

**Численное решение двумерной задачи
движения воды и воздуха в тающем снеге***

В.А. Гоман, А.А. Папин, К.А. Шिशмарев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

**A Numerical Solution of a Two-Dimensional
Problem of Water and Air Movement
in Melting Snow**

V.A. Goman, A.A. Papin, K.A. Shishmarev

Altai State University (Barnaul, Russia)

Показано численное решение двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для каждой фазы, уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Лeverетта для воды и воздуха, уравнение сохранения энергии для тающего снега и уравнение движения льда. На поверхности снежного покрова задаются насыщенность воды, температура воздуха (выше температуры плавления льда), атмосферное давление воздуха, скорость воды и воздуха, на границе контакта с промерзшим грунтом вода отсутствует, заданы температура воздуха (ниже температуры плавления льда) и давление. Приведен обзор моделей снежного покрова разного уровня детализации физических процессов. Рассмотрены балансовые модели, обсуждаются проблемы получения натурных данных. Описан алгоритм численного решения двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге. Задача сводится к системе из трех уравнений относительно температуры, «приведенного» давления и насыщенности водной фазы. Для полученной системы уравнений рассмотрена начально-краевая задача и построена конечно-разностная схема на основе метода переменных направлений. Проведены расчеты тестовой задачи, определены насыщенность и температура при заданных начальных приближениях и проведен графический анализ результатов. Для насыщенности воды установлено свойство конечной скорости распространения возмущений.

Ключевые слова: тающий снег, пористая трехфазная среда, фазовые переходы, численный расчет, метод переменных направлений.

In this paper, a numerical solution of a two-dimensional problem of water and air movement in melting snow is presented. The equation of mass conservation for each phase, the equations of two-phase filtration of Musket-Leverette for water and air, equation of energy conservation for melting snow and equation of motion of ice were used as a mathematical model. Formulation of the problem is given with the following parameters: water saturation, air temperature (above the melting temperature of ice), atmospheric air pressure, water and air velocities on the snow surface, air temperature (below the melting temperature of ice), and pressure with no water at the frozen ground surface. Among other things, an overview of snow cover models for different detail levels of physical processes is presented. Balance models of snow cover are considered, and the problem of obtaining field data is discussed. Presented numerical solution of the two-dimensional problem of water and air movement in melting snow. The problem is reduced to a system of three equations for temperature, "reduced" pressure and saturation of a water phase. The obtained system of equations is considered to be an initial-boundary value problem, and the finite-difference scheme based on the alternating directions method is elaborated. Test calculations and validation are performed with saturation and temperature defined for given initial approximations. Graphical analysis of the obtained results is described. Also, finite perturbation velocity for water saturation is estimated.

Key words: melting snow, three-phase porous media, phase transitions, numerical solution, method of alternating directions.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.2-01

* Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Минобрнауки РФ № 2014/2 и гранта РФФИ № 13-01-98016.

1. Постановка задачи. Снег представляет собой пористую среду, твердый каркас которой составляют частички льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$). В снеге происходят постоянные фазовые превращения, ведущие к перераспределению фазовых масс. Для описания процесса используются уравнения сохранения массы для каждой фазы, уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Лeverетта для воды и воздуха, уравнение сохранения энергии для тающего снега (в пренебрежении сублимацией и обменом массами между водой и воздухом) и уравнение движения льда [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i^0 \alpha_i) + \operatorname{div}(\rho_i^0 \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

$$I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0,$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_3 = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad \sum_{i=1}^2 s_i = 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \vec{v}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) + \nu \frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 \rho_3^0 \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) &= -g \rho_3^0 \alpha_3 - \frac{\partial p_3}{\partial z} + \\ &+ \mu_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{2}{k} \sum_j \frac{\mu_3 \mu_j \beta_{j3}}{\mu_3 \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \mu_j \frac{\alpha_3}{\beta_3}} (u_3 - u_j), \\ -\frac{\partial u_3}{\partial z} &= \lambda^* \frac{1 - \alpha_3}{\alpha_3} p_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_i — концентрация i -й фазы; ρ_i^0 — плотность i -й фазы; \vec{u}_i — скорость i -й фазы; I_{ij} — интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема в единицу времени; ρ_i — приведенная плотность, связанная с ρ_i^0 и α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$; $\vec{v}_i = m s_i \vec{u}_i$ — скорости фильтрации воды и воздуха; s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = m s_1, \alpha_2 = m s_2, \alpha_3 = 1 - m$); $\vec{v}_3 = (1 - m) \vec{u}_3$ — расход льда; K_0 — тензор фильтрации; k_{01}, k_{02} — относительные фазовые проницаемости воды и воздуха ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0, k_{0i}|_{s_i=0} = 0$); μ_i — динамическая вязкость; p_i — давление i -й фазы; p_c — капиллярное давление; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести; θ — температура среды ($\theta_i = \theta, i = 1, 2, 3$); $c_i = \text{const} > 0$ — теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; $\nu = \text{const} > 0$ — удельная теплота плавления льда; λ_c — теплопроводность снега ($\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2, \rho_c = \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i, a_c = \text{const} > 0,$

$b_c = \text{const} > 0$); λ^* — коэффициент пропорциональности; k — безразмерный коэффициент, характеризующий геометрическую форму фазы и меняющийся от 2 до 3.

В общем случае величины $I_{ij}, \rho_i^0, \beta_{ij}$ должны быть заданы (истинные плотности, как правило, функции температуры и давления фаз). В частности, в работе [1] для замыкания системы (1)–(4) использовались гипотезы: $I_{12} = 0, I_{23} = 0, \rho_i^0 = \text{const}, i = 1, 2, 3$. Причем I_{31} считается функцией температуры $I_{31} = I_{31}(\theta)$.

Близкие к приведенной выше постановке задачи рассматривались в [2, 3].

Описанию фазовых переходов посвящены работы [2–7].

В настоящее время все большее применение находят модели, описывающие взаимодействие снежного и ледового покрова. Единой модели ледового покрова, пригодной для прикладных задач, не существует, что является существенным препятствием для надежного прогнозирования поведения ледового покрова. Наиболее изученным является поведение ледового покрова под действием поверхностных или изгибно-гравитационных волн, когда ледовый покров моделируется упругой плавающей пластиной [8, 9].

Балансовые модели строятся на основе системы вертикально осредненных уравнений снежных процессов [10]. Как правило, эта система включает в себя описание изменения высоты снежного покрова в зависимости от времени, содержание льда, воды, плотность снега, учитывает таяние снега, сублимацию, замерзание талых вод и метаморфизм снежного покрова [11].

Большое количество работ посвящено сбору и анализу натурных данных [12–28].

2. Численное решение. В данном разделе описан численный алгоритм решения двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге. За основу взята система уравнений (1)–(3), описывающая снег как многофазную пористую среду, но без учета скорости движения льда ($\vec{v}_3 = 0$). Следуя [29], введем приведенное давление p

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial \xi} \frac{k_{02}}{\mu_2 \left(\frac{k_{01}}{\mu_1} + \frac{k_{02}}{\mu_2} \right)} d\xi.$$

Рассматриваемая система уравнений сводится к системе из трех уравнений относительно приведенного давления p , насыщенности водной фазы и температуры θ

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(m \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1 \right) \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1^0 m s) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_3^0 m) + \quad (6)$$

$$+ \operatorname{div}(\rho_1^0 (K_1 \nabla p + K_0 a \nabla s + \vec{f}_0)),$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \vec{v}_i \right) \nabla \theta = \\ & = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) + \nu \frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{f} &= K \int_s^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{\bar{k}_{02}}{k} d\xi + K_2 \nabla p_c + \left(\sum_{i=1}^2 K_i \rho_i^0 \vec{g} \right), \\ K &= k K_0, \quad k = \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}, \quad \bar{k}_{0i} = \frac{k_{0i}}{\mu_i}; \\ a &= -\frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{\bar{k}_{01} \bar{k}_{02}}{k}, \quad \vec{f}_0 = K_1 \int_s^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial s} \frac{\bar{k}_{02}}{k} d\xi + K_1 \rho_1^0 \vec{g}, \\ K_i &= K_0 \bar{k}_{0i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Система уравнений (5)–(7) получена при следующих гипотезах: истинные плотности ρ_i^0 постоянны, фазовые переходы воды и льда в воздух отсутствуют, пористость m считается заданной функцией температуры $m = m(\theta)$.

Правая часть уравнения (6), с учетом представления для скорости $\vec{v} = -(K \nabla p + \vec{f}) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, может быть переписана относительно s, \vec{v} [29]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1^0 m s) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_3^0 m) + \\ & + \operatorname{div}(\rho_1^0 (K_0 a \nabla s - b \vec{v} + \vec{F})), \\ K_1 K^{-1} &= \bar{k}_{01} K_0 (k K_0)^{-1} = \bar{k}_{01} k^{-1} \equiv b(s), \\ \vec{F} &= \vec{f}_0 - b \vec{f}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом равенства (5) уравнение (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial t} &= \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} (1 + b) - b - s \right) m_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ & + \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + \vec{F}) - b'_s (\nabla s) \vec{v}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для численного решения системы (5), (7), (9) используется метод переменных направлений. В области $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\}$, зададим начальные условия для s и θ

$$s(x, y, 0) = s_0(x, y), \quad \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y), \quad (10)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} s(x, H, t) &= 0, \quad \theta(x, H, t) = \theta^+, \\ p(x, H, t) &= p_2(x, H, t) - p_c(0, \theta^+) - \end{aligned} \quad (11)$$

$$- \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial \xi} \frac{k_{02}}{(k_{01} + k_{02})} d\xi;$$

$$s(x, 0, t) = 0, \quad \theta(x, 0, t) = \theta^-,$$

$$p(x, 0, t) = p_2(x, 0, t) - p_c(0, \theta^-) - \quad (12)$$

$$- \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial \xi} \frac{k_{02}}{(k_{01} + k_{02})} d\xi;$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (x = L); \quad (13)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (x = 0). \quad (14)$$

Начальное состояние снега задается распределениями насыщенности воды и температуры. На верхней и нижней границах насыщенность равна 0, а температура имеет значения θ^+ (больше плавления льда) и θ^- (меньше замерзания воды) соответственно. Область, занимаемая снегом, определяется по значению пористости (если пористость $0 < m < 1$, то в данной точке присутствует снег).

Численное решение проводится в предположении $K_0 = \text{const}$, а относительные фазовые проницаемости определяются по формулам

$$k_{01} = s^{n_1}, \quad k_{02} = (1 - s)^{n_2}.$$

Пористость задается следующим образом [30]:

$$m = \begin{cases} 1, & \theta \geq \theta^+, \\ m^- + m_1(\theta - \theta^-), & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+, \\ m^-, & \theta \leq \theta^-, \end{cases}$$

где $n_1, n_2, m(\theta^-) \in (0, 1)$, $m_1 = (1 - m^-)/(\theta^+ - \theta^-)$ — заданные параметры.

Капиллярное давление является заданной функцией насыщенности и температуры $p_c(s, \theta) = \gamma(s) p_0(\theta)$.

Численные значения параметров задачи перечислены в таблице 1.

Рассмотрим вычислительную сетку на области Ω . Разобьем область на N_1 частей по x и на N_2 частей по y . Тогда

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x = L/N_1 \equiv l,$$

$$y_{j+1} - y_j = \Delta y = H/N_2 \equiv h.$$

Запишем систему (5), (7), (9) в следующем виде:

$$W(s, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \vec{V}(\vec{v}) \nabla \theta, \quad (15)$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) = \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1 \right) m_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (16)$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = B(s) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + \vec{F}) + \vec{U}(s, \vec{v}) \nabla s, \quad (17)$$

где

$$W(s, \theta) = \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i + \nu \rho_3^0 m_\theta \right),$$

$$\vec{V}(\vec{v}) = \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \vec{v}_i \right),$$

$$B(s) = \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} (1 + b) - b - s \right) m_\theta, \quad \vec{U}(s, \vec{v}) = -b'_s \vec{v}.$$

Рассмотрим разностную схему переменных направлений для определения температуры

$$\begin{aligned} W_{ij}^n(\theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{ij}^n)/(\tau/2) &= \lambda_{c_{i+\frac{1}{2}j}}^n(\theta_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 - \\ &- \lambda_{c_{i-\frac{1}{2}j}}^n(\theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 + \lambda_{c_{ij+\frac{1}{2}}}^n(\theta_{ij+1}^n - \theta_{ij}^n)/h^2 - \\ &- \lambda_{c_{ij-\frac{1}{2}}}^n(\theta_{ij}^n - \theta_{ij-1}^n)/h^2 + \\ &+ (\eta_{x1}^n \theta_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{x1}^n \theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_{x1}^n \theta_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l + \\ &+ (\eta_{y1}^n \theta_{ij+1}^n + \beta_{y1}^n \theta_{ij}^n + \gamma_{y1}^n \theta_{ij-1}^n)/h, \end{aligned}$$

переход со слоя $n + \frac{1}{2}$ на слой $n + 1$ описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{ij}^n(\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/(\tau/2) &= \lambda_{c_{i+\frac{1}{2}j}}^n(\theta_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 - \\ &- \lambda_{c_{i-\frac{1}{2}j}}^n(\theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 + \lambda_{c_{ij+\frac{1}{2}}}^n(\theta_{ij+1}^{n+1} + \theta_{ij}^{n+1})/h^2 - \\ &- \lambda_{c_{ij-\frac{1}{2}}}^n(\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij-1}^{n+1})/h^2 + \\ &+ (\eta_{x1}^n \theta_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{x1}^n \theta_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_{x1}^n \theta_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l + \\ &+ (\eta_{y1}^n \theta_{ij+1}^{n+1} + \beta_{y1}^n \theta_{ij}^{n+1} + \gamma_{y1}^n \theta_{ij-1}^{n+1})/h, \\ \eta_{x1}^n &= (|(V_x)_{ij}^n| - (V_x)_{ij}^n)/2, \quad \beta_{x1}^n = -|(V_x)_{ij}^n|, \\ \gamma_{x1}^n &= (|(V_x)_{ij}^n| + (V_x)_{ij}^n)/2. \end{aligned}$$

Разностная схема для определения p имеет вид

$$\begin{aligned} (p_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - p_{ij}^n)/\tau_1 &= \\ &= K_{i+\frac{1}{2}j}^n(p_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 - K_{i-\frac{1}{2}j}^n(p_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 + \\ &+ K_{ij+\frac{1}{2}}^n(p_{ij+1}^n - p_{ij}^n)/h^2 - K_{ij-\frac{1}{2}}^n(p_{ij}^n - p_{ij-1}^n)/h^2 + \\ &+ ((f_x)_{i+1j}^n - (f_x)_{i-1j}^n)/2l + ((f_y)_{ij+1}^n - (f_y)_{ij-1}^n)/2h - \\ &- (\rho_3^0/\rho_1^0 - 1) m_\theta(\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n)/\tau, \end{aligned}$$

где τ_1 – итерационный параметр. Переход со слоя $n + \frac{1}{2}$ на слой $n + 1$ описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/\tau_1 &= \\ &= K_{i+\frac{1}{2}j}^n(p_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 - K_{i-\frac{1}{2}j}^n(p_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l^2 + \\ &+ K_{ij+\frac{1}{2}}^n(p_{ij+1}^{n+1} - p_{ij}^{n+1})/h^2 - K_{ij-\frac{1}{2}}^n(p_{ij}^{n+1} - p_{ij-1}^{n+1})/h^2 + \\ &+ ((f_x)_{i+1j}^n - (f_x)_{i-1j}^n)/2l + ((f_y)_{ij+1}^n - (f_y)_{ij-1}^n)/2h - \\ &- (\rho_3^0/\rho_1^0 - 1) m_\theta(\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n)/\tau. \end{aligned}$$

Разностная схема для определения s имеет вид

$$\begin{aligned} m(s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - s_{ij}^n)/(\tau/2) &= B_{ij}^n(\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n)/\tau + \\ &+ (a_{i+\frac{1}{2}j}^n(s_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{ij}^{n+\frac{1}{2}}) - a_{i-\frac{1}{2}j}^n(s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}))K_0/l^2 + \\ &+ (a_{ij+\frac{1}{2}}^n(s_{ij+1}^n - s_{ij}^n) - a_{ij-\frac{1}{2}}^n(s_{ij}^n - s_{ij-1}^n))K_0/h^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ ((F_x)_{i+1j}^n - (F_x)_{i-1j}^n)/2l + ((F_y)_{ij+1}^n - (F_y)_{ij-1}^n)/2h + \\ &+ (\eta_{x2}^n s_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{x2}^n s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_{x2}^n s_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l + \\ &+ (\eta_{y2}^n s_{ij+1}^n + \beta_{y2}^n s_{ij}^n + \gamma_{y2}^n s_{ij-1}^n)/h, \end{aligned}$$

переход со слоя $n + \frac{1}{2}$ на слой $n + 1$ описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} m(s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n+\frac{1}{2}})/(\tau/2) &= B_{ij}^n(\theta_{ij}^{n+1} - \theta_{ij}^n)/\tau + \\ &+ (a_{i+\frac{1}{2}j}^n(s_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - s_{ij}^{n+\frac{1}{2}}) - a_{i-\frac{1}{2}j}^n(s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - s_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}))K_0/l^2 + \\ &+ (a_{ij+\frac{1}{2}}^n(s_{ij+1}^{n+1} - s_{ij}^{n+1}) - a_{ij-\frac{1}{2}}^n(s_{ij}^{n+1} - s_{ij-1}^{n+1}))K_0/h^2 + \\ &+ ((F_x)_{i+1j}^n - (F_x)_{i-1j}^n)/2l + ((F_y)_{ij+1}^n - (F_y)_{ij-1}^n)/2h + \\ &+ (\eta_{x2}^n s_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_{x2}^n s_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_{x2}^n s_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}})/l + \\ &+ (\eta_{y2}^n s_{ij+1}^{n+1} + \beta_{y2}^n s_{ij}^{n+1} + \gamma_{y2}^n s_{ij-1}^{n+1})/h, \\ \eta_{x2}^n &= (|(U_x)_{ij}^n| - (U_x)_{ij}^n)/2, \quad \beta_{x2}^n = -|(U_x)_{ij}^n|, \\ \gamma_{x2}^n &= (|(U_x)_{ij}^n| + (U_x)_{ij}^n)/2. \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления следующий: сначала находят значения температуры, затем соответствующие давление и насыщенность. Значения на $n + \frac{1}{2}$ слое находятся методом прогонки по x , а значения на $n + 1$ слое – прогонкой по y .

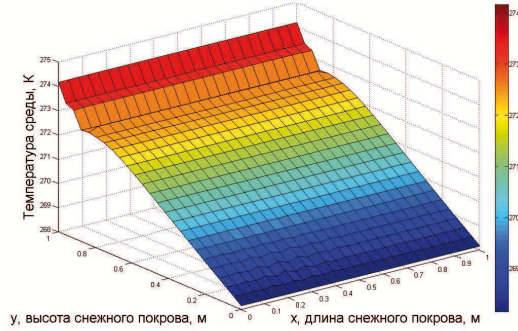


Рис. 1. График изменения температуры

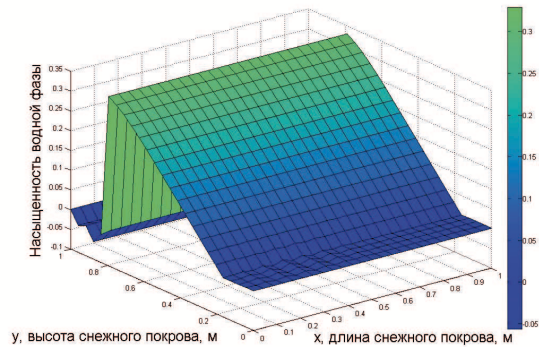


Рис. 2. График изменения насыщенности воды

При расчетах использовались следующие значения: $\rho_1^0 = 103 \text{ кг м}^{-3}$, $\rho_2^0 = 1.2928 \text{ кг м}^{-3}$, $\rho_3^0 = 0.925 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3}$ – истинные плотности воды, воздуха и льда, $K_0 = 10^{-9} \text{ м}^2$ – тензор фильтрации, $\mu_1 = 0.17865 \text{ кг м}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\mu_2 = 1720 \times 10^{-8} \text{ кг м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ – коэффициенты динамической вязкости воды и воздуха, $c_1 = 4.18 \times 10^3 \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$, $c_2 = 29.2 \times 10^3 \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$, $c_3 = 2.04 \times 10^3 \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$ – теплоемкости воды, воздуха и льда при постоянном давлении, $\nu = 6009/18 \times 10^{-3} \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$ – удельная теплота плавления льда, $\theta^- = 268.15 \text{ К}$, $\theta^+ = 273.15 \text{ К}$.

На рисунках 1–2 представлены графики примеров расчетов изменения температуры и насыщенности для тестовой задачи с заданным полем

скоростей. Вычисления проводились на равномерной сетке с 25 узлами как по x , так и по y . Длина и высота снежного покрова равны 1 м, шаг по пространственным переменным составил 0.0416. Задавались начальные распределения температуры и насыщенности θ_0 и s_0 . На верхней и нижней границе задавались краевые условия первого рода.

Численный расчет насыщенности с временным шагом $\tau = 0.1$ представлен на рисунке 2. За конечное время значение насыщенности воды становится равным нулю (вода замерзает).

Авторы статьи признательны С.С. Кузикову за обсуждение задачи и конструктивные замечания.

Библиографический список

1. Папин А.А., Коробкин А.А., Гоман В.А. Движение воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алт. гос. ун-та. — 2012. — № 1/1(73).
2. Трофимова Е.Б. Математическая модель снежного покрова как многофазной среды // Тр. IV Всесоюзн. гидролог. съезда. — 1976. — Т. 6.
3. Денисов Ю.М. Перенос тепла и влаги в почве (неподвижной пористой среде) // Тр. САНИГМИ. — 1968. — Вып. 39(54).
4. Lou D., Hammond W.D. Heat and Mass Transfer for Ice Particle Ingestion Inside Aero-Engine // Journal of Turbomachinery. — ASME. — 2011. — July. — Vol. 133.
5. Tantserev E., Cristophe Y., Galerne, Podladchikov Y. Multiphase flow in multi-component porous visco-elastic media // The Fourth Biot Conference on Poromechanics. — 2009.
6. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. — 2000. — №31.
7. Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. — 1996.
8. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн // Известия Алт. гос. ун-та. — 2012. — № 1/1(73).
9. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Аналитическое и численное исследование квазиизотермической задачи взаимодействия ледового покрова канала и поверхностных волн // Известия Алт. гос. ун-та. — 2012. — № 1/2(73).
10. Gelfan A.N., Pomeroy J.W., Kuchment L.S. Modeling Forest Cover Influences on Snow Accumulation, Sublimation, and Melt // Journal of Hydrometeorology. — 2004. — October. — Vol. 5.
11. Kuchment L.S., Romanov P., Gelfan A.N., Demidov V.N. Use of satellite-derived data for characterization of snow cover and simulation of snowmelt runoff through a distributed physically based model of runoff generation // Hydrol. Earth Syst. Sci. — 2010. — October. — Vol. 10.
12. Koskinen J.T., Pulliainen J.T., Luoju K.P., Takala M. Monitoring of Snow-Cover Properties During the Spring Melting Period in Forested Areas // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing — 2010. — January. — Vol. 48.
13. Marechal N., Guerin E., Galin E., Merillou N., Merillou S. Heat Transfer Simulation for Modeling Realistic Winter Sceneries // Eurographics. — 2010. — №2. — Vol. 29.
14. Farinotti D., Magnusson J., Huss M., Bauder A. Snow accumulation distribution inferred from time-lapse photography and simple modelling // Hydrological Processes. — 2010. — March. — Vol. 24.
15. Reusser D.E., Zehe E. Low-cost monitoring of snow height and thermal properties with inexpensive temperature sensors // Hydrological Processes. — 2011. — December. — Vol. 25.
16. Woods R.A. Low-cost monitoring of snow height and thermal properties with inexpensive temperature sensors // Advances in Water Resources — 2009. — Vol. 32.
17. Sturm M., Holmgren J., Liston G. A seasonal snow cover classification-system for local to global applications // J Clim. — 1995. — Vol. 8(5).
18. Floyd W., Weiler M. Measuring snow accumulation and ablation dynamics during rain-on-snow events: innovative measurement techniques // Hydrological Processes. — 2008. — October. — Vol. 22.

19. Green R.O., Painter T.H., Roberts D.A., Dozier J. Measuring the expressed abundance of the three phases of water with an imaging spectrometer over melting snow // *Water Resources Research*. — 2006. — Vol. 42.
20. Luce C.H., Tarboton D.G., Cooley K.R. Sub-grid parameterization of snow distribution for an energy and mass balance snow cover model // *Hydrological Processes*. — 1999. — Vol. 13.
21. Hock R., Holmgren B. A distributed surface energy-balance model for complex topography and its application to Storglaciären, Sweden // *Journal of Glaciology*. — 2005. — Vol. 51. — № 172.
22. Prévost M., Barry R., Stein J., Plamondon A.P. Snowmelt modeling in a balsam fir forest: comparison between an energy balance model and other simplified models // *Can. J. For. Res.* — 1991. — Vol. 21.
23. Munro D.S. A surface energy exchange model of glacier melt and net mass balance // *International Journal of Climatology*. — 1991. — Vol. 11.
24. Gallée H. Air-snow interactions and the surface energy and mass balance over the melting zone of west Greenland during the Greenland Ice Margin Experiment // *International Journal of Climatology*. — 1997. — June. — Vol. 102. — № D12.
25. Mundy C.J., Barber D.G., Michel C. Variability of snow and ice thermal, physical and optical properties pertinent to sea ice algae biomass during spring // *Journal of Marine Systems*. — 2005. — November. — Vol. 58.
26. Thériault J.M., Stewart R.E., Milbrandt J.A., Yau M.K. On the simulation of winter precipitation types // *Journal of Geophysical Research*. — 2006. — September. — Vol. 111.
27. Finger D., Pellicciotti F., Konz M., Rimkus S., Burlando P. The value of glacier mass balance, satellite snow cover images, and hourly discharge for improving the performance of a physically based distributed hydrological model // *Water Resources Research*. — 2011. — July. — Vol. 47.
28. Takala M., Pulliainen J., Huttunen M., Hallikainen M. Detecting the onset of snow-melt using SSM/I data and the self-organizing map // *International Journal of Remote Sensing*. — 2008. — February. — Vol. 29. — № 3.
29. Коробкин А.А., Папин А.А., Хабахпашева Т.И. Математические модели снежно-ледового покрова. — Барнаул, 2013.
30. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. — Барнаул, 2009.