УДК 510.223

Об исчерпываемости сегментом и обобщениях этого понятия

С.В. Дронов

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On the Exhaustion by the Segment and Some Generalizations of This Concept

S.V. Dronov

Altai State University (Barnaul, Russia)

В работе, выполненной в аксиоматике альтернативной теории множеств, вводится обобщение понятий σ- и π-классов на случай произвольного горизонта. Для этого, фиксируя некоторый новый горизонт A, более обширный, чем исходный сегмент конечных натуральных чисел, рассматриваются объединения и пересечения семейств теоретико-множественных классов, заиндексированных элементами A. Показано, что при таком обобщении изучаемых понятий основные свойства, имеющиеся у σ- и π-классов, сохраняются. В частности, если какой-то класс одновременно является и объединением, и пересечением классов упомянутого типа, то он теоретико-множественный. В качестве применения полученных результатов решена поставленная ранее автором проблема описания всех сегментов $\mathbf{N}$, исчерпывающихся каждым из своих последовательных подсегментов. Оказывается, единственным таким сегментом является сегмент конечных натуральных чисел. Объединяя этот факт с ранее полученными результатами автора, получаем, что определить полный аналог семейства измеримых классов, замкнутого относительно произвольных объединений и пересечений при удалении горизонта, невозможно.

Ключевые слова: сегменты класса натуральных чисел, отдаление горизонта, σ- и π-классы.

The study is carried out in axiomatic of the alternative set theory, and some generalizations of σ- and π-classes concepts are defined. We fix some new horizon A which is larger than the initial segment of all finite natural numbers. Further we consider all unions and intersections of set-theoretic classes families being indexed by the elements of A. It is shown, that these generalizations of the concepts preserve basic properties of σ- and π-classes. In particular, if some class is an intersection and a union of the mentioned families simultaneously then it is a set-theoretic class. The problem of finding all of $\mathbf{N}$ segments exhausted by every correspondent subsequent subsegment which was set up in one of the earlier works of the author is solved as an application of the obtained results. It turns out that the only segment with such properties is the segment of all finite natural numbers. As a conclusion, we demonstrate that the construction of all measurable classes family full analogue closed with a respect to arbitrary intersection and unions and using a larger horizon as a main one, is impossible.

Key words: segments of the class of natural numbers, horizon shifting, σ- and π-classes.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-03

1. Вводные замечания. В альтернативной теории множеств (AST), в аксиоматике которой выполнена настоящая работа (подробное изложение основных положений AST можно найти в [1]), следующими по сложности за множествами объектами служат так называемые σ- и π-классы. Приведем два этих определения. Пусть, как обычно, через $\mathbf{FN}$ обозначен класс всех конечных натуральных чисел. Если $X_n,\ n \in \mathbf{FN}$ – какая-то цепочка теоретико-множественно определимых классов, то класс $X = \bigcup\{X_n,\ n \in \mathbf{FN}\}$ называют σ-классом, а $Y = \bigcap\{X_n, n \in \mathbf{FN}\}$, соответственно, π-классом. Такие классы подробно изучены в [1], и на них основаны многие фундаментальные конструкции AST.

Далее в работе мы будем постоянно пользоваться также понятием сегмента (начального отрезка) класса натуральных чисел $\mathbf{N}$. Это понятие неоднократно вводилось и обсуждалось в предыдущих работах автора. Термин «сегмент» будет далее всегда относиться лишь к сегментам $\mathbf{N}$. В частности, весь класс $\mathbf{N}$ и $\mathbf{FN}$ являются сег-

ментами, а также любое натуральное число – сегмент. Известно, что если сегмент теоретико-множественно определим (Sd-сегмент), то он либо совпадает со всем классом $\mathbf{N}$, либо является натуральным числом.

В настоящей работе делается попытка заменить класс $\mathbf{FN}$ в определениях σ- и π-классов на некоторый более широкий сегмент C, который, таким образом, играет роль более далекого горизонта, чем ближайший, ограничиваемый конечными натуральными числами. Конечно, любой разумный горизонт не может быть четким, поэтому для всех рассматриваемых ниже сегментов C мы потребуем, чтобы они являлись последовательными, т.е.

$$(\forall n \in \mathbf{N})\ (n \in C) \Rightarrow (n+1\ \in C).$$

Исключим из нашего рассмотрения и случай $C = \mathbf{N}$. Таким образом, мы рассматриваем только те сегменты, которые не являются Sd-классами.

Отметим, что понятие, схожее по содержанию с σ-классом, но основанное на более широком, чем $\mathbf{FN}$, горизонте C, уже рассматривалось автором в [2]. Тот факт, что некоторый сегмент A мог быть представлен в виде объединения возрастающей цепочки натуральных чисел, заиндексированной элементами сегмента C, был назван исчерпыванием A с помощью C (или же C-исчерпыванием).

Зафиксируем основной сегмент C, являющийся последовательным и не совпадающий с $\mathbf{N}$. Условимся C-последовательности обозначать полужирными буквами, например, $\mathbf{x} = \{x_n,\ n \in C\}$. При этом все такие последовательности будем считать теоретико-множественно определимыми, т.е. будем требовать, чтобы могла быть указана Sd-функция f, заданная на некотором подклассе $\mathbf{N}$, такая, что

$$(\forall n \in C)\ x_n = f(n).$$

В [3] показано, что в сделанных предположениях любая C-последовательность $\mathbf{x}$ может быть продолжена за горизонт C. Точнее, если $\varphi(x)$ любая Sd-формула, и $(\forall n \in C)\ \varphi(x_n)$, то найдется натуральное число $\alpha \notin C$ и такое продолжение ${}^*x_n,\ n \leq \alpha$ последовательности $\mathbf{x}$, что $(\forall n \leq \alpha)\ \varphi({}^*x_n)$. Условимся ${}^*x_n,\ n \leq \alpha$ называть продолжением $\mathbf{x}$ с сохранением свойства φ и будем опускать звездочку в ее обозначениях.

2. Исчерпывание сегментом. Назовем последовательность натуральных чисел $\mathbf{n}$ стабилизирующейся, если найдется такое $k_0 \in C$, что при всех $k \geq k_0,\ k \in C$ справедливо равенство $n_k = n_{k_0}$. Следуя [2], сегмент A далее будем называть C-исчерпываемым, если найдется неубывающая C-последовательность натуральных чисел, не являющаяся стабилизирующейся, для которой

$$A\ =\ \bigcup\{n_k,\ k \in C\}.$$

Такую последовательность $\mathbf{n}$ будем далее называть исчерпывающей для A. Ясно, что если мы разрешим исчерпывающей последовательности стабилизироваться, то к семейству C-исчерпываемых сегментов добавятся все натуральные числа. Данное же нами определение обеспечивает, что любой C-исчерпываемый сегмент является последовательным. Поскольку в силу отсутствия свойства стабилизации для каждого $n \in C$ найдется такое $\gamma \in C$, что $n_\gamma \geq n$, то произвольный C-исчерпываемый сегмент содержит C в качестве своего (возможно, несобственного) подсегмента.

Лемма 1. *Пусть A, B, C — последовательные сегменты, $C \subset B \subset A$. Если сегменты A, B являются C-исчерпываемыми, то A B-исчерпываем.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{n},\ \mathbf{m}$ — исчерпывающие C-последовательности для сегментов A, B соответственно. Следующее свойство очевидно:

$$(\forall b \in B)\ (\exists k_b \in C)\ b \leq m_{k_b}.$$

Докажем теперь

$$(\forall k \in C)\ (\exists b \in B)\ k_b > k. \tag{1}$$

Действительно, если это не так, то найдется $\alpha \in C$ такое, что все $k_b \leq \alpha$. Отсюда вытекает включение

$$B \subset \bigcup\{m_{k_b},\ b \in B\}\ \subset\ m_\alpha.$$

Но, в силу того, что $\mathbf{m}$ не стабилизируется, может быть указан индекс $\gamma \in C$ такой, что $m_\gamma > m_\alpha$, т.е., как следует из последней формулы, не может лежать в B. Полученное противоречие доказывает (1).

Теперь почти очевидно, что если взять $U = \bigcup\{n_{k_b},\ b \in B\}$, то получится $U = A$. Действительно, поскольку $\mathbf{n} \subset A$, то $U \subset A$. Пусть $a \in A$. Выберем $k \in C,\ b \in B$ так, чтобы $a < n_k, k < k_b$. По их выбору, $n_{k_b} \geq n_k > a$, откуда $a \in U$, что доказывает обратное включение, а вместе с ним и лемму.

Лемма 2. *Пусть A, B, C – последовательные сегменты, $C \subset B \subset A$. Если A является C-исчерпываемым, и B-исчерпываемым, то сегмент B C-исчерпываем.*

Доказательство. Пусть

$$A = \bigcup\{n_k,\ k \in C\}\ =\ \bigcup\{m_\beta,\ \beta \in B\},$$

причем последовательности $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ не стабилизируются. Для $k \in C$ через l_k обозначим тот максимальный элемент B, для которого еще справедливо $m_{l_k} \leq n_k$. Обоснование существования такого элемента в точности повторяет рассуждение, приведшее выше к (1). Проверим

$$B\ =\ \bigcup\{l_k,\ k \in C\}. \tag{2}$$

Включение справа налево здесь очевидно. Пусть β – произвольный элемент B. По построению $m_\beta \in A$, а следовательно, найдется такое $k(\beta) \in C$, что $m_\beta \leq n_{k(\beta)}$. Отсюда, с учетом монотонности $\mathbf{m}$ и определения l_k, вытекает $m_\beta \leq m_{l_{k(\beta)}}$, а значит, $\beta \leq l_{k(\beta)}$. Итак, произвольный элемент сегмента B оказался меньше одного из элементов $\mathbf{l}$, что доказывает включение в (2) слева направо. Наконец, C-последовательность $\mathbf{l}$ не может стабилизироваться в силу доказанного (2) и того, что B не является натуральным числом. Лемма доказана.

Следующая теорема дает полный ответ на вопрос, поставленный в завершающем разделе работы [2].

Теорема 1. *Если сегмент A исчерпывается каждым своим последовательным подсегментом, то $A = \mathbf{FN}$.*

Доказательство. Заметим, как это было уже ранее сделано в [2], что $\mathbf{FN}$-исчерпываемый сегмент обязательно является σ-сегментом. Пусть теперь B – последовательный сегмент с условием $\mathbf{FN} \subset B \subset A$. Тогда по лемме 2 сегмент B $\mathbf{FN}$-исчерпывается и, следовательно, σ-сегмент. Итак, у A нет ни одного последовательного подсегмента, который не был бы σ-сегментом. Теперь возьмем $\alpha \in A \setminus \mathbf{FN}$. Тогда, как это было показано в [4], может быть построен последовательный π-сегмент B такой, что $\mathbf{FN} \subset B \subset \alpha \subset A$ (причем все включения строгие). Поскольку пересечение классов последовательных π- и σ-сегментов пусто [1, с. 245], то это противоречит доказанному. Избежать противоречия можно лишь запретив существование α, а оно не может быть выбрано только при $A = \mathbf{FN}$. Теорема доказана.

Отметим, что использование результатов [4] дает возможность построить сколько угодно примеров троек сегментов $C \subset B \subset A$ таких, что A является C-исчерпываемым, а B нет. Поскольку C всегда C-исчерпываем, последнее означает, что свойство исчерпываемости не обладает выпуклостью.

3. C-последовательность как цепочка шагов к горизонту. Пусть C, как и раньше, последовательный сегмент. Если попробовать взглянуть на C-исчерпываемый сегмент A как на новый горизонт, достижимый с помощью исчерпывающей его C-последовательности шагов, то такой горизонт можно считать устроенным наиболее просто с точки зрения нечеткости из всех возможных более далеких, чем C, горизонтов. Как уже было отмечено, это наблюдение роднит понятия C-исчерпываемых и σ-сегментов. Введем теперь строго обобщение понятия σ-класса и двойственное ему обобщенное понятие.

Назовем класс X $C\sigma$-классом, если найдется теоретико-множественно определимая C-последовательность Sd-классов $X_n, n \in C$ такая, что $X = \bigcup\{X_n,\ n \in C\}$. Будем говорить, что Y $C\pi$-класс, если для подобной последовательности классов справедливо $Y = \bigcap\{Y_n,\ n \in C\}$. Очевидно, что обе упомянутые в определениях цепочки классов можно без ограничения общности считать монотонными по включению – $\mathbf{X}$ не убывающей, а $\mathbf{Y}$ — не возрастающей. Такие монотонные последовательности множеств будем называть порождающими цепочками для классов X и Y соответственно.

Ясно, что если для любого $n \in C$ потребовать дополнительно, чтобы X_n являлось сегментом, следовательно, натуральным числом, и чтобы последовательность $\mathbf{X}$ не стабилизировалась бы, то получим, что произвольный последовательный $C\sigma$-сегмент X является C-исчерпываемым сегментом. Очевидно, любой C-исчерпываемый сегмент будет $C\sigma$-классом.

В оставшейся части работы изучаются введенные сейчас понятия $C\sigma$- и $C\pi$-классов. Свойства этих классов оказываются практически теми же, что у σ- и π-классов, которые получены в [1]. Тем не менее доказательства, хотя и эксплуатирующие те же самые идеи, что в [1], приведены заново. Это связано с тем, что, во-первых, теперь мы формально находимся в новой ситуации, а во-вторых, в цитированной книге доказательства таких свойств приходится собирать по частям из большого количества разных утверждений, разбросанных по ее четвертой и пятой главам.

4. C-раскрытые классы и их свойства. Прежде всего нам потребуется обобщение еще одного понятия из [1]. Класс W назовем C-раскрытым, если для любой теоретико-множественно определимой C-последовательности $\mathbf{x} \subset W$ может быть указано множество u со свойством $\mathbf{x} \subset u \subset W$.

Лемма 3. *Пусть Sd-последовательность $u_n,\ n \in C$ составлена из множеств, причем $(\forall k \in C)\ \bigcap\{u_n,\ n \leq k\} \neq \emptyset$. Тогда*

$$\bigcap\{u_n,\ n \in C\} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Положим,

$$v_k = \bigcap\{u_n,\ n \leq k\}$$

при $k \in C$ и для каждого k выберем $z_k \in v_k$. Продолжим $z_k,\ v_k,\ k \in C$ до некоторого $\alpha \notin C$ с сохранением свойств

$$z_k \in v_k, \quad n \leq k \Rightarrow v_k \subset v_n.$$

Тогда $(\forall k \in C)\ z_\alpha \in v_\alpha \subset v_k$, откуда

$$z_\alpha \in \bigcap\{v_k,\ k \in C\} \ = \ \bigcap\{u_n,\ n \in C\},$$

и лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $W_n, n \in C$ – Sd-последовательность C-раскрытых классов такая, что для произвольного $k \in C$ пересечение любых k из этих классов непусто. Тогда и*

$$\bigcap\{W_n,\, n \in C\} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Выберем

$$z_n \in \bigcap\{W_k,\, k \leq n\},\ n \in C.$$

Положим, $Y_m = \{z_n, n \geq m\}$. Тогда при $m \in C$ справедливо $Y_m \subset W_m$. Ясно, что каждый из классов Y_m является C-последовательностью, а значит, в силу раскрытости W_m, между ним и Y_m можно поместить множество u_m. При этом для каждого $m \in C$

$$\bigcap\{u_n,\, n \leq m\} \supset \bigcap\{Y_n,\, n \leq m\} \ = \ Y_m \neq \emptyset.$$

Применив лемму 3, завершим доказательство, отметив справедливость

$$\bigcap\{W_n,\, n \in C\} \ \supset \bigcap\{u_n,\, n \in C\} \ \neq \emptyset.$$

Лемма 5. *Любой $C\pi$-класс C-раскрыт.*

Доказательство. Пусть $X_k,\ k \in C$ – порождающая цепочка для $C\pi$-класса X, а $\mathbf{y} \subset X$ – C-последовательность. При этом справедливо

$$(\forall m, n \in C)\ y_n \subset X_m,\ n \leq m \Rightarrow X_n \supset X_m.$$

Продолжим $(X_n, y_m),\ n, m \in C$ до некоторого $\alpha \notin C$ с сохранением этих свойств. Тогда очевидно $\mathbf{y} \subset X_\alpha \subset X$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 6. *Если класс X C-раскрыт, а Y является Sd-классом, то $X \setminus Y$ C-раскрыт.*

Доказательство. Возьмем любую теоретико-множественно определенную C-последовательность $\mathbf{z} \subset X \setminus Y$. Тогда, в частности, найдется множество v такое, что $\mathbf{z} \subset v \subset X$. Поскольку $\bar{Y}$ (дополнение до Y) – теоретико-множественный класс, то $u = v \cap \bar{Y}$ – множество. Очевидно $\mathbf{z} \subset u \subset X \setminus Y$. Доказательство закончено.

Теорема 2. *Если X является одновременно $C\sigma$- и $C\pi$-классом, то он теоретико-множественно определим (Sd-класс).*

Доказательство. Рассмотрим порождающую цепочку $X_k, k \in C$ класса X как $C\pi$-класса (она монотонно не убывает по включению). Применяя последовательно леммы 5 и 6, заключаем, что для произвольного $k \in C$ класс $X \setminus X_k$ C-раскрыт. При этом из условия монотонности следует

$$(\forall k \in C)\ \bigcap\{X \setminus X_j,\, j \leq k\} = X \setminus X_k.$$

Если бы при каждом k последний класс не был бы пустым, то из леммы 4 вытекало

$$\bigcap\{X \setminus X_k,\, k \in C\} \ = \ X \setminus X \neq \emptyset,$$

что невозможно. Итак,

$$(\exists m \in C)\ \bigcap\{X \setminus X_k,\, k \leq m\} = X \setminus X_m = \emptyset,$$

откуда $X = X_m$. Теорема доказана.

5. Некоторые выводы. В процессе изучения обобщения понятий σ- и π-классов был получен набор свойств, совпадающий с тем, на котором основаны все основные факты о таких классах, используемые в [1]. Это показывает, что при замене ближайшего горизонта **FN** на более далекий, обладающий «минимальными» свойствами нечеткости (в нашем случае — последовательный) горизонт, основные положения и выводы AST, скорее всего, сохранятся без изменений.

Иной вывод надлежит сделать относительно более тонких фактов, относящихся, например, к структуре семейства измеримых классов. Как известно, в классической теории меры объединение (конечное или счетное, что соответствует операциям в рамках ближайшего горизонта) измеримых классов всегда измеримо. Теорема 1 настоящей работы вместе с результатами [2] показывает, что сохранение этого свойства при отдалении горизонта невозможно. Поэтому для горизонтов, отличных от **FN**, следует строить всю эту теорию заново, или при ее построении игнорировать те неопределенности, которые возникают внутри нового горизонта в виде нечетких его подсегментов.

Следует отметить, что на неизбежность возникновения потребности в таком игнорировании при попытке отодвижения основного горизонта было указано в [1, глава 14]. В любом случае, изучение всех описанных возможностей (и, может быть, открытие каких-то иных) — дело будущих исследований.

Библиографический список

1. Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. — Новосибирск, 2004.

2. Дронов С.В. Неполные пределы и структура семейства измеримых классов в AST // Известия Алт. гос. ун-та. — 2013. — № 1/1(77).

3. Дронов С.В. О четких продолжениях последовательностей // Известия Алт. гос. ун-та. — 1999. — № 1(11).

4. Дронов С.В., Козлов С.Д. О строении изотонного группоида на классе натуральных чисел в AST // Сиб. матем. журн.— 1994. — № 35. — Вып. 3.