УДК 512.54.01

Об одном классе Леви экспоненты $2p$

В.В. Лодейщикова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия)

On a Levi Class of Exponent $2p$

V.V. Lodeyshchikova

Altai State University (Barnaul, Russia)
Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)

Настоящая работа продолжает исследования классов Леви. В ней дано описание класса Леви, порожденного многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p — простое число, $p \neq 2$).

Покрытием группы G называется всякая такая система подгрупп этой группы, что теоретико-множественное объединение этих подгрупп совпадает с G. Исследование влияния свойств покрытия на строение самой группы — одно из актуальных направлений теории групп. Особый интерес представляет изучение свойств группы G, которые следуют из свойств групп некоторого покрытия группы G. Для произвольного класса групп M обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любого элемента из G принадлежит M. Класс $L(M)$ групп называется классом Леви, порожденнным M. Изучение классов Леви следует рассматривать как шаг в направлении исследования строения групп, покрываемых системой нормальных подгрупп.

Классы Леви были введены под влиянием работы Ф. Леви, в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями. Р.Ф. Морс доказал, что если M — многообразие групп, то $L(M)$ — также многообразие групп. Из работ А.И. Будкина следует, что если M — квазимногообразие групп, то $L(M)$ также является квазимногообразием групп. Ранее автором найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (за исключением одного).

Ключевые слова: группа, многообразие, квазимногообразие, метабелева группа, класс Леви.

In this paper, a further study of the Levi classes is presented. The Levi class generated by the variety of exponent $2p$ groups with the commutant exponent p and commuting squares of elements (p is a prime, $p \neq 2$) are described.

A cover for a group G is a collection of G subgroups which set-theoretic union is G. A study of the influence of the cover properties on the group structure is one of the important directions of a group theory. The study of group G properties inherited from the groups properties of a certain cover of group G is of special interest. For an arbitrary class of groups M a class of all groups G where the normal closure of every element of G belongs to M is denoted by $L(M)$. The class $L(M)$ is called the Levi class generated by M. Study of Levi classes should be considered as a step towards studying the structure of the groups covered by a system of normal subgroups.

Levi classes were introduced under the influence of Levi's article where Levi gave the classification of groups with abelian normal closures. R.F. Morse proved that if the class M is a variety of groups then $L(M)$ is also a variety of groups. According to research of A.I. Budkin it follows that if M is a quasivariety then $L(M)$ is also a quasivariety of groups. Earlier, author found the descriptions of Levi classes generated by the almost Abelian quasivarieties of nilpotent groups (except one).

Key words: group, variety, quasivariety, metabelian group, Levi class.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-07

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ групп называется *классом Леви, порожденнным* $\mathcal{M}$. Классы Леви были введены в [1] под влиянием работы [2],

в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. В [3] доказано, что если $\mathcal{M}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ — также многообразие групп. Из [4] следует, что если $\mathcal{M}$ квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием групп.

Как обычно, $var\mathcal{K}$ — многообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$, $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$ (пишем $varG$ и qG, если $\mathcal{K} = \{G\}$). Обозначим через $\mathcal{N}_c$ многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, через $F_n(\mathcal{M})$ — свободную группу в квазимногообразии $\mathcal{M}$ ранга n. Всюду в работе при написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будут опускаться.

В [4] установлено, что если $\mathcal{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В действительности в доказательстве этого результата отсутствие элементов порядка 5 нужно было только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(q\mathcal{K})$ нильпотентна класса ≤ 4, поэтому в [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

В работе [6] А.И. Будкиным доказано, что если $\mathcal{M}$ — нильпотентное квазимногообразие, $\overline{\mathcal{M}}$ — множество всех конечно-порожденных групп из $\mathcal{M}$, то выполняется равенство $L(q\overline{\mathcal{M}}) = qL(\overline{\mathcal{M}})$. Там же установлено, что если $\mathcal{N}$ — класс всех конечно-порожденных нильпотентных групп, $\mathcal{N}_0$ — класс всех конечно-порожденных нильпотентных групп без кручения, то аналогичное утверждение неверно, и справедливы строгие включения $q\mathcal{N}_0 \subset L(q\mathcal{N}_0)$ и $q\mathcal{N} \subset L(q\mathcal{N})$, откуда, в частности, следуют неравенства $L(q\mathcal{N}_0) \neq qL(\mathcal{N}_0)$ и $L(q\mathcal{N}) \neq qL(\mathcal{N})$.

В [6] также показано, что квазимногообразия $L(q\mathcal{N})$, $L(q\mathcal{N}_0)$ замкнуты относительно свободных произведений, каждое из этих квазимногообразий содержит не более одного максимального собственного подквазимногообразия и что если квазимногообразие $\mathcal{M}$ замкнуто относительно свободных произведений, то таковым же является квазимногообразие $L(\mathcal{M})$.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в $\mathcal{N}_2$:

$$H_p = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = 1),$$

$$H_{p^s} = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1),$$

где $s \in \mathbb{N}$, p — простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(\mathcal{N}_2)$ (p — простое число), представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т.е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). В работах [7–9] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая $L(qH_2)$).

В [9] доказано, что если $\mathcal{K}$ — произвольный класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n (n — фиксированное натуральное число, $n \geq 2$) с коммутантами экспоненты 2 и в каждой группе из $\mathcal{K}$ элементы порядка 2^m $(0 < m < n)$ содержатся в центре этой группы, то класс Леви, порожденный квазимногообразием $q\mathcal{K}$, совпадает с многообразием нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n.

Также в [9] было доказано существование класса $\mathcal{K}$ такого, что $\mathcal{K}$ — класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 8 с коммутантами экспоненты 2 и во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

В [10] установлено существование класса $\mathcal{K}$ такого, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4.

Настоящая работа продолжает исследования классов Леви. В ней дано описание класса Леви, порожденного многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p – простое число, $p \neq 2$).

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$. Будем рассматривать группу

$$A = \mathrm{gr}(a, b | a^2 = 1, b^p = 1, a^{-1}ba = b^{-1}).$$

Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие групп, заданное тождествами

$$x^{2p} = 1, \tag{1}$$

$$[x^2, y^2] = 1, \tag{2}$$

$$[x, y]^p = 1. \tag{3}$$

Через $\mathcal{M}$ обозначим многообразие, задаваемое тождеством (1) и формулами

$$[x, y, x]^p = 1, \tag{4}$$

$$[(x^y)^2, (x^z)^2] = 1, \tag{5}$$

$$[x^u, x^v, (x^z)^2] = 1, \tag{6}$$

$$[x^u, x^v, [x^y, x^z]] = 1. \tag{7}$$

Основными результатами настоящей статьи являются следующие.

Лемма 1. *Многообразие, порожденное группой A, совпадает с многообразием $\mathcal{N}$.*

Теорема 1. *Класс Леви, порожденный многообразием $\mathcal{N}$, совпадает с многообразием $\mathcal{M}$.*

Напомним некоторые определения и обозначения. Как обычно, $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$, $x^g=g^{-1}xg$, $[x,y,z]=[[x,y],z]$, $\mathrm{gr}(a_1,a_2,\ldots)$ — группа, порожденная элементами $a_1,a_2,\ldots$, $(x)^G=\mathrm{gr}(x^g\mid g\in G)$ — нормальное замыкание элемента x в группе G.

Будем использовать следующие хорошо известные тождества, истинные в любой группе:

$$[xy,z]=[x,z]^y[y,z], \tag{8}$$

$$[x,yz]=[x,z][x,y]^z, \tag{9}$$

$$[u^x,v^y]=\left[u,v^{yx^{-1}}\right]^x, \tag{10}$$

$$[x,y]^z=[x^z,y^z], \tag{11}$$

$$(u\cdot v)^2=u^2v^2[v,u]^v, \tag{12}$$

$$[xy,zt]=[x,t]^y[y,t][x,z]^{yt}[y,z]^t. \tag{13}$$

С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [11, 12], а теории квазимногообразий — в [13–16].

Замечание 1. *Если в группе G истинно тождество* (2)*и $G^2=\mathrm{gr}(x^2\mid x\in G)$, то G/G^2 — абелева группа. Отсюда группа G — метабелева и в группе G истинны тождества*

$$[x,y,[u,v]]=1, \tag{14}$$

$$[x,y,z^2]=1. \tag{15}$$

Доказательство леммы 1. Сначала покажем, что $varA\subseteq\mathcal{N}$. Рассмотрим произвольную группу $G\in varA$. Ясно, что тождества (1) и (3) истинны в группе A, следовательно, истинны в любой группе, принадлежащей $varA$. Заметим, что A^2 — абелева группа. Поэтому в группе A истинно тождество (2). Значит, оно будет истинно и в группе G. Таким образом, $varA\subseteq\mathcal{N}$.

Поскольку группа A — конечная, то в ней все силовские подгруппы абелевы и все монолитические факторы группы A изоморфно вкладываются в A, то из [17] следует равенство

$$qA=varA.$$

Далее покажем, что $\mathcal{N}\subseteq varA$. Всякое многообразие порождается множеством всех своих конечно порожденных групп. Следовательно, достаточно показать, что любая конечно порожденная группа $G\in\mathcal{N}$ принадлежит классу $varA$. Заметим, что из истинности тождества (2) следует, что G — метабелева группа. Значит, можно считать, что G — конечная группа.

Также можно считать, что группа G неабелева и подпрямо неразложимая. Рассмотрим множество

$$V=\{x\in G|x^p=1\}.$$

Нетрудно показать, что множество V является группой и $V=Syl_p(G)$ — силовская p-подгруппа группы G. Пусть $B=Syl_2(G)$. На группу V можно смотреть как на векторное пространство над полем из p элементов. Возникает естественное представление группы B линейными преобразованиями векторного пространства V над полем $\mathbb{Z}_p$. По теореме Машке данное представление вполне приводимо. Значит,

$$V=V_1\oplus\ldots\oplus V_l,$$

где V_i – неприводимое подпространство векторного пространства V. Поскольку группа G подпрямо неразложимая, то получаем, что $l=1$ и

$$G=V_1\cdot B.$$

Рассмотрим $C=C_B(V)$ — централизатор подгруппы V в группе B. Поскольку C — нормальная подгруппа в группе B и B/C обладает точным неприводимым представлением, то ее центр $Z(B/C)$ — циклический [18, теорема 2.2]. Поскольку $C\cap V=(1)$ и группа G подпрямо неразложимая, то $C=(1)$. Следовательно, центр $Z(B)$ — циклический. Таким образом получаем, что B — циклическая группа.

Пусть $B=(s)$. Рассмотрим $x\in V$. Покажем что $V=(x)$ — циклическая группа. Заметим, что из истинности в группе G тождества (2) следует истинность квазитождества

$$x^p=1\ \&\ y^p=1\to[x,y]=1$$

в группе G. Значит, $(x\cdot x^s)^s=x^s\cdot x=x\cdot x^s$, т.е. $(x\cdot x^s)\lhd G$. Если $x\cdot x^s\neq1$, то $(x\cdot x^s)=V$ и поскольку $[x\cdot x^s,s]=1$, то группа G — абелева, что не так.

Следовательно, $x\cdot x^s=1$ и $V=(x)$ — циклическая группа. В этом случае отображение $a\to s$, $b\to x$ продолжаемо до изоморфизма группы G на A. Значит, $G\in varA$ и $\mathcal{N}\subseteq varA$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть в группе G истинны тождества* (5)–(7). *Тогда в группе G истинны тождества*

$$[x^{z_{k+1}},x^{z_1}\cdot\ldots\cdot x^{z_k},(x^y)^2]=1, \tag{16}$$

$$[(x^{y_1})^2,(x^{z_1}\cdot\ldots\cdot x^{z_k})^2]=1, \tag{17}$$

$$[x^y,x^{z_1}\cdot\ldots\cdot x^{z_k},[x^{y_n},x^{y_1}]]=1, \tag{18}$$

$$[x^{y_n},x^{y_1},(x^{z_1}\cdot\ldots\cdot x^{z_k})^2]=1, \tag{19}$$

где k и n пробегают множество натуральных чисел.

Доказательство индукцией по k. Сначала докажем истинность в группе G тождества (16). Так как в группе G истинно тождество (6), то для $k=1$ формула (16) верна. Предположим, что в группе G верна формула

$$[x^{z_{k+1}}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}, (x^u)^2] = 1.$$

Из истинности в группе G тождества (6) следует, что

$$[x^{z_{k+1}}, x^{z_k}, (x^y)^2] = 1.$$

Тогда, применяя предположение индукции и тождества (8), (9) и (10), имеем

$$[x^{z_{k+1}}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}} \cdot x^{z_k}, (x^y)^2] =$$

$$= [[x^{z_{k+1}}, x^{z_k}][x^{z_{k+1}}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}, (x^y)^2] =$$

$$= [x^{z_{k+1}}, x^{z_k}, (x^y)^2]^{h_1} \cdot$$

$$\cdot [[x^{z_{k+1}}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}, (x^y)^2] =$$

$$= \left[x^{z_{k+1}}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}, \left(x^{y(x^{z_k})^{-1}}\right)^2\right]^{x^{z_k}} = 1,$$

где $h_1 = [x^{z_{k+1}}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}$.

Теперь докажем истинность в группе G тождества (17). Так как в группе G истинно тождество (5), то для $k = 1$ формула (17) верна.

Пусть в группе G истинно тождество

$$[(x^{y_1})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2] = 1.$$

Поскольку в группе G истинно тождество (5), то будет верно равенство

$$[(x^{y_1})^2, (x^{z_k})^2] = 1.$$

Используя предположение индукции, тождества (9), (10), (12), (16), получим:

$$[(x^{y_1})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}} \cdot x^{z_k})^2] =$$

$$= [(x^{y_1})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2 (x^{z_k})^2 \cdot h_2] =$$

$$= [(x^{y_1})^2, h_2] \cdot [(x^{y_1})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2 \cdot (x^{z_k})^2]^{h_2} =$$

$$= [[x^{z_k}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}, (x^{y_1})^2]^{-1} \cdot [(x^{y_1})^2, (x^{z_k})^2]^{h_2} \cdot$$

$$\cdot [(x^{y_1})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2]^{(x^{z_k})^2 h_2} = 1,$$

где $h_2 = [x^{z_k}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}$.

Далее докажем истинность в группе G тождества (18). Так как в группе G истинно тождество (7), то для $k = 1$ формула (18) верна.

Пусть в группе G истинно тождество

$$[x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}, [x^u, x^v]] = 1.$$

Поскольку в группе G истинно тождество (7), то будет верно равенство

$$[x^y, x^{z_k}, [x^{y_n}, x^{y_1}]] = 1.$$

Применяя предположение индукции для $u = y_n(x^{z_k})^{-1}$ и $v = y_1(x^{z_k})^{-1}$, получим равенство:

$$[x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}, [x^{y_n(x^{z_k})^{-1}}, x^{y_1(x^{z_k})^{-1}}]] = 1.$$

Используя тождества (8), (9), (10) и (11), получим:

$$[x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}} \cdot x^{z_k}, [x^{y_n}, x^{y_1}]] =$$

$$= [[x^y, x^{z_k}][x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}, [x^{y_n}, x^{y_1}]] =$$

$$= [x^y, x^{z_k}, [x^{y_n}, x^{y_1}]]^{h_3} \cdot$$

$$\cdot [[x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}, [x^{y_n}, x^{y_1}]] =$$

$$= [x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}, [x^{y_n}, x^{y_1}]^{(x^{z_k})^{-1}}]^{x^{z_k}} =$$

$$= [x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}, [x^{y_n(x^{z_k})^{-1}}, x^{y_1(x^{z_k})^{-1}}]]^{x^{z_k}} = 1,$$

где $h_3 = [x^y, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}$.

Так как в группе G истинно тождество (6), то для $k = 1$ формула (19) верна.

Пусть в группе G истинно тождество

$$[x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2] = 1.$$

Поскольку в группе G истинно тождество (6), то будет верно равенство

$$[x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_k})^2] = 1.$$

Используя предположение индукции и тождества (9), (10), (11), (12), (18), получим

$$[x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}} \cdot x^{z_k})^2] =$$

$$= [x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2 (x^{z_k})^2 \cdot h_4] =$$

$$= [x^{y_n}, x^{y_1}, [x^{z_k}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}] \cdot$$

$$\cdot [x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2 \cdot (x^{z_k})^2]^{h_4} =$$

$$= [[x^{z_k}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}, [x^{y_n}, x^{y_1}]]^{-1} \cdot$$

$$\cdot [x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_k})^2]^{h_4} \cdot$$

$$\cdot [x^{y_n}, x^{y_1}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2]^{(x^{z_k})^2 h_4} = 1,$$

где $h_4 = [x^{z_k}, x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}}]^{x^{z_k}}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть в группе G истинны тождества* (5)–(7). *Тогда в группе G истинно тождество*

$$[x^y, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_n}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] = 1, \qquad (20)$$

где k и n пробегают множество натуральных чисел.

Доказательство индукцией по n. Так как в группе G истинно тождество (19), то для $n = 1$ формула (20) верна.

Пусть в группе G истинно тождество

$$[x^u, x^{u_1} \cdot \ldots \cdot x^{u_{n-1}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] = 1.$$

Применяя предположение индукции для $u = yx^{y_n}$, $u_i = y_i x^{y_n}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, получим равенство:

$$[x^{yx^{y_n}}, x^{y_1 x^{y_n}} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1} x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2] = 1.$$

Используя тождества (8), (9), (11), (12), (19), получим:

$$[x^y, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}} \cdot x^{y_n}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [[x^y, x^{y_n}] \cdot [x^y, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}}]^{x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [x^y, x^{y_n}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2]^{[x^y, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}}]^{x^{y_n}}} \cdot$$
$$\cdot [[x^y, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}}]^{x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [x^{yx^{y_n}}, x^{y_1 x^{y_n}} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1} x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_{k-1}})^2] = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть в группе G истинны тождества* (5)–(7). *Тогда в группе G истинно тождество*

$$[(x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_n})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] = 1, \qquad (21)$$

где k и n пробегают множество натуральных чисел.

Доказательство индукцией по n. Так как в группе G истинно тождество (17), то для $n = 1$ формула (21) верна.

Используя тождества (8), (11), (12), (17) и (20), получим

$$[(x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}} \cdot x^{y_n})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [(x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}})^2 (x^{y_n})^2 \cdot h_5, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [(x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}})^2 \cdot (x^{y_n})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2]^{h_5} \cdot$$
$$\cdot [[x^{y_{n-1}}, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}}]^{x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [(x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2]^{(x^{y_n})^2 h_5} \cdot$$
$$\cdot [(x^{y_n})^2, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2]^{h_5} \cdot$$
$$\cdot [[x^{y_n}, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}}]^{x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] =$$
$$= [x^{y_n x^{y_n}}, x^{y_1 x^{y_n}} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1} x^{y_n}}, (x^{z_1} \cdot \ldots \cdot x^{z_k})^2] = 1,$$

где $h_5 = [x^{y_n}, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_{n-1}}]^{x^{y_n}}$.

Лемма 5. *Пусть в группе G истинны тождества* (4)–(7). *Тогда в группе G истинны тождества*

$$[x^a, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_m}]^p = 1, \qquad (22)$$

$$[x^a, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^u, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_m}]] = 1, \qquad (23)$$

$$[x^{a_1} \cdot \ldots \cdot x^{a_l}, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^v, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_m}]] = 1, \qquad (24)$$

где k, m и l пробегают множество натуральных чисел.

Доказательство. Сначала индукцией по n докажем формулу (22). Используя тождества (9) и (10), получим

$$[x^a, x^{b_1}] = \left[x^a, x^{b_1 a^{-1}}\right]^a = \left[x, x \cdot [x, b_1 a^{-1}]\right]^a =$$
$$= \left[x, [x, b_1 a^{-1}]\right]^a = \left(\left[x, b_1 a^{-1}, x\right]^a\right)^{-1}.$$

Поскольку в группе G истинно тождество (4), то

$$[x^a, x^{b_1}]^p = \left([x, b_1 a^{-1}, x]^a\right)^{-p} = 1$$

и для $n = 1$ формула (22) верна.

Предположим, что в группе G истинно тождество

$$[x^a, x^{u_1} \cdot \ldots \cdot x^{u_{m-1}}]^p = 1.$$

Заметим, что из (18) следует, что

$$\left[x^a, x^{b_1 x^{b_m}} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1} x^{b_m}}, [x^a, x^{b_m}]\right] = 1.$$

Используя предположение индукции и тождества (9), (11), получим

$$[x^a, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1}} \cdot x^{b_m}]^p =$$
$$= \left([x^a, x^{b_m}][x^a, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1}}]^{x^{b_m}}\right)^p =$$
$$= [x^a, x^{b_m}]^p \left([x^{a x^{b_m}}, x^{b_1 x^{b_m}} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1} x^{b_m}}]\right)^p = 1.$$

Тождество (23) докажем индукцией по m. Из (18) следует, что в группе G верно равенство

$$[x^a, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^u, x^{u_1} \cdot \ldots \cdot x^{u_{m-1}}]] = 1.$$

Используя предположение индукции и тождества (9), (11), получим

$$[x^a, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^u, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1}} \cdot x^{b_m}]] =$$
$$= [x^a, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^u, x^{b_m}] \cdot h_6] =$$
$$= \left[x^a, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^u, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1}}]^{x^{b_m}}\right] \cdot$$
$$\cdot [x^a, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^u, x^{b_m}]]^{h_6} = 1,$$

где $h_6 = [x^u, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_{m-1}}]^{x^{b_m}}$.

Формулу (24) докажем индукцией по l. Поскольку в группе G истинно тождество (23), то для $l = 1$ равенство (24) верно.

Предположим, что в группе G истинно тождество

$$[x^{a_1} \cdot \ldots \cdot x^{a_{l-1}}, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^v, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_m}]] = 1.$$

Из истинности в группе G формулы (23) следует, что

$$[x^{a_l}, x^{y_1} \cdot \ldots \cdot x^{y_k}, [x^v, x^{b_1} \cdot \ldots \cdot x^{b_m}]] = 1.$$

Используя предположение индукции и тождества (8), (11), получим

$$[x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}}\cdot x^{a_l}, x^{y_1}\cdot\ldots\cdot x^{y_k}, [x^v, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]] =$$

$$= \left[[x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}}, x^{y_1}\cdot\ldots\cdot x^{y_k}]^{x^{a_l}}\cdot h_7, h_8\right] =$$

$$= \left[[x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}}, x^{y_1}\cdot\ldots\cdot x^{y_k}]^{x^{a_l}}, h_8\right]^{h_7}\cdot$$

$$\cdot [x^{a_l}, x^{y_1}\cdot\ldots\cdot x^{y_k}, [x^v, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]] =$$

$$= \left[x^{a_1 x^{a_l}}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}x^{a_l}}, x^{y_1 x^{a_l}}\cdot\ldots\cdot x^{y_k x^{a_l}}, h_8\right]^{h_7} =$$

$$= 1,$$

где $h_7 = [x^{a_l}, x^{y_1}\cdot\ldots\cdot x^{y_k}], h_8 = [x^v, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть в группе G истинны тождества* (4)–(7). *Тогда в группе G истинно тождество*

$$[x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_l}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]^p = 1, \qquad (25)$$

где l и m пробегают множество натуральных чисел.

Доказательство индукцией по l. Из истинности в группе G тождества (22) следует, что для $l = 1$ формула (25) верна. Пусть в группе G истинна формула

$$[x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]^p = 1.$$

В группе G верно равенство (24), значит,

$$[x^{a_1 x^{a_l}}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}x^{a_l}}, x^{b_1 x^{a_l}}\cdot\ldots\cdot x^{b_m x^{a_l}}, h_9] = 1,$$

где $h_9 = [x^{a_l}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]$.

Из истинности тождества (22) в группе G следует, что

$$[x^{a_l}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]^p = 1.$$

Используя предположение индукции и тождества (8), (11), получим

$$[x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}}\cdot x^{a_l}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]^p =$$

$$= \Big([x^{a_1}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]^{x^{a_l}}\cdot$$

$$\cdot [x^{a_l}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}]\Big)^p =$$

$$= \left[x^{a_1 x^{a_l}}\cdot\ldots\cdot x^{a_{l-1}x^{a_l}}, x^{b_1 x^{a_l}}\cdot\ldots\cdot x^{b_m x^{a_l}}\right]^p\cdot$$

$$\cdot \left[x^{a_l}, x^{b_1}\cdot\ldots\cdot x^{b_m}\right]^p = 1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала покажем, что $\mathcal{M} \subseteq L(\mathcal{N})$. Всякое квазимногообразие порождается множеством всех своих конечно порожденных групп. Следовательно, достаточно показать, что любая конечно порожденная группа $G \in \mathcal{M}$ принадлежит классу $L(\mathcal{N})$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in G$ и его нормальное замыкание $H = \mathrm{gr}(x^g | g \in G)$.

Поскольку в группе G истинны тождества (4)–(7), то они будут истинны и в нормальном замыкании H. Проверим, что в группе H будут истинны тождества (1)–(3). Так как в группе G истинно тождество (1), то оно будет истинно и в группе H.

Докажем истинность тождества (2) в группе H. Пусть $h_1, h_2 \in H$. Тогда $h_1 = x^{g_1}\cdot\ldots\cdot x^{g_m}$, $h_2 = x^{f_1}\cdot\ldots\cdot x^{f_n}$ для подходящих $g_i, f_j \in G$ $(i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n)$. Поскольку в группе H истинны тождества (4)–(7), то по лемме 4 будет верно равенство

$$[h_1^2, h_2^2] = \left[(x^{g_1}\cdot\ldots\cdot x^{g_m})^2, (x^{f_1}\cdot\ldots\cdot x^{f_n})^2\right] = 1.$$

Значит, тождество (2) истинно в H.

Из леммы 6 следует, что

$$[h_1, h_2]^p = [x^{g_1}\cdot\ldots\cdot x^{g_m}, x^{f_1}\cdot\ldots\cdot x^{f_n}]^p = 1.$$

Таким образом, в группе H истинно тождество (3). Тогда $H \in \mathcal{N}$ и $G \in L(\mathcal{N})$.

Осталось показать, что $L(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$. Для этого достаточно установить, что любая конечно порожденная группа G из $L(\mathcal{N})$ принадлежит классу $\mathcal{M}$. Для этого необходимо проверить истинность формул (1), (4) – (7) в группе G.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in G$. По определению класса Леви $(x)^G \in \mathcal{N}$. Поскольку в $\mathcal{N}$ истинны формулы (1) – (3), они будут истинны и в нормальном замыкании $(x)^G$ для любых элементов $x \in G$. Из этого следует истинность тождества (1) в группе G.

Заметим, что для произвольного $y \in G$ элемент $[x, y]$ принадлежит подгруппе $(x)^G$. Следовательно, истинность формулы (4) в группе G непосредственно следует из истинности формулы (3) в нормальном замыкании $(x)^G$.

Поскольку в группе $(x)^G$ истинно тождество (2), то согласно замечанию 1 в этой группе будут истинны и тождества (14), (15). Для произвольных $y, z, u, v \in G$ элементы x^y, x^z, x^u, x^v принадлежат нормальному замыканию $(x)^G$. Следовательно, тождества (5)–(7) будут истинны в группе G. Значит, группа G принадлежит многообразию $\mathcal{M}$ и $L(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formations // Arch. Math. — 1972. — Vol. 23, №6.

2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. — 1942. — Vol. 6.

3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. — 1994.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. — 1999. — Т. 40, № 2.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2000. — Т. 41, №2.

6. Будкин А.И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, №6.

7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия Алт. гос. ун-та — 2009. — №1(61).

8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, №6.

9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, №1.

10. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алт. гос. ун-та. — 2010. — №1/2(65).

11. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М., 1972.

12. Курош А.Г. Теория групп. — М., 1967.

13. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М., 1970.

14. Будкин А.И., Горбунов В.А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, №2.

15. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск, 1999.

16. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. — Барнаул, 2002.

17. Ольшанский А.Ю. Многообразия финитно аппроксимируемых групп // Изв. АН СССР. — 1969. — Т. 33, №4.

18. Gorenstein D. Finite groups. — Providence, 2007.