B^2C^4+A^2C^4)/C^3.$$

Найдем решение системы уравнений $\mathrm{divW}=0$. Рассмотрим уравнение $\mathrm{divW}_{423}=0$ и запишем его в виде

$$2C^6+(2B^2-A^2-2)C^4+(2A^2-2-B^2)C^2+2=0.$$

Заметим, что если $C=1$ данное равенство имеет место лишь при $A=B=0$. В этом случае система уравнений $\mathrm{divW} = 0$ эквивалентна равенству вида $\alpha\beta(\alpha-\beta) = 0$. Откуда учитывая, что $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 0$ получаем два решения $\alpha = \beta > 0$ и $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$.

Если $C \neq 1$, то при заданных ограничениях на структурные константы($C > 0$, $L > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geq 0$) уравнение $\mathrm{divW}_{423} = 0$ не имеет решений удовлетворяющих условиям леммы.

Таким образом, для алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$, где $\alpha \neq 0$, $L > 0$, или $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$, где $\beta > 0$, $L > 0$.

Замечание 2. *Отметим, что для алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$, $\alpha \neq 0, L > 0$ ковариантная производная тензора кривизны $DR = 0$ и, согласно теореме Э. Картана (см., например, [1]) указанная алгебра является локалоно симметрической. В то время как, для алгебры Ли $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L, c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$, $\beta > 0, L > 0$ ковариантная производная тензора кривизны $DR \neq 0$.*

Алгебра $\mathbb{A}_{4,7}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы и заметим, что в рассматриваемом базисе выполнено: $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1214} = \mathrm{W}_{2334}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1224} = -\mathrm{W}_{1334}$, $\mathrm{W}_{1234} = -\mathrm{W}_{1324}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1314} = -\mathrm{W}_{2324}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$. Значит, существенными компонентами тензора Вейля согласно (1) будут

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{1212} = (1/6)B^2 + (1/6)C^2 + (1/3)(A^2 - D^2 - F^2),\\
&\mathrm{W}_{1213} = CD/2,\\
&\mathrm{W}_{1214} = -BD/2,\\
&\mathrm{W}_{1223} = -(3AD + CF)/4,\\
&\mathrm{W}_{1224} = BF/4,\\
&\mathrm{W}_{1234} = BA/2,\\
&\mathrm{W}_{1313} = (1/6)(B^2 + D^2 + F^2) + (1/3)A^2 - (1/3)C^2,\\
&\mathrm{W}_{1314} = BC/2,\\
&\mathrm{W}_{1323} = 3AC/4,\\
&\mathrm{W}_{1414} = (1/6)(C^2 + D^2 + F^2) - (2/3)A^2 - (1/3)B^2,
\end{aligned}
$$

и компоненты дивергенции тензора Вейля согласно (2) примут вид

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{112} = -(9/8)BDA,\\
&\mathrm{divW}_{113} = (1/8)B(9AC - FD),\\
&\mathrm{divW}_{114} = (1/8)A[4(B^2 + F^2) + 13(C^2 + D^2)]\\
&\quad - 2A^3 - (1/8)DCF,\\
&\mathrm{divW}_{123} = -(1/2)B(4A^2 - C^2 - D^2 - B^2),\\
&\mathrm{divW}_{124} = (1/2)C(B^2 + D^2 + C^2) - (11/4)CA^2\\
&\quad + (3/4)FAD,\\
&\mathrm{divW}_{134} = (D/2)(B^2 + C^2 + D^2 + F^2)\\
&\quad - (3/4)ACF - (11/4)DA^2,\\
&\mathrm{divW}_{212} = (1/2)BFA,\\
&\mathrm{divW}_{213} = (1/8)B(F^2 - 8A^2 + 2C^2 + 2D^2 + 2B^2),\\
&\mathrm{divW}_{214} = -3CA^2 + (1/8)CF^2 + (1/4)CB^2\\
&\quad + (9/8)FAD + (1/4)(C^3 + CD^2),\\
&\mathrm{divW}_{223} = -(1/8)B(13AC - 4FD),\\
&\mathrm{divW}_{224} = (1/4)A(D^2 - B^2) - (15/8)AC^2 + AF^2\\
&\quad + (1/2)DCF + A^3,\\
&\mathrm{divW}_{234} = -(17/8)ACD - (1/8)(B^2F + C^2)F\\
&\quad + (1/2)(FD^2 + F^3 - FA^2),\\
&\mathrm{divW}_{312} = (1/8)B(F^2 + 8A^2 - 2C^2 - 2D^2 - 2B^2),\\
&\mathrm{divW}_{313} = -(1/2)BFA,\\
&\mathrm{divW}_{314} = (1/4)D(B^2 + C^2 + D^2 + F^2) - 3DA^2\\
&\quad - (5/8)ACF,\\
&\mathrm{divW}_{323} = -(1/8)B(13AD - CF),\\
&\mathrm{divW}_{324} = -(17/8)AC(D) - (1/8)B^2F - (1/2)FA^2\\
&\quad + (1/4)(FD^2 + F^3),\\
&\mathrm{divW}_{334} = (1/4)A(C^2 - B^2) - (15/8)AD^2 + A^3\\
&\quad - (3/2)AF^2 - (3/8)DCF,\\
&\mathrm{divW}_{412} = (1/8)[3FAD - 2C(A^2 - (1/2)F^2 + B^2\\
&\quad + D^2 + C^2)],\\
&\mathrm{divW}_{413} = -(1/4)D(A^2 + C^2 + B^2 + D^2 + F^2)\\
&(1/8)ACF,\\
&\mathrm{divW}_{423} = -(1/8)F(-C^2 + 2D^2 + 2F^2),\\
&\mathrm{divW}_{424} = (1/8)B(4AD - CF),\\
&\mathrm{divW}_{434} = -(1/8)B(4AC - 3FD).
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F, получим следующие действительные решения:

1. $A \in \mathbb{R}, B = -2A, C = D = F = 0.$
2. $A \in \mathbb{R}, B = 2A, C = D = F = 0.$

Данные решения не удовлетворяет ограничениям леммы, и поэтому для алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,7}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$, $-1 < \beta \leq 1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы. Тогда $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1214} = \mathrm{W}_{2334}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1224} = -\mathrm{W}_{1334}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1314} = -\mathrm{W}_{2324}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$. Учитывая (1), получаем, что существенные компоненты тензора Вейля равны

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{1212} = (1/6)(B^2 + C^2 + 2A^2\beta - 2D^2 - 2F^2\\
&\quad - 2F^2\beta^2 + 4F^2\beta),\\
&\mathrm{W}_{1213} = (1/4)(2CD + AF\beta^2 + AF - 2AF\beta),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_{1214} = -(1/2)BD,\\
&W_{1223} = -(1/4)(AD + CF - CF\beta) - (1/2)A\beta D,\\
&W_{1224} = -(1/4)BF(-1 + \beta),\\
&W_{1234} = (1/2)BA\beta,\\
&W_{1313} = (1/6)(B^2 + D^2 + 2A^2\beta - 2C^2 + F^2\beta^2\\
&+ F^2 - 2F^2\beta),\\
&W_{1314} = (1/2)BC,\\
&W_{1323} = (1/4)CA\beta + (1/2)AC,\\
&W_{1324} = -(1/2)BA,\\
&W_{1414} = -(2/3)A^2\beta + (1/6)(C^2 + D^2 - 2B^2 + F^2\\
&+ F^2\beta^2 - 2F^2\beta).
\end{aligned}
$$

Компоненты дивергенции тензора Вейля в данном базисе согласно (2) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{112} = -(1/8)ABD(5 + 4\beta),\\
&\mathrm{divW}_{113} = (1/8)B(5CA\beta + 4AC - FD + FD\beta),\\
&\mathrm{divW}_{114} = (1/8)(6AC^2 - 8A^3\beta + 2B^2A + 7AD^2\\
&+ 2AF^2 + 7C^2A\beta - 2AF^2\beta + 2AF^2\beta^3 - 2AF^2\beta^2\\
&+ 6AD^2\beta + DCF\beta - A^3\beta^2 - DCF + 2B^2A\beta,\\
&\mathrm{divW}_{123} = (B/2)(C^2 + D^2 + B^2 - A^2(1 + \beta)^2),\\
&\mathrm{divW}_{124} = (1/8)(-4DAF\beta - DAF\beta^2 - 14CA^2\beta\\
&+ 4C(D^2 - A^2 - A^2\beta^2) + 5DAF + 4C^3 + 4B^2C),\\
&\mathrm{divW}_{134} = (1/8)(4DF^2 - 14DA^2\beta + 4DF^2\beta^2 + 4D^3\\
&- 8DF^2\beta - FAC - 1/2A^2\beta^2D + 4DB^2 - 4A^2(D)\\
&+ 4DC^2 - 4FCA\beta + 5FCA\beta^2),\\
&\mathrm{divW}_{212} = (1/8)BAF(\beta + 3)(1 - \beta),\\
&\mathrm{divW}_{213} = -(1/8)B(4A^2 - F^2 - F^2\beta^2 + 2F^2\beta\\
&- 2C^2 + 4A^2\beta - 2D^2 - 2B^2),\\
&\mathrm{divW}_{214} = (1/8)(CF^2\beta^2 - DAF\beta - 4DAF\beta^2\\
&- 14CA^2\beta - 6CA^2\beta^2 + 5DAF + 2C^3 + 2B^2C\\
&+ 2CD^2 - 4A^2C - 2CF^2\beta + CF^2),\\
&\mathrm{divW}_{223} = -(B/8)(9CA\beta + 4AC - 4FD + 4FD\beta),\\
&\mathrm{divW}_{224} = (1/8)(2AD^2 - 6AC^2 - 2B^2A - 9C^2A\beta\\
&+ 7AF^2 - 13AF^2\beta + AF^2\beta^3 + 5AF^2\beta^2 - 4DCF\beta\\
&+ 8A^3\beta^2 + 4DCF),\\
&\mathrm{divW}_{234} = (1/8)(F\beta(B^2 + C^2) - 7DAC - 10DCA\beta\\
&+ 12FA^2\beta^2 - 2FA^2\beta - 4FD^2\beta - 6A^2\beta^3F - 4F^3\beta^3\\
&- 12F^3(\beta - \beta^2) - F(C^2 - 4D^2 + B^2 - 4F^2 + 4A^2)),\\
&\mathrm{divW}_{312} = (1/8)B(F^2 + F^2\beta^2 - 2F^2\beta + 4A^2\beta^2\\
&+ 4A^2\beta - 2C^2 - 2D^2 - 2B^2),\\
&\mathrm{divW}_{313} = (1/8)BAF(\beta + 3)(-1 + \beta),\\
&\mathrm{divW}_{314} = (1/8)(3FCA\beta^2 - 2FAC - 14DA^2\beta\\
&- 6A^2D - 4A^2\beta^2D - FCA\beta + 2DB^2 + 2DC^2\\
&+ 2D^3 + 2DF^2 + 2DF^2\beta^2 - 4DF^2\beta),\\
&\mathrm{divW}_{323} = -(1/8)B(4A\beta D + 9AD - CF + CF\beta),\\
&\mathrm{divW}_{324} = (1/8)(FB^2\beta - 7DCA\beta - 10DAC\\
&+ 6FA^2\beta^2 + 4FA^2\beta - 2FD^2\beta - 4A^2\beta^3F - 2F^3\beta^3\\
&- 6F^3\beta + 6F^3\beta^2 - 6A^2F + 2FD^2 - FB^2 + 2F^3),\\
&\mathrm{divW}_{334} = (1/8)(8A^3\beta - 9AD^2 - 9AF^2 + 2C^2A\beta\\
&+ 15AF^2\beta - 3AF^2(\beta^3 + \beta^2) - 6AD^2\beta + 3DCF\beta\\
&- 3DCF - 2B^2A\beta),\\
&\mathrm{divW}_{412} = (1/8)(3DAF\beta - 3DAF\beta^2 - 2CF^2\beta\\
&+ C(F^2\beta^2 - 2A^2\beta^2 - 2C^2 - 2B^2 + F^2 - 2D^2)),\\
&\mathrm{divW}_{413} = (1/8)(-FAC - 2FCA\beta^2 - 2A^2D\\
&+ 3FCA\beta - 2DC^2 - 2DB^2 - 2D^3 - 2DF^2\\
&- 2DF^2\beta^2 + 4DF^2\beta),\\
&\mathrm{divW}_{424} = (1/8)B(4AD - CF + CF\beta),\\
&\mathrm{divW}_{434} = -(1/8)B(4CA\beta - 3FD + 3FD\beta),\\
&\mathrm{divW}_{423} = (1/8)(\beta - 1)(2FA^2\beta^2 + 2F^3\beta^2 - 4FA^2\beta\\
&- 4F^3\beta + 2FD^2 - FC^2 + 2A^2F + 3DAC + 2F^3).
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F и параметра β, получим следующие действительные решения:

1. $A \in \mathbb{R}, B = C = D = F = 0, \beta = 0.$
2. $A, F \in \mathbb{R}, B = -2A, C = D = 0, \beta = 1.$
3. $A, F \in \mathbb{R}, B = 2A, C = D = 0, \beta = 1.$
4. $A = B = C = D = 0, F \in \mathbb{R}, \beta = 1.$
5. $A = B = C = D = F = 0, \beta \in \mathbb{R}.$

Поскольку при $A > 0$ только третье решение удовлетворяет ограничениям леммы, то для метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = B$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = A$, при $B = 2A > 0$, $\beta = 1$.

Алгебра $\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$, $\alpha > 0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы и заметим, что в указанном базисе имеют место соотношения $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1234} = -W_{1324}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1314} = -W_{2324}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, и $W_{1414} = W_{2323}$. Поэтому существенными компонентами тензора Вейля согласно (1) будут

$$
\begin{aligned}
&W_{1212} = (B^2D^2 + C^2D^2 + 2A^2\alpha^2D^2 - 2F^2D^2\\
&- 2A^2 + A^2D^2 + A^2D^4)/(6D^2),\\
&W_{1213} = (1/2)CF,
\end{aligned}
$$

$\mathrm{W}_{1214} = -(1/2)BF,$
$\mathrm{W}_{1223} = -(1/4)A(3\alpha FD + C)/D,$
$\mathrm{W}_{1224} = -AB(D^2 - 1)/(4D),$
$\mathrm{W}_{1234} = (1/2)BA\alpha,$
$\mathrm{W}_{1313} = (B^2D^2 + F^2D^2 + 2A^2\alpha^2D^2 - 2C^2D^2 + A^2 + A^2D^2 - 2A^2D^4)/(6D^2),$
$\mathrm{W}_{1314} = (1/2)BC,$
$\mathrm{W}_{1323} = (1/4)A(-FD + 3\alpha C),$
$\mathrm{W}_{1414} = (C^2D^2 + F^2D^2 - 2B^2D^2 + A^2 - 2A^2D^2 + A^2D^4 - 4A^2\alpha^2D^2)/(6D^2).$

Компоненты дивергенции тензора Вейля с учетом (2) в рассматриваемом базисе примут вид

$\mathrm{divW}_{112} = -(1/8)AB(9\alpha F + CD),$
$\mathrm{divW}_{113} = (1/8)AB(9\alpha CD - F)/D,$
$\mathrm{divW}_{114} = A(4B^2\alpha D^2 + CD^3F + 13C^2D^2\alpha - 16A^2\alpha^3D^2 + 13\alpha F^2D^2 + 4A^2\alpha - 8A^2\alpha D^2 - CFD + 4\alpha A^2D^4)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{123} = (1/2)B(C^2 + F^2 + B^2 - 4A^2\alpha^2),$
$\mathrm{divW}_{124} = (1/4)(2B^2CD + 2CF^2D - 11A^2\alpha^2DC + 2C^3D - CA^2(D - 2D^3) + 3A^2\alpha F(D^2 + 1))/D,$
$\mathrm{divW}_{134} = (1/4)(D^2(2FB^2 + 2C^2F - 11FA^2\alpha^2 - FA^2 + 2F^3) - 3A^2\alpha(D + D^3)C + 2FA^2)/D^2,$
$\mathrm{divW}_{212} = -(1/2)BA^2\alpha(D^2 - 1)/D,$
$\mathrm{divW}_{213} = (1/8)B(A^2(1 - D^4 - 8\alpha^2D^2) + 2D^2(C^2 + F^2 + B^2))/D^2,$
$\mathrm{divW}_{214} = (5A^2\alpha D^3F + CA^2 + (2C^2 + 2F^2 + 2B^2 - 24A^2\alpha^2 - A^2 + 2A^2D^2)CD^2 + 9A^2\alpha FD)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{223} = -(1/8)AB(13\alpha CD + FD^2 - 4F)/D,$
$\mathrm{divW}_{224} = -A(15C^2D^2\alpha - 2\alpha F^2D^2 + 12\alpha A^2D^4 - 8A^2\alpha - 3CD^3F - 4CFD + 2B^2\alpha D^2 - 8A^2\alpha^3D^2 - 4A^2\alpha D^2)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{234} = A(B^2D^4 - 17D^3F\alpha C - B^2D^2 - C^2D^2 - 4A^2\alpha^2D^2 - 2A^2D^2 + 4A^2 + 4F^2D^2 + 4A^2\alpha^2D^4 - 2C^2D^4 - 2A^2D^6)/(8D^3),$
$\mathrm{divW}_{312} = B(A^2 - A^2D^4 + 8A^2\alpha^2D^2 - 2C^2D^2 - 2F^2D^2 - 2B^2D^2)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{313} = (1/2)B(A^2(D^2 - 1)\alpha)/D,$
$\mathrm{divW}_{314} = (-24FA^2\alpha^2D^2 - 5A^2D\alpha C - FA^2D^2 + FA^2D^4 + 2FB^2D^2 - 9A^2D^3\alpha C + 2C^2FD^2 + 2F^3D^2 + 2FA^2)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{323} = -(1/8)AB(13\alpha FD - C + 4CD^2)/D,$
$\mathrm{divW}_{324} = A(-17D^3F\alpha C - B^2D^2 + B^2D^4 + D^4F^2 - 4A^2\alpha^2D^2 + 2A^2D^4 - 4C^2D^4 - 4A^2D^6 + 2A^2 + 2F^2D^2 + 4A^2\alpha^2D^4)/(8D^3),$
$\mathrm{divW}_{334} = -A(15\alpha F^2D^2 - 2C^2D^2\alpha + 12A^2\alpha - 8\alpha A^2D^4 + 3CFD + 2B^2\alpha D^2 - 8A^2\alpha^3D^2 - 4A^2\alpha D^2 + 4CD^3F)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{412} = -(A^2\alpha D^3F + 2A^2\alpha^2D^2C - CA^2 + (2B^2C + 2CF^2 + 2C^3 - CA^2)D^2 + 2CA^2D^4 - 3A^2\alpha FD)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{413} = -(2FA^2\alpha^2D^2 - A^2D\alpha C - FA^2D^2 - FA^2D^4 + 2C^2FD^2 + 3A^2D^3\alpha C + 2FB^2D^2 + 2F^3D^2 + 2FA^2)/(8D^2),$
$\mathrm{divW}_{423} = A(C^2 + D^2F^2 + 2A^2 + 2A^2D^2 - 2C^2D^2 - 2A^2D^3 - 2F^2 - 2A^2)/(8D^3),$
$\mathrm{divW}_{424} = (1/8)AB(4\alpha FD - C + 3CD^2)/D,$
$\mathrm{divW}_{434} = -(1/8)AB(4\alpha CD + FD^2 - 3F)/D.$

Из уравнения $\mathrm{divW}_{313} = 0$ и ограничений на структурные константы ($A > 0$, $B > 0$, $D > 0$, $\alpha > 0$) получаем, что $D{=}1$. Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ (добавив к нему уравнение $D = 1$) относительно структурных констант A, B, C, D, F и параметра α, получаем следующие действительные решения:

1. $A = B = C = F = 0, D = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $A \in \mathbb{R}, B = C = F = 0, D = 1, \alpha = 0.$
3. $A \in \mathbb{R}, B = -2A\alpha, C = F = 0, D = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$
4. $A \in \mathbb{R}, B = 2A\alpha, C = F = 0, D = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$

При $A > 0$ и $\alpha > 0$ лишь четвертое решение удовлетворяет ограничениям леммы. Следовательно, для метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c_{1,4}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$, $c_{2,4}^3 = -AD$, $c_{3,4}^2 = A/D$, при $A > 0$, $B = 2A\alpha$, $D = 1$, $\alpha > 0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,12}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы. В виду того, что в выбранном базисе: $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1213} = -\mathrm{W}_{2434}$, $\mathrm{W}_{1214} = \mathrm{W}_{2334}$, $\mathrm{W}_{1223} = \mathrm{W}_{1434}$, $\mathrm{W}_{1224} = -\mathrm{W}_{1334}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$, и $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$ заключаем из (1), что существенными компонентами тензора Вейля являются

$\mathrm{W}_{1212} = (1/6)(2DC + D^2 + C^2 - 2F^2 - 2G^2,$
$\mathrm{W}_{1213} = (1/2)FD + (1/4)(FC + BG),$
$\mathrm{W}_{1214} = -91/4)AG,$
$\mathrm{W}_{1223} = -(1/4)(BF + GD) - (1/2)GC,$
$\mathrm{W}_{1224} = 1/4AF,$
$\mathrm{W}_{1313} = (1/6)(F^2 - 2D^2 + C^2 + G^2 - DC,$
$\mathrm{W}_{1323} = (1/2)(BC + BD),$
$\mathrm{W}_{1414} = (1/6)(D^2 + F^2 + G^2 - DC - 2C^2).$

При этом компоненты дивергенции тензора Вейля согласно (2) примут вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{112} = (1/8)AF(3C+5D),\\
&\mathrm{divW}_{113} = (1/8)A(-2C^2+2D^2+7F^2+2G^2,\\
&\mathrm{divW}_{114} = (1/4)(BG^2+3BD^2-3BC^2)\\
&-(1/8)(FGD-7BF^2-4FGC),\\
&\mathrm{divW}_{123} = (5/8)AGF,\\
&\mathrm{divW}_{124} = (4F^2D+F^2C+4D^3+2D^2C+2G^2C\\
&-4(A^2+B^2)(C+D)+2C^3+5FBG)/8,\\
&\mathrm{divW}_{134} = (FCD-BGD-7BGC-FC^2\\
&+4(FD^2-A^2F-B^2F+F^3+FG^2))/8,\\
&\mathrm{divW}_{212} = -(1/8)AG(5C+3D),\\
&\mathrm{divW}_{213} = (5/8)AGF,\\
&\mathrm{divW}_{214} = (1/2)(G^2C-A^2D-A^2C-B^2C+C^3\\
&-B^2D)+(1/8)(G^2D+5FBG)+(1/4)(D^3\\
&+F^2D+DC^2),\\
&\mathrm{divW}_{223} = (1/8)A(2C^2-2D^2+2F^2+7G^2),\\
&\mathrm{divW}_{224} = (1/4)(BF^2-3BD^2+3BC^2)\\
&+(1/8)(7BG^2+4FGD-FGC),\\
&\mathrm{divW}_{234} = (1/8)(4G(G^2-A^2+C^2+F^2-B^2)\\
&-7BFD-BFC-GD^2+GCD),\\
&\mathrm{divW}_{313} = -(1/2)A(2BF+GC),\\
&\mathrm{divW}_{314} = (1/4)(FG^2-5BGC-BGD+A^2F\\
&+F^3-3B^2F+FD^2),\\
&\mathrm{divW}_{323} = -(1/2)A(2BG+FD),\\
&\mathrm{divW}_{324} = (2GC^2-10BFD-6B^2G+2A^2G\\
&-2BFC+2GF^2+2G^3)/8,\\
&\mathrm{divW}_{334} = -(3/8)(3BF^2+3BG^2+FGC+FGD),\\
&\mathrm{divW}_{412} = (2DC^2-2D^3+2C^3-F^2C-2F^2D\\
&+2G^2C+G^2D-2D^2C)/8,\\
&\mathrm{divW}_{413} = (1/8)(FC^2-3BGC-BGD-2B^2F\\
&-FCD+6A^2F-2FD^2-2F^3-2FG^2),\\
&\mathrm{divW}_{414} = (1/8)A(8BF+3GD+9GC),\\
&\mathrm{divW}_{423} = (1/8)(6A^2G-GCD-2GC^2+GD^2\\
&-3BFD-BFC-2B^2G-2GF^2-2G^3,\\
&\mathrm{divW}_{424} = (1/8)(8BG+3FC+9FD),\\
&\mathrm{divW}_{434} = (9/8)A(F^2+G^2).
\end{aligned}$$

Из уравнения $\mathrm{divW}_{213} = 0$ данной системы и ограничений на структурные константы ($A > 0$, $C < 0$, $D > 0$), получаем что $F = 0$ или $G = 0$. Если $F = 0$, то из равенства $\mathrm{divW}_{313} = 0$ и $C < 0$ находим, что $G = 0$. Если $G = 0$, то из $\mathrm{divW}_{323} = 0$ и $D > 0$ заключаем, что $F = 0$. Это означает, что система уравнений $\mathrm{divW} = 0$ имеет решение, только если F и G равны нулю одновременно. Решая приведенную выше систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ (добавив условия $F = 0$ и $G = 0$) относительно структурных констант A, B, C, D, F, G, получим следующие действительные решения:

1. $A = D, B = F = G = 0, C = D, D \in \mathbb{R}$.
2. $A = -D, B = F = G = 0, C = D, D \in \mathbb{R}$.
3. $A, B, D \in \mathbb{R}, C = -D, F = G = 0$.
4. $A = \sqrt{D^2 - B^2}, B, D \in \mathbb{R}, C = D, F = G = 0$.
5. $A = -\sqrt{D^2 - B^2}, B, D \in \mathbb{R}, C = D, F = G = 0$.

Так как при $A > 0$ и $D > 0$ только третье решение удовлетворяет ограничениям леммы, то для метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,12}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если нетривиальные структурные константы имеют вид $c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = A$, $c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = B$, $c^2_{1,4} = -c^1_{2,4} = -D$, где $A > 0$, $D > 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. *Среди четырехмерных действительных неунимодулярных неразложимых алгебр Ли конформно плоскими являются лишь алгебры* $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,5}$ *при* $A, B, C \in \mathbb{R}$, $L > 0$, $\alpha = \beta = 1$; $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,6}$ *при* $A = B = 0$, $C = 1$, $L > 0$, $\alpha = \beta > 0$, *а также* $\mathbb{A}_{4,12}$ *при* $A > 0$, $C = -D$, $D > 0$, $F = G = 0$.

Замечание 4. *Решение систем алгебраических уравнений настоящей работы проводилось с использованием пакетов аналитических расчетов, что позволило оптимизировать вычислительную часть исследования.*

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т. / пер. с англ. — М., 1990.

2. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2008. — Т. 419, № 6.

3. Гладунова О.П., Славский В.В. Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. — 2011. — Т. 14, № 1.

4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых

метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1.

5. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1963. — Т. 32, № 1.

6. Listing M. Conformal Einstein spaces in N-dimensions // Ann. Global Anal. Geom. — 2001. — V. 20.

7. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups //Advances in mathematics. — 1976. — № 21.

8. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces. — Oxford, 1965.