УДК 514.765

Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны*

П.Н. Клепиков, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Four-Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Riemannian Metric and Harmonic Concircular Curvature Tensor

P.N. Klepikov, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Исследуются вещественные четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны, что продолжает исследования авторов по трехмерным группам Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны.

Концикулярные преобразования (т.е. нетривиальные конформные преобразования, которые переводят геодезические окружности в геодезические окружности) и один из их инвариантов — тензор концикулярной кривизны — были введены К. Яно. Позднее была установлена их важность в геометрии некоторых F-структур: комплексных, почти комплексных, кэлеровых, почти кэлеровых, контактных, почти контактных, а также в теории относительности.

С помощью методов дифференциальной геометрии и теории однородных пространств задача по изучению четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концикулярной кривизны редуцируется к изучению метрических алгебр Ли с гармоническим тензором концикулярной кривизны. Это позволяет применить идеи и методы теории однородных пространств, а также символьные вычисления, и получить полную классификацию вещественных четырехмерных алгебр Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с гармоническим тензором концикулярной кривизны.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, гармонический тензор концикулярной кривизны.

In this paper, four-dimensional real Lie groups with left-invariant Riemannian metrics and a harmonic concircular curvature tensor are investigated. This is a continuation of the researches of authors on three-dimensional Lie groups with left-invariant Lorentz's metric, and a harmonical concircular curvature tensor.

Concircular transformations (i.e. non-trivial conformal transformations that transform the geodesic circles in the geodesic circles) and one of their invariants — concircular curvature tensor were introduced by K. Yano. Their importance in the geometry of F-structures such as complex, almost complex, Kahler, almost Kahler, contact and almost contact, and in the relativity theory was established later.

Using the methods of differential geometry and the theory of homogeneous spaces the problem of investigation of four-dimensional Lie groups with left- invariant metric and harmonic concircular curvature tensor is reduced to the study of metric Lie algebras with harmonic concircular curvature tensor. It allows to apply the ideas and methods of the homogeneous spaces theory and symbolic computations, and to obtain complete classification of four-dimensional real Lie algebras of Lie groups with left-invariant Riemannian metrics and harmonic concircular curvature tensor.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, harmonic concircular curvature tensor.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-05

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ для государственной поддержки

1. Предварительные сведения. Далее будем следовать системе обозначений и приводить результаты работ [1–13], в которых исследовались тензорные поля на многообразиях.

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну ρ определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$ и $\rho = \mathrm{tr}(r)$. Рассмотрим тензор концциркулярной кривизны, определяемый равенством (см. подробнее [1])

$$Z = R - \frac{\rho}{2n(n-1)} g \owedge g,$$

где $\owedge$ — произведение Кулкарни-Номидзу (см. [2]), или в координатах

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)} (g_{ij} g_{hk} - g_{ik} g_{hj}). \quad (1)$$

Дивергенцию тензора концциркулярной кривизны будем определять формулой

$$(\mathrm{div} Z)_{ijk} = g^{st} Z_{ijkt;s} \quad (2)$$

где $Z_{ijkt;s} = \Gamma^l_{si} Z_{ljkt} + \Gamma^l_{sj} Z_{ilkt} + \Gamma^l_{sk} Z_{ijlt} + \Gamma^l_{st} Z_{ijkl}$ — ковариантные производные тензора Z.

Определение 1. Назовем тензор концциркулярной кривизны *гармоническим*, если $\mathrm{div} Z = 0$.

Лемма 1. *Тензор концциркулярной кривизны обладает симметриями тензора кривизны и удовлетворяет равенству*

$$Z_{hijk} + Z_{hjki} + Z_{hkij} = 0.$$

Доказательство. Делаем замену индексов $h \leftrightarrow i$ в (1) и, принимая во внимание косую симметрию тензора кривизны по первой паре индексов, получаем $Z_{ihjk} = R_{ihjk} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}) = -R_{hijk} + \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij} g_{hk} - g_{ik} g_{hj}) = -Z_{hijk}$.

Аналогично, выполняя замену индексов $j \leftrightarrow k$ в (1), проверяем кососимметричность тензора Z_{hijk} по последней паре индексов.

С помощью замены индексов $h \leftrightarrow j, i \leftrightarrow k$ в (1), замечаем $Z_{jkhi} = R_{jkhi} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{kh} g_{ji} - g_{ki} g_{jh}) = Z_{hijk}$.

Используя формулу (1), найдем $Z_{h(ijk)} = R_{h(ijk)} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij} g_{hk} - g_{ik} g_{hj} + g_{jk} g_{hi} - g_{ji} g_{hk} + g_{ki} g_{hj} - g_{kj} g_{hi})$. Приводя подобные и применяя первое тождество Бьянки, заключаем $Z_{h(ijk)} = R_{h(ikj)} = 0$, что завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$(\mathrm{div} Z)_{ijk} = -(\mathrm{div} Z)_{jik}.$$

Доказательство. Вычисляя ковариантную производную тензора концциркулярной кривизны и используя равенство (2), получаем $(\mathrm{div} Z)_{ijk} = g^{st} \Big(\frac{\partial Z_{ijkt}}{\partial x^s} - \Gamma^p_{si} Z_{pjkt} - \Gamma^p_{sj} Z_{ipkt} - \Gamma^p_{sk} Z_{ijpt} - \Gamma^p_{st} Z_{ijkp} \Big)$. Откуда, применяя лемму 2, имеем $(\mathrm{div} Z)_{ijk} = g^{st} \Big(-\frac{\partial Z_{jikt}}{\partial x^s} + \Gamma^p_{si} Z_{jpkt} + \Gamma^p_{sj} Z_{pikt} + \Gamma^p_{sk} Z_{jipt} + \Gamma^p_{st} Z_{jikp} \Big) = -g^{st} Z_{jikt;s} = -(\mathrm{div} Z)_{jik}$. Лемма доказана.

Замечание 1. *Всюду далее из компонент тензора концциркулярной кривизны и его дивергенции будем приводить только существенные, т.е. нетривиальные, поскольку остальные либо выражаются через них, либо равны нулю.*

Замечание 2. *Ранее гармоничность тензора концциркулярной кривизны изучалась в [3–6]. При этом в [4, 6] исследовались релятивистские свойства многообразий, для которых дивергенция тензора Z тривиальна; в [5] рассматривались контактные многообразия, удовлетворяющие условию $\mathrm{div} Z = 0$; в [3] — трехмерные группы Ли с левоинваринтной (псевдо)римановой метрикой и гармоническим тензором Z. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [3], в размерности 4.*

Пусть далее G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [2]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ *метрической алгеброй Ли.*

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ в $\mathfrak{g}$. Положим,

$$\begin{aligned} &[E_i, E_j] = C^k_{ij} E_k, \ \nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k, \\ &\langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{C^k_{ij}\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Пусть $C_{ijs} = C^k_{ij} g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(C_{ijk} - C_{jki} + C_{kij} \right), \ \Gamma^s_{ij} = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \quad (4)$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, научных учреждениях государственных академий наук и государственных научных центрах РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), а также Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Из (3) и (4) очевидно следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна ρ, тензор конциркулярной кривизны Z_{ijkt} являются функциями структурных констант C_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. [7–13]).

Определение 2. Будем называть алгебру Ли группы Ли *разложимой*, если она представима в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т.е.

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}X) \equiv 0, \ \forall X \in \mathfrak{g},$$

где $\operatorname{ad}X(Y) = [X, Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2. Четырехмерные действительные алгебры Ли групп Ли с левоиварянтной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны. Для исследования четырехмерных унимодулярных метрических алгебр Ли с тривиальной дивергенцией тензора конциркулярной кривизны нам понадобятся результаты работ А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [12, 13], в которых доказано, что для каждой четырехмерной вещественной алгебры Ли существует ортонормированный базис, в котором структурные константы алгебры имеют удобный для вычисления вид.

Придерживаясь системы обозначений работы [12], сформулируем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\operatorname{div}Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 1.*

Таблица 1

Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
2	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C_{2,3}^1 = c$, $C_{1,3}^2 = -c$, где $c > 0$.
3	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C_{1,2}^3 = a$, $C_{1,2}^4 = -am$, $C_{2,3}^1 = a(m^2+1)$, $C_{1,3}^2 = -a(m^2+1)$, где $a > 0$.

Доказательство. Рассмотрим разложимые унимодулярные алгебры Ли (см. подробнее [12]). Заметим, что структурные константы всех четырехмерных унимодулярных разложимых алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеют вид

$$\begin{gathered} C_{1,2}^3 = a, C_{1,2}^4 = -am, C_{2,3}^1 = b, \\ C_{2,3}^4 = -bk, C_{1,3}^2 = -c, C_{1,3}^4 = cl, \end{gathered} \tag{5}$$

где знаки a, b, c определяют конкретную алгебру Ли. Используя формулы (1) и (4), рассчитаем компоненты тензора конциркулярной кривизны

$$\begin{gathered}
24Z_{2121} = 10ac - 17a^2 + 10ab - 17a^2m^2 + 7c^2 \\
-14cb + 7b^2 + c^2l^2 + b^2k^2, \\
-12Z_{2131} = 4Z_{4243} = 3amcl, \\
12Z_{2132} = 4Z_{4143} = -3ambk, \\
4Z_{2141} = -acl - c^2l + clb, \\
4Z_{2142} = abk + b^2k - bkc, \\
24Z_{3131} = 10ac - 17c^2 + 10cb - 17c^2l^2 + 7a^2 \\
-14ab + 7b^2 + a^2m^2 + b^2k^2, \\
-14Z_{3132} = 4Z_{4142} = 3bkcl, \\
4Z_{3141} = -cam - a^2m + amb, \\
4Z_{3143} = bkc + b^2k - abk, \\
24Z_{3232} = 10ab - 17b^2 + 10cb - 17b^2k^2 + 7a^2 \\
-14ac + 7c^2 + a^2m^2 + c^2l^2, \\
4Z_{3242} = -amb - a^2m + cam, \\
4Z_{3243} = clb + c^2l - acl, \\
24Z_{4141} = 7a^2m^2 + 7c^2l^2 + a^2 - 2ac + c^2 \\
+b^2 - 2ab + b^2k^2 - 2cb, \\
24Z_{4242} = 7a^2m^2 + 7b^2k^2 + a^2 - 2ac + c^2 \\
+b^2 + c^2l^2 - 2ab - 2cb, \\
24Z_{4343} = 7c^2l^2 + 7b^2k^2 + a^2 - 2ac + a^2m^2 \\
+c^2 + b^2 - 2ab - 2cb.
\end{gathered}$$

Применяя равенство (2), вычислим дивергенцию тензора конциркулярной кривизны

$$\begin{gathered}
4\operatorname{div}Z_{211} = -3a^2mbk - 4amb^2k + ambkc, \\
4\operatorname{div}Z_{212} = -3a^2mcl + amclb - 4amc^2l, \\
4\operatorname{div}Z_{213} = 2(c^3 + b^3 + a^2(b+c) - c^2b - cb^2 + c^3l^2 \\
+b^3k^2) - 4a^3(1+m^2) + c^2l^2(a-b) + b^2k^2(a-c), \\
2\operatorname{div}Z_{214} = m(2a^3(1+m^2) + 2a(c^2l^2 + b^2k^2) \\
-a^2(b+c)), \\
4\operatorname{div}Z_{311} = 4b^2kcl + 3bkc^2l - bkcla, \\
4\operatorname{div}Z_{312} = 2(ab^2 - a^3 - b^3 + a^2b - ac^2 - a^3m^2 - c^2b \\
-b^3k^2) + 4c^3(1+l^2) + b^2k^2(a-c) + a^2m^2(b-c), \\
4\operatorname{div}Z_{313} = 4a^2mcl - amclb + 3amc^2l,
\end{gathered}$$

$$2\mathrm{div}Z_{314} = -2c^3(l+l^3) - 2a^2m^2cl + c^2lb -2clb^2k^2 + c^2la,$$

$$4\mathrm{div}Z_{321} = 2(a^3+c^3+ab^2-a^2c-ac^2+a^3m^2+cb^2 +c^3l^2) - 4b^3(1+k^2) + a^2m^2(b-c) + c^2l^2(b-a),$$

$$4\mathrm{div}Z_{322} = bkcla - 3b^2kcl - 4bkc^2l,$$

$$4\mathrm{div}Z_{323} = ambkc - 3amb^2k - 4a^2mbk,$$

$$2\mathrm{div}Z_{324} = 2(a^2m^2bk + bkc^2l^2 + b^3k^3 + b^3k) -b^2kc - ab^2k,$$

$$4\mathrm{div}Z_{412} = 2(a^3m + a^3m^3 + amc^2l^2 + amb^2k^2) -a^2m(b+c) + am(c^2-b^2),$$

$$4\mathrm{div}Z_{413} = -2(c^3l + c^3l^3 + a^2m^2cl + clb^2k^2) +c^2l(b+a) + cl(b^2-a^2),$$

$$4\mathrm{div}Z_{414} = amc^2l - a^2mcl,$$

$$4\mathrm{div}Z_{421} = -2(a^3m + a^3m^3 + amb^2k^2 + amc^2l^2) +a^2m(c+b) + am(c^2-b^2),$$

$$4\mathrm{div}Z_{423} = 2(b^3k^3 + b^3k + a^2m^2bk + bkc^2l^2) +bk(a^2-c^2) - b^2k(c+a),$$

$$4\mathrm{div}Z_{424} = -amb^2k + a^2mbk,$$

$$4\mathrm{div}Z_{431} = 2(c^3l + c^3l^3 + clb^2k^2 + a^2m^2cl) +cl(b^2-a^2) - c^2l(a+b),$$

$$4\mathrm{div}Z_{432} = -2(a^2m^2bk + b^3k^3 + b^3k + bkc^2l^2) +bk(a^2-c^2) + b^2k(a+c),$$

$$4\mathrm{div}Z_{434} = b^2kcl - bkc^2l.$$

Решая систему уравнений $\mathrm{div}Z = 0$ относительно констант a, b, c, k, m, l и подставляя в структурные константы (5), получаем

1. $C^i_{j,k} = 0,\ \forall\, i,j,k = 1,2,3,4;$
2. $\begin{cases} C^1_{2,3} = c, \\ C^2_{1,3} = -c; \end{cases}$
3. $\begin{cases} C^3_{1,2} = c, \\ C^2_{1,3} = -c; \end{cases}$
4. $\begin{cases} C^3_{1,2} = b, \\ C^1_{2,3} = b; \end{cases}$
5. $\begin{cases} C^3_{1,2} = a, \\ C^4_{1,2} = -am, \\ C^1_{2,3} = a(m^2+1), \\ C^2_{1,3} = -a(m^2+1); \end{cases}$
6. $\begin{cases} C^3_{1,2} = c(l^2+1), \\ C^1_{2,3} = c(l^2+1), \\ C^2_{1,3} = -c, \\ C^4_{1,3} = cl; \end{cases}$
7. $\begin{cases} C^3_{1,2} = b(k^2+1), \\ C^1_{2,3} = b, \\ C^4_{2,3} = -bk, \\ C^2_{1,3} = -b(k^2+1). \end{cases}$

Решение 1 дает алгебру Ли $4A_1$, решения 2–4 соответствуют алгебре Ли $A_{3,6}\oplus A_1$, а решения 5–7 определяют алгебру Ли $A_{3,9}\oplus A_1$ (см. также [9]).

Выполняя аналогичные действия для унимодулярных неразложимых алгебр Ли, заключаем, что кроме этих трех алгебр Ли, больше нет четырехмерных унимодулярных алгебр Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны.

Следствие 1. *Среди вещественных четырехмерных унимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A_{3,9}\oplus A_1$ имеет нетривиальный тензор конциркулярной кривизны.*

Таблица 2

Четырехмерные неунимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2\oplus 2A_1$	$C^2_{1,2} = a$, где $a > 0$.
2	$2A_2$	$C^2_{1,2} = a$, $C^4_{3,4} = g$, где $a > 0, g > 0$.
3	$A_{3,3}\oplus A_1$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a$, где $a > 0$.
4	$A^\alpha_{3,7}\oplus A_1$, $\alpha > 0$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = \alpha l$, $C^1_{2,3} = -C^2_{1,3} = l$, где $l > 0$.
5	$A^{1,1}_{4,5}$	$C^1_{1,4} = C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = l$, где $l > 0$.
6	$A^{\alpha,0}_{4,6}$, $\alpha \neq 0$	$C^1_{1,4} = \alpha l$, $C^3_{2,4} = -l$, $C^2_{3,4} = l$, где $l > 0$.
7	$A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$, $\alpha > 0$	$C^1_{1,4} = C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = \alpha l$, $C^2_{3,4} = -C^3_{2,4} = l$, где $l > 0$.
8	$A^1_{4,9}$	$C^1_{1,4} = C^1_{2,3} = 2a$, $C^2_{2,4} = C^3_{3,4} = a$, где $a > 0$.
9	$A^\alpha_{4,11}$	$C^1_{1,4} = 2C^3_{3,4} = 2C^2_{2,4} = 2a\alpha$, $C^1_{2,3} = 2a\lvert\alpha\rvert$, $C^2_{3,4} = -C^3_{2,4} = a$, где $a > 0$.
10	$A_{4,12}$	$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a$, $C^1_{1,4} = C^2_{2,4} = b$, $C^1_{2,4} = -C^2_{1,4} = d$, где $a > 0, d > 0$.

Доказательство. Используя компоненты тензора конциркулярной кривизны, полученные при доказательстве теоремы 1, найдем решения системы уравнений $Z = 0$. Тем самым для структурных констант (5) имеем

1. $C^i_{j,k} = 0,\ \forall\, i,j,k = 1,2,3,4;$
2. $\begin{cases} C^1_{2,3} = c, \\ C^2_{1,3} = -c; \end{cases}$
3. $\begin{cases} C^3_{1,2} = c, \\ C^2_{1,3} = -c; \end{cases}$
4. $\begin{cases} C^3_{1,2} = b, \\ C^1_{2,3} = b. \end{cases}$

Решение 1 дает алгебру Ли $4A_1$, решения 2–4 соответствуют алгебре Ли $A_{3,6} \oplus A_1$. Следовательно, только у алгебры Ли $A_{3,9} \oplus A_1$ тензор концциркулярной кривизны нетривиален. Выполняя аналогичные действия для унимодулярных неразложимых алгебр Ли, получаем требуемое.

Придерживаясь системы обозначений работы [13], сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 2.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $A_{3,3} \oplus A_1$ (см. подробнее [13]). Вычисления для остальных алгебр Ли приводить не будем в силу их громоздкости, алгоритм их рассмотрения аналогичен изложенному ниже для алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$.

Структурные константы алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$ имеют вид

$$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a, C^4_{2,3} = b, \text{где } a > 0, b \geqslant 0. \qquad (6)$$

Используя формулы (4), (1) и (2), рассчитаем компоненты тензора концциркулярной кривизны и его дивергенции

$$24Z_{2121} = 24Z_{3131} = -12a^2 + b^2,$$
$$2Z_{2141} = -ab,$$
$$24Z_{4141} = 12a^2 + b^2,$$
$$24Z_{4242} = 24Z_{4343} = -24Z_{3232} = 7b^2 + 12a^2;$$
$$2\mathrm{div}Z_{311} = -3\mathrm{div}Z_{322} = -4\mathrm{div}Z_{434} = -ab^2,$$
$$2\mathrm{div}Z_{324} = -3ba^2 - 2b^3,$$
$$2\mathrm{div}Z_{423} = -b^3 - ba^2,$$
$$2\mathrm{div}Z_{432} = 2ba^2 + b^3.$$

Решая систему уравнений $\mathrm{div}Z = 0$ относительно констант a, b, получаем $b = 0, a > 0$. Или, подставляя в (6), находим $C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a > 0$.

Выполняя аналогичные действия для остальных неунимодулярных алгебр Ли, завершаем доказательство теоремы.

Следствие 2. *Среди вещественных четырехмерных неунимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концциркулярной кривизны только алгебра $A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$ имеет тривиальный тензор концциркулярной кривизны.*

Доказательство. Рассмотрим неунимодулярные алгебры Ли с условием гармоничности тензора концциркулярной кривизны. Начнем со случая алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$. Найдем решения системы уравнений $Z = 0$. Имеем $a = 0,\ b = 0$. В силу ограничения $a > 0$ для алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$ заключаем, что $Z \neq 0$. Случаи остальных неунимодулярных алгебр Ли изучаются аналогично. В результате остается только алгебра $A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$, удовлетворяющая одновременно условиям $Z = 0$, $\mathrm{div}Z = 0$.

Библиографический список

1. Yano K. Concircular geometry, I-IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1940. — Vol. 16.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна / пер. с англ.: в 2 т. — М., 1990.

3. Клепиков П.Н., Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию концциркулярно-гармонических свойств 3-мерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Ломоносовские чтения на Алтае: сборник научных статей Международной школы-семинара (Барнаул, 5–8 ноября 2013) : в 6 ч. — Барнаул, 2013. — Ч. I.

4. Ahsan Z., Siddiqui S.A. Concircular Curvature Tensor and Fluid Spacetimes // Int. J. Theor. Phys. 2009. — Vol. 48.

5. De U.C., Pathak G. On a type of contact manifolds // Math. Balk. — 1993. — New Ser. 7. — № 2.

6. Srivastava J.P., Khajuria S. Concircular curvature tensor and relativistic gravitation // Jnanabha. — 1996. — Vol. 26.

7. Воронов Д.С., Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. Об инвариантных тензорных полях на группах Ли малых размерностей // Владикавказский математический журнал. — 2012. — Т. 14, вып. 2.

8. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. — 2008. — Т. 419, № 6.

9. Гладунова О.П., Славский В.В. Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. — 2011. — Т. 14, № 1.

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трехмерных группах Ли с нулевым квадратом тензора Схоутена-Вейля // ДАН. — 2005. — Т. 401, № 4.

11. Gladunova O.P., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Harmonic Tensors on Three-Dimensional Lie Groups

with Left-Invariant Lorentz Metric // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 198, № 5.

12. Кремлев А.Г., Николоров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. — 2008. — Т. 11, № 2.

13. Кремлев А.Г., Николоров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 1.