

**Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое\****С.С. Кузиков, А.А. Папин, А.Н. Сибин*

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

**A Numerical Study of Internal Erosion Profile Problem in an Intrapermafrost Water Bearing Layer***S.S. Kuzikov, A.A. Papin, A.N. Sibin*

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается численное решение профильной задачи суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте. Фильтрация подземных вод происходит в горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. В пункте 1 дается постановка задачи: на части границы области течения задаются условия непротекания, а на входе и выходе — давления. Кроме того, приведен краткий обзор моделей суффозии. В пункте 2 описан алгоритм численного решения профильной задачи движения воды и твердых частиц без учета деформации пористой среды. Задача сводится к системе из трех уравнений относительно пористости, давления водной фазы и концентрации твердых подвижных частиц. Для модельной задачи рассмотрена начально-краевая задача и построена конечно-разностная схема на основе метода переменных направлений. Проведены расчеты тестовой задачи, определены давление и скорость водной фазы. Сравнение найденной скорости с критической позволяет найти область суффозионного выноса.

**Ключевые слова:** пористая среда, суффозия, фазовый переход, численный расчет, метод переменных направлений.

**DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-06**

In this paper, a numerical solution of a profile problem of suffusion in an intrapermafrost water bearing layer is investigated. Underground water filtration occurs in the water bearing layer being in contact with frozen sandy soil. During a process of soil thawing at a certain magnitude of filtration velocity the removal of soil particles from the flow has been found to occur. A mathematical model is developed with the mass conservation equations for water, moving solids, and stationary porous skeleton along with Darcy's law for water and moving solid particles and the equation for the intensity of suffusion flow. The setting of the problem is provided in Paragraph 1 with the following: predetermined impermeability conditions are set on a part of the boundary, and predetermined pressure conditions are set at inlet and outlet. Also, an overview of suffusion models is presented. A numerical solution of the profile problem of water and solid particles movement without porous medium deformation is elaborated in Paragraph 2. The problem is reduced to a system of three equations for the porosity, pressure of the aqueous phase and concentration of solid particles. The initial boundary value problem is considered for the model problem, and the finite difference scheme based on the alternating directions method is developed. Test calculations and validations are performed, and pressure and velocity of the aqueous phase are evaluated. Suffusion area is estimated by the comparison of the found velocity with the critical velocity value.

**Key words:** document preparation system, scientific paper, manual.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2, грантов РФФИ №13-08-01097 и 13-01-98016.

**1. Постановка задачи.** Следуя [1, 2], рассмотрим движение воды и подвижных твердых частиц в пористой среде. Пусть  $\varphi$  — пористость,  $c$  — концентрация твердых подвижных частиц,  $\rho_s$  и  $\rho_f$  — истинные плотности жидкой и твердой фаз соответственно. Тогда

$$\rho_1 = (1 - \varphi)\rho_s, \quad \rho_2 = (1 - c)\varphi\rho_f, \quad \rho_3 = c\varphi\rho_s$$

приведенные плотности скелета грунта, воды и подвижных твердых частиц.

Учитывая обмен массой только между первой и третьей фазами, уравнениям сохранения массы можно придать вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \operatorname{div}(\rho_1\vec{v}_1) = j_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_2 + \operatorname{div}(\rho_2\vec{v}_2) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_3 + \operatorname{div}(\rho_3\vec{v}_3) = j_3, \quad (3)$$

где  $\vec{v}_i$  — скорости фаз ( $i = 1, 2, 3$ ), причем  $j_1 + j_3 = 0$ . Постулируется, что суффозионный поток  $\dot{m}$  определяется соотношением

$$\dot{m} = j_3 = \alpha\rho_s(1 - \varphi)c\varphi|\vec{v}_3 - \vec{v}_1 - \vec{v}_k| \quad (4)$$

при  $|\vec{v}_3 - \vec{v}_1| \geq |\vec{v}_k|$  и  $\dot{m} = 0$  при  $|\vec{v}_3 - \vec{v}_1| < |\vec{v}_k|$ . Здесь  $\alpha$  — положительная постоянная,  $\vec{v}_k$  — заданное значение. Для скорости движения воды в пористой среде справедлив закон Дарси

$$\vec{v}_2 = -k_f(\nabla p + \rho_f\vec{g}), \quad (5)$$

где  $k_f$  — коэффициент фильтрации,  $p$  — давление,  $\vec{g}$  — ускорение силы тяжести,  $\nabla$  — оператор градиента. Для скорости подвижных твердых частиц, как правило, используется зависимость  $\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_2$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Граничные условия определяются свойствами среды, с которой контактируют грунтовые воды. Условия на границе с неподвижным мерзлым грунтом описаны в [3].

Рассмотрим одномерное движение при условиях  $\vec{g} = 0$ ,  $\vec{v}_1 = 0$ . Система (1)–(5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \varphi)\rho_s) = j^{(1)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - c)\varphi\rho_f) - \frac{\partial}{\partial z}((1 - c)\rho_f\varphi k_f \frac{\partial p}{\partial z}) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\varphi\rho_s) - \frac{\partial}{\partial z}(c\rho_s\lambda\varphi k_f \frac{\partial p}{\partial z}) = -j^{(1)}, \quad (8)$$

$$j^{(1)} = -\dot{m}. \quad (9)$$

Решение системы (6)–(9) ищется в области  $(-\infty, \gamma t)$  в предположении, что все искомые функции зависят лишь от переменной  $\xi = z - \gamma t$  ( $\gamma$  — неизвестная постоянная). Вместо (6)–(9) получим

$$-\gamma \frac{d}{d\xi}((1 - \varphi)\rho_s) = j^{(1)}, \quad (10)$$

$$-\gamma \frac{d}{d\xi}((1 - c)\varphi\rho_f) - \frac{d}{d\xi}((1 - c)\rho_f\varphi k_f \frac{dp}{d\xi}) = 0, \quad (11)$$

$$-\gamma \frac{d}{d\xi}(c\varphi\rho_s) - \frac{d}{d\xi}(c\rho_s\lambda\varphi k_f \frac{dp}{d\xi}) = -j^{(1)}, \quad (12)$$

$$j^{(1)} = -\dot{m}. \quad (13)$$

Здесь искомыми являются функции  $c(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $p(\xi)$  и постоянная  $\gamma$ .

Из (11) следует

$$\gamma((1 - c)\varphi) + ((1 - c)\varphi k_f \frac{dp}{d\xi}) = A, \quad (14)$$

где  $A$  — постоянная. Складывая уравнения (10) и (12), получим

$$\gamma c\varphi + \lambda c\varphi k_f \frac{dp}{d\xi} + \gamma(1 - \varphi) = B = \text{const}. \quad (15)$$

Определим  $A$  и  $B$  из следующих краевых условий:  $k_f \frac{dp}{d\xi}|_{\xi \rightarrow -\infty} = -V^-$ ,  $c|_{\xi \rightarrow -\infty} = c^-$ ,  $\varphi|_{\xi \rightarrow -\infty} = \varphi^-$ ,  $k_f \frac{dp}{d\xi}(0) = -V^+$ ,  $c(0) = c^+$ ,  $\varphi(0) = \varphi^+$ .

Из (14), (15) следует:

$$A = \gamma\varphi^-(1 - c^-) - (1 - c^-)V^-\varphi^-, \quad (16)$$

$$B = \gamma c^-\varphi^- + \gamma(1 - \varphi^-) - \lambda c^-V^-\varphi^-, \quad (17)$$

$$A = \gamma(1 - c^+)\varphi^+ - (1 - c^+)V^+\varphi^+, \quad (18)$$

$$B = \gamma c^+\varphi^+ + \gamma(1 - \varphi^+) - \lambda c^+V^+\varphi^+. \quad (19)$$

Считая параметры  $V^+$ ,  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$ ,  $c^+$ ,  $c^-$  заданными, из системы (16)–(19) определяем  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $V^-$ . В частности, для  $\gamma$  имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\varphi^-(1 - c^-)V^+ - \varphi^+(1 - c^+)V^-}{\varphi^-(1 - c^-) - \varphi^+(1 - c^+)} = \\ &= \frac{\varphi^+c^+(1 - \lambda V^+) - \varphi^-c^-(1 - \lambda V^-)}{\varphi^+ - \varphi^-} \end{aligned}$$

при  $\varphi^+(1 - c^+) \neq \varphi^-(1 - c^-)$ ,  $\varphi^+ \neq \varphi^-$ .

Пусть  $-k_f \frac{dp}{d\xi} = v_2$ , тогда  $A$  и  $B$  представим в виде

$$A = \gamma(1 - c)\varphi - (1 - c)\varphi v_2, \quad (20)$$

$$B = \gamma c\varphi + \gamma(1 - \varphi) - \lambda c\varphi v_2. \quad (21)$$

Выразим  $v_2$  из уравнений (20), (21)

$$\frac{A}{(1 - c)\varphi} - \gamma = -v_2, \quad (22)$$

$$\frac{B}{\lambda c\varphi} - \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{\gamma(1 - \varphi)}{\lambda c\varphi} = -v_2. \quad (23)$$

Из (22)–(23) получим следующую связь пористости и концентрации:

$$\frac{A}{(1 - c)\varphi} - \gamma = \frac{B}{\lambda c\varphi} - \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{\gamma(1 - \varphi)}{\lambda c\varphi}.$$

В рассматриваемом случае имеем  $\dot{m} = \alpha\rho_s(1 - \varphi)c\varphi|\lambda\vec{v}_2 - \vec{v}_k|$  при  $|\lambda\vec{v}_2| > |\vec{v}_k|$  и  $\dot{m} = 0$  при  $|\lambda\vec{v}_2| \leq |\vec{v}_k|$ . Поэтому из (10), (13) в первом случае получим уравнение вида

$$-\gamma \frac{d\varphi}{d\xi} = \varphi(1 - \varphi)\alpha c \left( -\frac{A\lambda}{(1 - c)\varphi} + \gamma\lambda - v_k \right), \quad (24)$$

а во втором  $-\frac{d\varphi}{d\xi} = 0$ .

Таким образом, исходная задача сводится к алгебраическому соотношению для пористости и концентрации и обыкновенному дифференциальному уравнению. Последнее может вырождаться на решении при  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 1$  и  $c = 0$ . Исследование подобных задач можно провести с помощью подходов, изложенных в [4].

**2. Численное решение.** После подстановки приведенных плотностей и скоростей фаз система (1)–(3) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \varphi)\rho_s) = -\dot{m}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - c)\varphi\rho_f) - \operatorname{div}((1 - c)\varphi\rho_f k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\varphi\rho_s) - \operatorname{div}(c\varphi\rho_s \lambda k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})) = \dot{m}. \quad (27)$$

*Замечание.* Если концентрация подвижных частиц грунта заданная функция  $c > 0$  и известны  $v_k$  и  $v_2$ , то из уравнений (25) и (4) получим соотношение для пористости

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 + (1 - \varphi_0)e^{-\int_0^t c|\vec{v}_2 - \vec{v}_k|d\tau}}, \quad (28)$$

где критическая скорость [5]

$$v_k = 4.2\varphi^3 \sqrt{g\nu^7} \frac{1}{\sqrt[3]{37.21 \frac{\nu k_f}{\varphi g}}}, \quad (29)$$

здесь  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости воды. Из (28) следует, что  $\varphi_0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi_0$  — это начальное значение пористости.

Систему (25) – (27) можно записать в виде

$$\operatorname{div}(a(c, \varphi)(\nabla p + \rho_f \vec{g})) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(1 - \varphi)c\varphi|k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})|, \quad (31)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + Ac + Bc^2 + \vec{D} \cdot \nabla c = 0, \quad (32)$$

где  $a(c, \varphi) = (c\lambda + 1 - c)\varphi k_f$ ;  $A = -(\lambda/\varphi)\operatorname{div}(\varphi k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})) + (1 - \varphi)|k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})|$ ;  $B = -(1 - \varphi)|k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})|$ ;  $\vec{D} = -\lambda k_f(\nabla p + \rho_f \vec{g})$ .

Алгоритм численного решения системы (30)–(32). Необходимо задать начальные условия для

пористости  $\varphi$  и концентрации  $c$ . Для  $c$ , возможно, понадобится задание граничных условий в зависимости от направления характеристик на  $\Gamma_5$  и  $\Gamma_4$ . Из уравнения (30) найдем давление, решив его методом переменных направлений, задав  $c$  и  $\varphi$  из начальных условий. Используя уравнение (31) найдем значение пористости  $\varphi$  на первом шаге разбиения по времени, решив его методом Рунге-Кутты. Из последнего уравнения системы (32) найдем значения  $c$ . Зная  $c$  и  $\varphi$  на данном интервале, повторим алгоритм и найдем значения  $c$  и  $\varphi$  на следующем временном интервале.

Рассмотрим случай когда  $a = const$ , тогда уравнение (30) примет вид

$$\Delta p = 0, \quad (33)$$

с граничными условиями (рис. 1.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1} &= -g\rho_f; & \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\Gamma_2} &= 0; & \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_3} &= -g\rho_f; \\ p \Big|_{\Gamma_4} &= -g\rho_f y + p_0; & p \Big|_{\Gamma_5} &= -g\rho_f y; \end{aligned}$$

где  $p_0$  — давление водонасыщенного грунта.

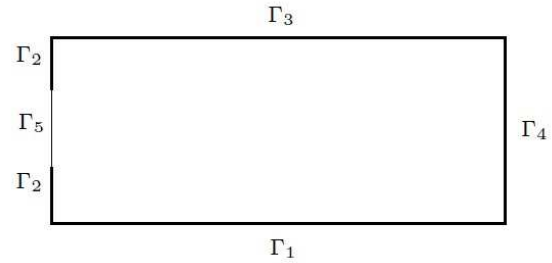


Рис. 1. Расчетная область

Уравнение (33) решаем методом переменных направлений. Разностная схема запишется следующим образом [6]:

$$\omega_1 p_{k+1/2} - \Lambda_1 p_{k+1/2} = \omega_1 p_k + \Lambda_2 p_k$$

$$\omega_2 p_{k+1} - \Lambda_2 p_{k+1} = \omega_2 p_{k+1/2} + \Lambda_1 p_{k+1/2}$$

$$\Lambda_1 p = \frac{p(i+1, j) - 2p(i, j) + p(i-1, j)}{h_1^2},$$

$$i = 1, \dots, N_1 - 1;$$

$$\Lambda_2 p = \frac{p(i, j+1) - 2p(i, j) + p(i, j-1)}{h_2^2},$$

$$j = 1, \dots, N_2 - 1;$$

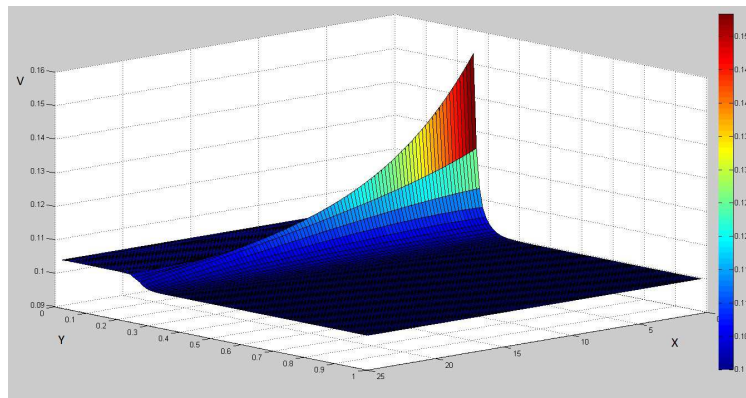


Рис. 2. График изменения модуля скорости

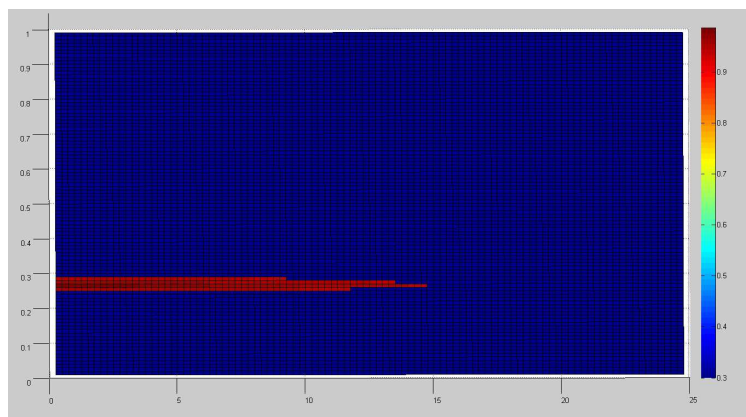


Рис. 3. Область эрозии

где итерационный параметр  $\omega_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha \Delta_\alpha}$ ,  $\delta_\alpha = (4/h_\alpha^2) \sin^2(\pi h_\alpha/2l_\alpha)$ ,  $\Delta_\alpha = (4/h_\alpha^2) \cos^2(\pi h_\alpha/2l_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $N_1, N_2$  – число разбиений  $l_1$  и  $l_2$ ;  $l_1$  и  $l_2$  – длина и ширина области соответственно;  $h_1 = l_1/N_1$  и  $h_2 = l_2/N_2$  – шаги разбиения  $l_1$  и  $l_2$ .

Численный расчет проводился при  $\varphi = 0.25$ ,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ ,  $\nu = 1307 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $k = 10^{-2} \text{ м/с}$ ,

для этих значений постоянных из (29) найдем критическую скорость  $v_k = 0.11 \text{ м/с}$ .

Модуль скорости изображен на рисунке 2. Если найти пересечение поверхностей модуля скорости фильтрации и критической скорости, после достижения которой начинается суффозионный процесс, то можно определить область, подверженную внутренней эрозии (рис. 3).

### Библиографический список

1. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. — 2006.
2. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия Алт. гос. ун-та — 2013. — № 1/2(77). DOI:10.14258/izvasu(2013)1.2-06.
3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Ципкин Г.Г. Тепломассоперенос в про-

- мерзающих и протаивающих грунтах. — М., 1996.

4. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. — Барнаул, 2009.

5. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. — Ленинград, 1983.

6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М., 1978.