УДК 536.25:519.6

Математическое моделирование двухслойных течений с учетом эффектов Соре и Дюфура на примере точных решений*

Е.В. Резанова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

An Exact Solution for Mathematical Modeling of Two-Layer Flows with Soret and Dufour Effects

E.V. Rezanova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Проводится построение математической модели для описания двухслойных стационарных течений жидкости и газа с учетом испарения. Система снабжена твердыми непроницаемыми границами и находится под действием продольных градиентов температуры. Моделирование проводится на основе уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска с учетом эффектов Соре и Дюфура в верхнем газо-паровом слое. Данные эффекты также учитываются при определении условий тепло- и массопереноса на термокапиллярной границе раздела. Также на границе раздела выполняются кинематическое и динамические условия, а концентрация насыщенного пара определяется исходя из уравнения Клапейрона–Клаузиуса. Расход газа в верхнем слое считается заданной величиной. Построены точные решения системы уравнений, учитывающие влияние продольных градиентов температуры, гравитации, концентрационных и температурных эффектов на структуру течения и интенсивность процесса испарения в системе.

Ключевые слова: математическая модель, свободная граница, испарение, точное решение, эффекты Соре и Дюфура.

This paper presents a mathematical model development for description of the two-layer stationary liquid and gas flows with evaporation. The system is restricted by rigid impenetrable borders and is subjected to longitudinal gradients of temperature. The modeling is performed on the basis of the Navier-Stokes equations in the Oberbeck-Boussinesq approximation with Soret and Dufour effects in the upper gas-vapor layer. These effects are also taken into account when determining heat and mass transfer conditions at the thermocapillary interface. Kinematic and dynamic conditions are also assumed to be fulfilled on the interface. Concentrations of the saturated vapor are defined from the Clapeyron-Clausius equation. The gas flow rate in the upper layer is considered a given value. Exact solutions of equations that take into account the influence of longitudinal temperature gradients, gravity, concentration and temperature effects on the structure of the flows, and evaporation in the system are elaborated.

Key words: mathematical model, free boundary, evaporation, exact solution, Soret and Dufour effects.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-09

Введение. Процессы диффузии легкой примеси в жидкости и испарения в двухслойных системах изучаются довольно давно. На практике встречаются случаи, когда процессы тепло- и массопереноса в жидкостях оказывают взаимное влияние, а потому их требуется изучать особенно тщательно. Эффекты Соре, возникающие в бинарных системах, связаны с молекулярным переносом вещества при наличии в исследуемой среде градиента температур [1]. Под эффектами Дюфура понимают явление возникновения разности температур вследствие разности концентраций компонент смеси [2, 3].

Одним из первых результатов по моделированию двухслойных течений с испарением на основе точных решений, но без учета термокапиллярности границы раздела, является работа [4]. В исследованиях [5, 6] построено точное решение, описывающее конвективные течения жидкости в горизонтальном слое под действием спутного потока

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00163).

газа и исследован механизм контроля течений. Моделирование двухслойных течений жидкости и газа с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела проведено в работах [7–10]. При этом задача о двухслойных течениях решается либо в предположении о недеформируемости границы раздела [7–9], либо в полной постановке [10] при заданном расходе газа.

В настоящей работе исследуются стационарные двухслойные течения жидкости и газа с учетом испарения через границу раздела. Верхняя и нижняя границы канала считаются твердыми и непроницаемыми стенками. Моделирование проводится на основе точных решений типа Бириха системы уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [11]. В верхнем газопаровом слое учитываются эффекты Соре и Дюфура. На верхней твердой границе рассматривается условие для концентрации пара, выражающее отсутствие потока пара.

1. Постановка задачи о двухслойных течениях с учетом испарения. Построение точных решений специального вида. Скорость, распределение температуры и давление в нижнем слое системы определяются из следующей системы уравнений, записанной в безразмерном виде:

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{\partial p_1'}{\partial x}+\frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}), \quad (1)$$

$$u_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}=-\frac{\partial p_1'}{\partial y}+\frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2})+ \quad (2)$$
$$+\frac{Ra}{Re^2 Pr}T_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0, \quad (3)$$

$$u_1\frac{\partial T_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial T_1}{\partial y}=\frac{1}{PrRe}(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}). \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения: u_1, v_1 — проекции вектора скорости жидкости на оси Ox и Oy декартовой системы координат; p_1' — модифицированное давление (отклонение от гидростатического); T_1 — температура жидкости. В качестве характерных выбраны значения параметров жидкости: l — толщина слоя жидкости, u_* — характерная скорость, T_* — характерная температура, $p_* = \rho_1 u_*^2$ — характерное давление, ν_1 — коэффициент кинематической вязкости, β_1 — коэффициент теплового расширения, χ_1 — коэффициент температуропроводности.

В задаче используются следующие безразмерные комплексы: $Re = u_* l/\nu_1$ — число Рейнольдса, $Ra = g\beta_1 T_* l^3/\nu_1\chi_1$ — число Релея, $Pr = \nu_1/\chi_1$ — число Прандтля.

Искомые функции в бинарной смеси (скорость, распределение температуры, концентрация примеси и давление) определяются из следующей системы уравнений:

$$u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p_2'}{\partial x}+\frac{\bar\nu}{Re}(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}), \quad (5)$$

$$u_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial p_2'}{\partial y}+\frac{\bar\nu}{Re}(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2})+ \quad (6)$$
$$+\frac{Ra\bar\beta}{Re^2Pr}T_2+\frac{Ra_d}{RePe_d}C,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=0, \quad (7)$$

$$u_2\frac{\partial T_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial T_2}{\partial y}=\frac{\bar\chi}{PrRe}(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2})+ \quad (8)$$
$$+\frac{\bar\chi\alpha_T}{PrRe}(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}),$$

$$u_2\frac{\partial C}{\partial x}+v_2\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{1}{Pe_d}(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2})+ \quad (9)$$
$$+\frac{\alpha_C}{Pe_d}(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}).$$

Здесь u_2, v_2 — проекции вектора скорости смеси газа и пара на оси Ox и Oy декартовой системы координат; p_2' — модифицированное давление, ($p_2' = p_2 - \rho_2\mathbf{g}\ \cdot \mathbf{x}$); p_2 — давление в верхнем слое; T_2 — температура газа; C — концентрация примеси (пара) в газе. Введены также следующие безразмерные комплексы: $Ra_d = g\gamma l^3/\nu_1 D$ — число Релея диффузионное, $Pe_d = u_* l/D$ — число Пекле диффузионное, $\alpha_T = \delta/T_*$ и $\alpha_C = \alpha T_*$, где D — коэффициент диффузии, γ — концентрационный коэффициент плотности, коэффициенты δ и α определяют эффекты Дюфура и термодиффузии (Соре). Параметры $\bar\rho = \rho_2/\rho_1$, $\bar\nu = \nu_2/\nu_1$, $\bar\chi = \chi_2/\chi_1$, $\bar\beta = \beta_2/\beta_1$ также являются безразмерными. Отметим, что аномальная термодиффузия характеризуется отрицательными значениями параметра α.

Точные решения, описывающие исследуемые процессы как в нижнем, так и в верхнем слоях системы, имеют следующий вид:

$$u_i = u_i(y),\ \ v_i = 0,\ \ C = (b_1 + b_2 y)x + \phi(y), \quad (10)$$

$$T_i = (A + a_2^i y)x + \vartheta_i(y),\ \ i = 1, 2, \quad (11)$$

т.е. только продольная составляющая скорости отлична от нуля, а температура и концентрация пара линейно зависят от горизонтальной координаты.

1.1. Общая схема нахождения точного решения в жидком слое. Продифференцируем уравнение (1) по x, а уравнение (2) — по y. Учитывая, что смешанные производные функции p_1' равны, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u_1(y)$, решением которого является следующее выражение:

$$u_1 = \frac{Ra}{PrRe}(a_2^1\frac{y^4}{24} + A\frac{y^3}{6}) + c_1\frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3. \quad (12)$$

Путем подстановки полученной функции скорости (12) в уравнение (4) определим распределение температуры в жидкости

$$T_1 = (A + a_2^1 y)x + \frac{y^7}{42}\{Ra\frac{a_2^1}{24}a_2^1\}+ \quad (13)$$
$$+\frac{y^6}{30}\{Ra\frac{A}{24}a_2^1 + Ra\frac{a_2^1}{6}A\}+$$
$$+\frac{y^5}{20}\{Ra\frac{A}{6}A + PrRe\frac{c_1 a_2^1}{2}\}+$$
$$+\frac{y^4}{12}\{PrRe\frac{c_1 A}{2} + PrRec_2 a_2^1\}+$$
$$\frac{y^3}{6}\{PrRec_2A + PrRec_3 a_2^1\} + \frac{y^2}{2}PrRec_3A + y\,c_4 + c_5.$$

Для нахождения функции давления проинтегрируем (1) и подставим результат в (2). Используя выражения (12) и (13), получим уравнение, определяющее изменение модифицированного давления p_1' в жидком слое

$$p_1' = \frac{1}{Re}(\frac{Ra}{PrRe}(Ay + a_2^1\frac{y^2}{2}) + c_1)x + \frac{y^8}{8}k_7+ \quad (14)$$
$$+\frac{y^7}{7}k_6 + \frac{y^6}{6}k_5 + \frac{y^5}{5}k_4 + \frac{y^4}{4}k_3 + \frac{y^3}{3}k_2 + \frac{y^2}{2}k_1 + yk_0 + \widetilde{c_3}.$$

Здесь c_i $(i = 1, ..., 5)$, $\tilde{c}_3$ — произвольные постоянные, подлежащие определению с помощью граничных условий. Константы k_i $(i = 0, ..., 7)$ выражаются через c_i.

Таким образом, определены точные решения системы (1)–(4).

1.2. Общая схема нахождения точного решения в газовом слое. Для определения функции скорости в верхнем слое газа продифференцируем соотношения (5) и (6) по x и по y соответственно. Воспользовавшись равенством смешанных производных функции p_2', получим уравнение для определения $u_2(y)$, решением которого является функция

$$u_2 = \frac{y^3}{6}(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_1)+ \quad (15)$$
$$+\frac{y^4}{24}(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}a_2^2 + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_2)\overline{c}_1\frac{y^2}{2} + \overline{c}_2 y + \overline{c}_3.$$

Температура и концентрация примеси в верхнем слое определяются из уравнений (8) и (9). Используя формулы (10) и (11) и домножая (8) на D, а (9) на $\chi_2\delta$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение, задающее распределение температуры вида

$$T_2 = (A + a_2^2 y)x + \frac{y^7}{1008}f_1(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}a_2^2 + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_2)+ \quad (16)$$
$$+\frac{y^6}{720}[f_2(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}a_2^2 + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_2)+$$
$$+4f_1(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_1)]+$$
$$+\frac{y^5}{120}[f_2(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_1) + 3f_1\overline{c}_1]+$$
$$+\frac{y^4}{24}[f_2\overline{c}_1 + 2f_1\overline{c}_2] + \frac{y^3}{6}[f_2\overline{c}_2 + f_1\overline{c}_3]+$$
$$+\frac{y^2}{2}f_2\overline{c}_3 + y\overline{c}_4 + \overline{c}_5.$$

Точное решение для концентрации пара находится с помощью соотношения (9), а также формул (15) и (16)

$$C = (b_1 + b_2 y)x + \frac{y^7}{1008}\{\frac{RaPe_d}{RePr}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}b_2 a_2^2 + Ra_d\frac{1}{\bar{\nu}}(b_2)^2- \quad (17)$$
$$-\alpha_C f_1(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}a_2^2 + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_2)\}+$$
$$+\frac{y^6}{720}\{\frac{RaPe_d}{RePr}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}(b_1 a_2^2 + 4b_2 A) + 5Ra_d\frac{1}{\bar{\nu}}b_1 b_2-$$
$$-\alpha_C[f_2(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}a_2^2 + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_2)+$$
$$4f_1(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_1)]\}+$$
$$+\frac{y^5}{120}\{\frac{RaPe_d}{RePr}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}b_1 A + Ra_d\frac{1}{\bar{\nu}}(b_1)^2) + Pe_d b_2\overline{c}_1-$$
$$-\alpha_C[f_2(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\nu}}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar{\nu}}b_1) + 3f_1\overline{c}_1]\}+$$
$$+\frac{y^4}{24}\{Pe_d b_1\overline{c}_1 + 2Pe_d b_2\overline{c}_2 - \alpha_C[f_2\overline{c}_1 + 2f_1\overline{c}_2]\}+$$
$$+\frac{y^3}{6}\{Pe_d b_1\overline{c}_2 + Pe_d b_2\overline{c}_3 - \alpha_C[f_2\overline{c}_2 + f_1\overline{c}_3]\}+$$
$$+\frac{y^2}{2}\{Pe_d b_1\overline{c}_3 - \alpha_C f_2\overline{c}_3\} + y\overline{c}_6 + \overline{c}_7.$$

Выражение для модифицированного давления p_2' выстраивается путем интегрирования уравнения (5) и подстановки полученного соотношения в (6). Решением данного уравнения с учетом формул (15), (16) и (17) является следующее выражение:

$$p_2' = \frac{\bar\rho\bar\nu}{Re}(\frac{Ra}{RePr}\frac{\bar\beta}{\bar\nu}(Ay + a_2^2\frac{y^2}{2}) + \qquad (18)$$

$$+\frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar\nu}(b_1 y + b_2\frac{y^2}{2})\} + \bar c_1)x + \frac{y^8}{8}\bar k_7 + \frac{y^6}{6}\bar k_5 +$$

$$+\frac{y^7}{7}\bar k_6 + \frac{y^5}{5}\bar k_4 + \frac{y^4}{4}\bar k_3 + \frac{y^3}{3}\bar k_2 + \frac{y^2}{2}\bar k_1 + y\bar k_0 + \widetilde{c_4}.$$

Здесь $f_1 = \dfrac{PrRea_2^2 - \bar\chi\alpha_T Pe_d b_2}{\bar\chi(1-\alpha_T\alpha_C)}$, $f_2 = \dfrac{PrReA - \bar\chi\alpha_T Pe_d b_1}{\bar\chi(1-\alpha_T\alpha_C)}$, а $\bar c_i$ $(i = 1,..,7)$ — произвольные постоянные, подлежащие определению; $\bar k_i$ $(i = 0, ..., 7)$ выражаются через $\bar c_i$.

Константы интегрирования, возникающие в ходе поиска решений систем (1)–(4) и (5)–(9), должны быть найдены из условий, определяющих поведение системы на твердых и свободной границах.

2. Граничные условия. Скорость на верхней $y = h$ и нижней $y = -1$ твердых непроницаемых границах должна удовлетворять условиям прилипания: $u_2(h) = 0$, $u_1(-1) = 0$. Температура на твердых границах распределена линейно относительно продольной координаты: $T_{1\,|\,y=-1} = A_1 x + \vartheta^-$, $T_{2\,|\,y=h} = A_2 x + \vartheta^+$. Константы A, $A_1 = A + a_2^1(-1)$, $A_2 = A + a_2^2 h$ определяют продольные градиенты температур. Для концентрации пара на верхней твердой границе $y = h$ выполняется условие нулевого потока пара: $\dfrac{\partial C}{\partial y}|_{y=h} = 0$. На границе раздела сред полагаются выполненными условия непрерывности скорости и температуры: $u_1(0) = u_2(0)$, $T_1|_{y=0} = T_2|_{y=0}$. На границе выполняется условие: $\dfrac{\partial T_1}{\partial y} - \bar\kappa\dfrac{\partial T_2}{\partial y} - \alpha_T\bar\kappa\dfrac{\partial C}{\partial y}|_{y=0} = -\bar\lambda M$. Здесь M выражает массу жидкости, испаряющейся с единицы площади поверхности в единицу времени (безразмерная величина), $\bar\kappa = \kappa_2/\kappa_1$, а κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности в жидкости и газе, соответственно; $\bar\lambda = \dfrac{\lambda M_* l}{\kappa_1 T_*}$. Уравнение баланса масс на границе раздела имеет следующий вид: $\alpha_M M = -(\dfrac{\partial C}{\partial y}|_{y=0} + \alpha_C\dfrac{\partial T_2}{\partial y}|_{y=0})$, где $\alpha_M = \dfrac{M_* l}{D\rho_2}$. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса определяет концентрацию насыщенного пара [4, 9, 10]. Для не слишком больших значений T_2 может быть использовано линеаризованное уравнение: $C|_{y=0} = C_*[1 + \varepsilon(T_2|_{y=0} - T_0)]$, $\varepsilon = \dfrac{\lambda\mu}{RT_0^2 T_*}$. Здесь C_* — концентрация насыщения пара при $T_2 = 0$; μ — молекулярный вес испаряющейся жидкости; R — газовая постоянная; T_0 — температура, принятая за начало отсчета (например, $20\,^0C$). Кроме того, на границе раздела должны выполняться кинематическое и динамическое условия. Первое выполняется автоматически, исходя из вида функции скорости (см. (10)). Проекция динамического условия на касательный вектор в безразмерном виде записывается следующим образом: $u_{1\,y} = \bar\rho\bar\nu u_{2\,y} + \dfrac{Ma}{RePr}\dfrac{\partial T_2}{\partial x}$, где $Ma = \dfrac{\sigma_T T_* l}{\rho_1\nu_1}$, σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения σ. Проекция динамического условия на нормаль имеет следующий вид: $p_1 = p_2$. Постоянная величина Q определяет расход газа в верхнем газо-паровом слое согласно следующей формуле: $\int_0^h u_2 dy = Q$. С помощью заданных сформулированных условий определяются все константы c_i, $\overline{c_i}$, M_0 $(i = 1, ..., 5)$ для нахождения профилей скорости и температуры для обеих сред и концентрации пара в газе (см. (12), (13), (15), (16), (17)).

3. Определение констант интегрирования. Из условия нулевого потока пара $\dfrac{\partial C}{\partial y}|_{y=h} = 0$ следует, что коэффициент $b_2 = 0$. Выполнение условия баланса масс на границе раздела влечет за собой равенство $a_2^2 = 0$, а вследствие условия теплопереноса и $a_2^1 = 0$. Тогда, исходя из условий на твердых границах для температуры, получаем равенство продольных градиентов температуры: $A = A_1 = A_2$. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса определяет выражение для вычисления коэффициента b_1: $b_1 = C_*\varepsilon A$. Вследствие непрерывности скорости и температуры на границе раздела сред выполняются следующие соотношения: $c_3 = \bar c_3$, $c_5 = \bar c_5$. Выполнение динамических условий влечет равенства $c_1 = \bar\rho\bar\nu\bar c_1$ и $c_2 = \bar\rho\bar\nu\bar c_2 + \dfrac{Ma}{RePr}A$. Из уравнения баланса масс следует также $M = -\dfrac{1}{\alpha_M}\bar c_6 - \dfrac{\alpha_C}{\alpha_M}\bar c_4$, а из условия теплопереноса получим $\bar c_6 = \dfrac{\alpha_M}{\bar\lambda + \alpha_T\alpha_M\bar\kappa}c_4 - \dfrac{\bar\kappa\alpha_M + \alpha_C\bar\lambda}{\bar\lambda + \alpha_T\alpha_M\bar\kappa}\bar c_4$. Переменная $\bar c_7$ может быть определена из выражения $\bar c_7 = C_*[1 + \varepsilon(c_5 - T_0)]$, продиктованного уравнением Клапейрона-Клаузиуса.

Коэффициенты $\bar c_i$, $i = \overline{1,3}$ можно определить из следующей системы уравнений:

$$\frac{1}{2}\bar\rho\bar\nu\bar c_1 - \bar\rho\bar\nu\bar c_2 + \bar c_3 = \frac{1}{6}\frac{Ra}{RePr}A + \frac{Ma}{RePr}A$$

$$\frac{h^2}{2}\bar c_1 + h\bar c_2 + \bar c_3 = -\frac{h^3}{6}(\frac{Ra}{RePr}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar\nu}b_1)$$

$$\frac{h^3}{6}\bar c_1 + \frac{h^2}{2}\bar c_2 + h\bar c_3 = Q - \frac{h^4}{24}(\frac{Ra}{RePr}A + \frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar\nu}b_1).$$

С найденными $\bar c_i$, $i = \overline{1,3}$, а следовательно, и c_i, $i = \overline{1,3}$ неизвестные $c_4, c_5, \bar c_4$ вычисляются из следующей системы:

$$-c_4+c_5=\vartheta^- - \frac{1}{20}\frac{Ra}{6}A^2+\frac{1}{12}\frac{1}{2RePr}Ac_1-$$
$$-\frac{1}{6}\frac{1}{RePr}Ac_2+\frac{1}{2}\frac{1}{RePr}Ac_3$$

$$h\overline{c}_4+c_5=\vartheta^+ - \frac{h^5}{120}f_2(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar\beta}{\bar\nu}A+\frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar\nu}b_1)-$$
$$-\frac{h^4}{24}f_2\overline{c}_1-\frac{h^3}{6}f_2\overline{c}_2-\frac{h^2}{2}f_2\overline{c}_3,$$

$$-\frac{\alpha_M}{\bar\lambda+\alpha_T\alpha_M\bar\kappa}c_4+\frac{\alpha_M\bar\kappa+\bar\lambda\alpha_C}{\bar\lambda+\alpha_T\alpha_M\bar\kappa}\bar c_4=$$
$$=\frac{h^4}{24}\{\frac{RaPe_d}{RePr}\frac{\bar\beta}{\bar\nu}b_1A+Ra_d\frac{1}{\bar\nu}(b_1)^2)-$$
$$-\alpha_C[f_2(\frac{Ra}{PrRe}\frac{\bar\beta}{\bar\nu}A+\frac{Ra_d}{Pe_d}\frac{1}{\bar\nu}b_1)]\}+$$
$$+\frac{h^3}{6}\{Pe_db_1\overline{c}_1-\alpha_Cf_2\overline{c}_1\}+\frac{h^2}{2}\{Pe_db_1\overline{c}_2-\alpha_Cf_2\overline{c}_2\}+$$
$$+h\{Pe_db_1\overline{c}_3-\alpha_Cf_2\overline{c}_3\}.$$

Таким образом, вычисляются все коэффициенты, определяющие зависимости искомых функций от пространственных переменных.

Заключение. Построенные точные решения позволяют исследовать течения в двухслойных системах с учетом испарения с границы раздела. Эффекты Соре и Дюфура влияют на распределение температуры в жидкости и газе, концентрацию пара в верхнем слое системы, а также массу испаряющейся жидкости. Расход газа также влияет на структуру течения и интенсивность процесса испарения.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю О.Н. Гончаровой за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. — М., 2008.

2. Гроот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. — М., 1956.

3. Liu J., Ahlers G. Rayleigh-Bennard covection in binary-gas mixtures: Thermophysical propreties and the onset of convection // Physical Review E. — 1997. — Vol. 55, № 6.

4. Шлиомис М.И., Якушин В.И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Гидродинамика. — 1972.

5. Гончарова О.Н., Кабов О.А. Гравитационно-термокапиллярная конвекция жидкости в горизонтальном слое при спутном потоке газа // Доклады Академии Наук. — 2009. — Т. 426, № 2.

6. Goncharova O.N., Kabov O.A. Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow // Int. Journal of Heat and Mass Transfer — 2010. — Vol. 53.

7. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений. Часть 1 // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1/1(77).

8. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Моделирование двухслойных течений с учетом испарения на границе раздела на основе точных решений. Часть 2 // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1/2(77). DOI:10.14258/izvasu(2013)1.2-03.

9. Goncharova O.N., Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fuid fows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer (IHMT). — 2013. — Vol. 1.

10. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — № 2.

11. Бирих Р.В О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. — 1966. — № 3.