

*А. Д. Матвеев, А. Н. Гришанов***Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек****A. D. Matveev, A. N. Grishanov***Single and Double Grid Curvilinear Elements of Three-Dimensional Cylindrical Panels and Shells**

Изложены процедуры построения однородных односеточных и композитных двухсеточных криволинейных конечных элементов для расчета трехмерных упругих цилиндрических панелей и оболочек. Матрицы жесткости и узловые усилия криволинейных конечных элементов определяются в локальных декартовых системах координат, а системы уравнений метода конечных элементов для дискретных моделей оболочек и панелей — в глобальных декартовых системах координат. Связь между локальными и глобальными системами координат осуществляется с помощью матриц вращений, которые определяются только для векторов узловых перемещений криволинейных конечных элементов. При построении основных соотношений криволинейных конечных элементов для аппроксимации перемещений используются известные полиномы и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат данных конечных элементов. Достоинства предлагаемых элементов заключаются в следующем.

Одно- и двухсеточные криволинейные элементы описывают трехмерное напряженное состояние цилиндрических оболочек и панелей, учитывают их сложный характер закрепления и нагружения. Двухсеточные элементы учитывают неоднородную и микронеоднородную структуру панелей и оболочек и порождают дискретные модели малой размерности.

Ключевые слова: композиты, упругость, цилиндрические оболочки, панели, одно- и двухсеточные криволинейные конечные элементы.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-19

Введение. В данной работе для расчета однородных и композитных цилиндрических панелей и оболочек по методу конечных элементов с применением мелких разбиений предложены криволинейные одно- и двухсеточные конечные элементы 1, 2 и 3-го порядков. Двухсеточные конечные элементы формы прямоугольного параллелепипеда для анализа деформирования упругих тел неоднородной струк-

Construction of homogeneous single-grid and composite double-grid curvilinear finite elements for calculating parameters of three-dimensional cylindrical panels and shells is presented. In this paper, stiffness matrix and nodal forces of curvilinear finite elements are determined in local Cartesian reference systems. The set of equations of finite element method for discrete models of shells and panels utilizes global Cartesian reference system. Relation between local and global coordinate systems is carried out using the rotation matrix defined only for vectors of curvilinear finite elements nodal displacements. Relations for finite element characteristics of cuboid for further displacement approximation are based on known polynomials and equations of three-dimensional elasticity problem in local Cartesian reference system.

The proposed single-grid and double-grid curvilinear elements provide three-dimensional stress state description while taking into account complexity of attaching and loading. Double grid curvilinear elements consider the heterogeneous and micro-inhomogeneous structure of panels and shells and serve as the basis for discrete models of small dimension.

Key words: composites, elasticity, cylindrical shells, panels, single — grid and multi — grid curvilinear finite elements.

туры изучены в работах [1, с. 3; 2, с. 161]. Здесь рассматриваются следующие конечные элементы. Криволинейный односеточный конечный элемент V_e 1-го порядка размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ показан на рисунке 1, где α_e — угол раствора; $O_1 x_1 y_1 z_1$ — локальная декартова система координат и $z_1 O_1 y_1$ — плоскость симметрии конечного элемента V_e ; cd — ось цилиндрической оболочки; R_1^e, R_2^e — радиусы

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00053).

нижней и верхней поверхностей конечных элементов V_e ; h_z^e — толщина; h_y^e — длина конечного элемента V_e ; $h_x^e = \alpha_e R_1^e$, узлы отмечены точками. Прямоугольники размерами $h_z^e \times h_y^e$ есть боковые грани, криволинейные прямоугольники со сторонами h_z^e , $\alpha_e R_1^e$, $\alpha_e R_2^e$ — торцевые грани конечного элемента V_e . Форма конечного элемента V_e есть прямая призма высотой h_y^e , основанием которой является криволинейный прямоугольник. Однородные односеточные криволинейные элементы 2-го и 3-го порядков и композитные двухсеточ-

ные конечные элементы 1, 2 и 3-го порядков имеют такую же геометрическую форму, как и конечного элемента V_e (рис. 1). Криволинейный односеточный конечный элемент 2-го порядка имеет 20 узлов (рис. 2а), конечный элемент 3-го порядка — 32 узла (рис. 2б), узлы отмечены точками. При мелком разбиении углы раствора предлагаемых криволинейных конечных элементов малы (угол α_e мал; рис. 1), поэтому формы криволинейных конечных элементов мало отличаются от форм прямоугольных параллелепипедов [3, с. 136; 4, с. 212].

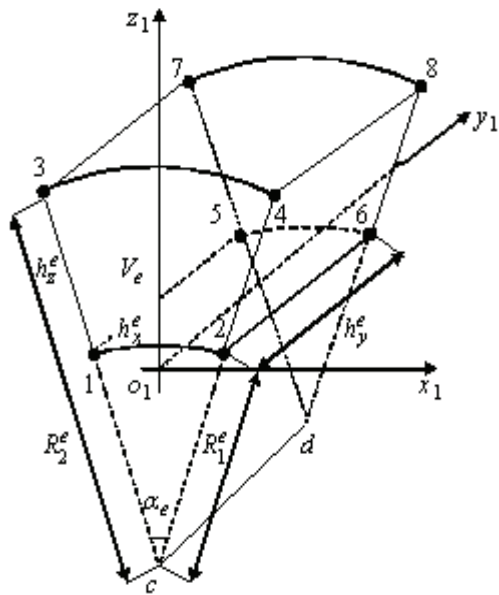


Рис. 1. Конечный элемент V_e 1-го порядка

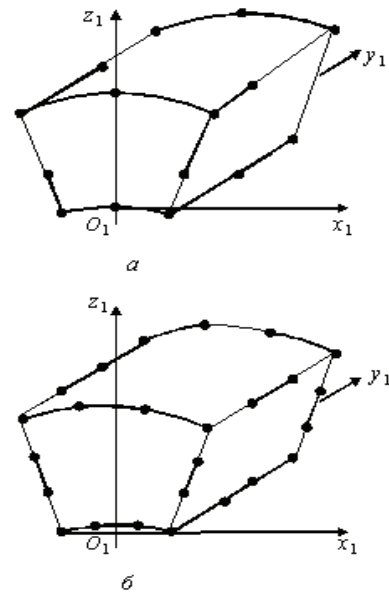


Рис. 2. Конечные элементы 2-го и 3-го порядков

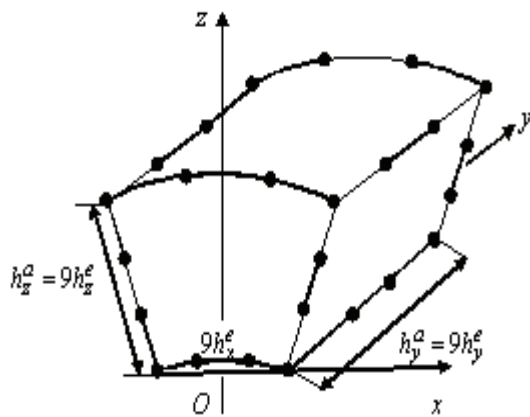


Рис. 3. Двухсеточные конечные элементы V_a (V_s) 3-го порядка

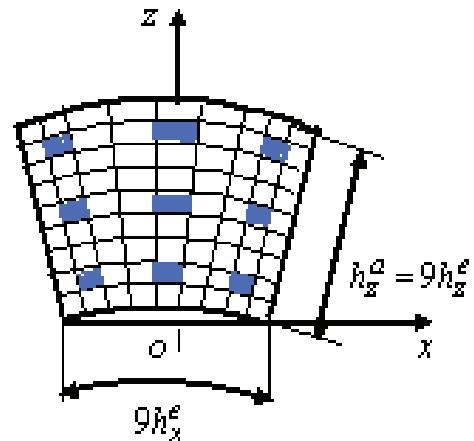


Рис. 4. Сечение двухсеточного конечного элемента V_a (V_s)

В связи с этим для аппроксимации перемещений криволинейных конечных элементов используем известные полиномы 1, 2 и 3-го порядков (которые применяются при построении основных соотношений

элементов формы прямоугольного параллелепипеда) и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат конечных элементов (рис. 1–3).

Достоинства предлагаемых конечных элементов состоят в следующем. Криволинейные одно- и двухсеточные конечные элементы учитывают сложный характер крепления и нагружения панелей и оболочек, описывают трехмерное напряженное состояние, сколь угодно точно (при мелких разбиениях) представляют упругое поведение панелей и оболочек в случае действия локальных нагрузок. Двухсеточные конечные элементы учитывают неоднородную и микронеоднородную структуру панелей и оболочек, образуют дискретные модели, размерности которых на несколько порядков меньше размерностей базовых моделей, напряжения могут быть определены в любом компоненте неоднородной структуры оболочки и панели. Реализация метода конечных элементов для двухсеточных дискретных моделей оболочек и панелей требует меньше памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

1. Односеточные криволинейные элементы.

Рассмотрим односеточный однородный криволинейный конечный элемент V_e 1-го порядка со сторонами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (см. рис. 1). Перемещения, деформации и напряжения элемента V_e удовлетворяют соотношениям Коши и закону Гука [3, с. 300], которые отвечают трехмерной задаче теории упругости [5, с. 40], т.е. во всей области для конечного элемента V_e реализуется трехмерное напряженное состояние. Для аппроксимирующих функций перемещений u_e, v_e, w_e элемента V_e используем полином 1-го порядка, записанный в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 1),

$$u_e, v_e, w_e = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4z_1 + a_5x_1y_1 + a_6z_1x_1 + a_7z_1y_1 + a_8x_1y_1z_1. \quad (1)$$

Обозначим: u_i^1 — перемещение узла i конечного элемента V_e в направлении оси O_1x_1 ; x_1^i, y_1^i, z_1^i — координаты i -го узла конечного элемента V_e ; $i=1, \dots, 8$; номера узлов отмечены на рисунке 1. Коэффициенты a_i в (1) находим из условия $u_e(x_1^i, y_1^i, z_1^i) = u_i^1$, $i=1, \dots, 8$, которое представим $[C]\mathbf{a} = \mathbf{u}$, где $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_8\}^T$, $\mathbf{u} = \{u_1^1, \dots, u_8^1\}^T$; $[C]$ — матрица размерности 8×8 ; T — транспонирование. Отсюда следует: $\mathbf{a} = [C]^{-1}\mathbf{u}$. Используя найденный вектор \mathbf{a} в (1), определяем функцию u_e . Аналогично строим аппроксимирующие функции перемещений v_e, w_e конечно-го элемента V_e , которые запишем

$$u_e = \sum_{i=1}^8 N_i u_i^1, \quad v_e = \sum_{i=1}^8 N_i v_i^1, \quad w_e = \sum_{i=1}^8 N_i w_i^1, \quad (2)$$

где u_i^1, v_i^1, w_i^1 — перемещения узла i ; $N_i = N_i(x_1, y_1, z_1)$ — функция формы i -го узла конечного элемента V_e ; $i=1, \dots, 8$.

Вектор функций перемещений $\mathbf{U}_e = \{u_e, v_e, w_e\}^T$ конечного элемента V_e представим

$$\mathbf{U}_e = [N_e] \delta_e^1, \quad (3)$$

где δ_e^1 — вектор неизвестных конечного элемента V_e , имеющий в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ структуру

$$\delta_e^1 = \{u_1^1, \dots, u_8^1, v_1^1, \dots, v_8^1, w_1^1, \dots, w_8^1\}^T, \quad (4)$$

$[N_e]$ — матрица функций формы конечного элемента V_e .

Полную потенциальную энергию конечного элемента V_e запишем в матричной форме

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_e^T \sigma_e dV - \int_{V_e} U_e^T F_e dV - \int_{S_e} U_e^T q_e dS, \quad (5)$$

где $\varepsilon_e = \{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{z_1}, \gamma_{x_1y_1}, \gamma_{y_1z_1}, \gamma_{x_1z_1}\}^T$;

$\sigma_e = \{\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{z_1}, \tau_{x_1y_1}, \tau_{y_1z_1}, \tau_{x_1z_1}\}^T$ — векторы функций деформаций и напряжений [3, с. 300], найденных в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ конечного элемента V_e ; $\mathbf{F}_e, \mathbf{q}_e$ — векторы объемных и поверхностных сил конечного элемента V_e ; V_e, S_e — область и поверхность конечного элемента V_e .

Соотношения Коши и закон Гука для конечного элемента V_e имеют вид

$$\varepsilon_e = [B_e] \delta_e^1, \quad \sigma_e = [D_e] \varepsilon_e, \quad (6)$$

где $[B_e], [D_e]$ — матрицы деформаций и модулей упругости конечного элемента V_e .

Подставляя (3), (6) в (5), получаем

$$W_e(\delta_e^1) = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\delta_e^1)^T [B_e]^T [D_e] [B_e] \delta_e^1 dV - \int_{V_e} (\delta_e^1)^T [N_e]^T F_e dV - \int_{S_e} (\delta_e^1)^T [N_e]^T q_e dS. \quad (7)$$

Из выполнения условия $\partial W_e(\delta_e^1) / \partial \delta_e^1 = 0$ следует $[K_e^1] \delta_e^1 = \mathbf{P}_e^1$,

$$\text{где } [K_e^1] = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e] [B_e] dV,$$

$\mathbf{P}_e^1 = \int_{V_e} [N_e]^T F_e dV - \int_{S_e} [N_e]^T q_e dS$, здесь $[K_e^1]$ — матрица жесткости и \mathbf{P}_e^1 — вектор узловых сил конечного элемента V_e (которые определяются в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ конечного элемента V_e).

Процедуры построения односеточных криволинейных конечных элементов 2, 3-го порядков, имеющих такую же форму, как и конечный элемент V_e (рис. 1), аналогичны выше описанной.

2. Композитные криволинейные двухсеточные элементы. Рассмотрим трехмерные композитные криволинейные двухсеточные конечные элементы 1, 2, 3-го порядков двух типов.

2.1. Изложим процедуру построения двухсеточного конечного элемента 3-го порядка 1-го типа, который обозначим через V_a (рис. 3), где $Oxyz$ — локальная декартовая система координат двухсеточного конечного элемента V_a ; zOy — плоскость симметрии; h_z^a — толщина; h_y^a — длина двухсеточного конечного элемента V_a . Считаем, что между компонентами неоднородной структуры двухсеточного конечного

элемента V_a связи идеальны. Функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов двухсеточного конечного элемента V_a удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, которые отвечают трехмерной задаче теории упругости, т. е. во всей области двухсеточный конечный элемент V_a реализуется трехмерное напряженное состояние. Область двухсеточного конечного элемента V_a представляем базовым разбиением R_a , которое состоит из однородных односеточных криволинейных элементов V_e 1-го порядка (рис. 1). Базовое разбиение R_a учитывает неоднородную структуру двухсеточного конечного элемента V_a и порождает мелкую трехмерную узловую сетку h_a . На мелкой сетке h_a определяем крупную сетку H_a . Узлы крупной сетки H_a на рисунке 3 отмечены точками — 32 узла. На сетке H_a строим аппроксимирующие функции u_a, v_a, w_a двухсеточного конечного элемента V_a , используя полином 3-го порядка (записанный в локальной декартовой системе координат $Oxyz$; рис. 3)

$$u_a, v_a, w_a = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6zx + a_7zy + a_8xyz + a_9x^2 + a_{10}y^2 + a_{11}z^2 + a_{12}x^2y + a_{13}x^2z + a_{14}y^2x + a_{15}y^2z + a_{16}z^2x + a_{17}z^2y + a_{18}x^3 + a_{19}y^3 + a_{20}z^3 + a_{21}x^3y + a_{22}x^3z + a_{23}y^3x + a_{24}y^3z + a_{25}z^3x + a_{26}z^3y + a_{27}x^2yz + a_{28}y^2xz + a_{29}z^2xy + a_{30}x^3yz + a_{31}y^3xz + a_{32}z^3xy.$$

По процедуре, аналогичной процедуре п. 1, на сетке H_a для двухсеточного конечного элемента определяем аппроксимирующие функции перемещений u_a, v_a, w_a вида

$$u_a = \sum_{i=1}^{32} N_i u_i, \quad v_a = \sum_{i=1}^{32} N_i v_i, \quad w_a = \sum_{i=1}^{32} N_i w_i, \quad (7)$$

где u_i, v_i, w_i — перемещения i -го узла крупной сетки H_a ; $N_i = N_i(x, y, z)$ — функция формы i -го узла сетки H_a ; $i = 1, \dots, 32$.

Вектор δ_a неизвестных крупной сетки H_a в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ имеет структуру

$$\delta_a = \{u_1, \dots, u_{32}, v_1, \dots, v_{32}, w_1, \dots, w_{32}\}^T. \quad (8)$$

Пусть ось O_1y_1 конечного элемента (расположенного в базовой модели двухсеточного конечного элемента V_a ; рис. 1) параллельна оси Oy (рис. 3) и между осями O_1x_1 и Ox угол равен β_e , вектор $\mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e$ неизвестных конечных элементов V_e в декартовой системе координат $Oxyz$ имеет структуру

$$\delta_e = \{u_1^e, \dots, u_8^e, v_1^e, \dots, v_8^e, w_1^e, \dots, w_8^e\}^T, \quad (9)$$

где u_i^e, v_i^e, w_i^e — перемещения узла i конечного элемента V_e , $i = 1, \dots, 8$.

Между векторами $\delta_e^1, \mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e$ имеем связь $\delta_e^1 = [T_e] \delta_e$ [3, с. 237], где $[T_e]$ — матрица вращений [4, с. 64], размерности 24×24 , в силу (4), (9) имеет вид

$$[T_e] = \begin{bmatrix} [E_1] & [E_0] & [E_2] \\ [E_0] & [E] & [E_0] \\ -[E_2] & [E_0] & [E_1] \end{bmatrix}, \quad (10)$$

здесь $[E_0], \dots, [E_2]$ — матрицы размерности 8×8 ; $[E_0]$ — нулевая и $[E]$ — единичная матрицы; $[E_1] = \cos \beta_e [E]$, $[E_2] = \sin \beta_e [E]$.

Используя равенство $\delta_e^1 = [T_e] \delta_e$, получим соотношения [3, с. 237]

$$[K_e] = [T_e]^T [K_e^1] [T_e], \quad \mathbf{P}_e = [T_e]^T \mathbf{P}_e^1, \quad (11)$$

где $[K_e]$ — матрица жесткости и \mathbf{P}_e — вектор узловых сил конечного элемента V_e , определяемые в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ двухсеточного конечного элемента V_a (рис. 3).

Полную потенциальную энергию \dot{I}_a для базового разбиения R_a запишем

$$\Pi_a = \sum_{e=1}^m \left(\frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (12)$$

где m — общее число конечного элемента V_e базового разбиения R_a .

С помощью аппроксимаций (7) вектор $\mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e$ выражаем через вектор δ_a

$$\delta_e = [A_e^a] \delta_a, \quad (13)$$

где $[A_e^a]$ — прямоугольная матрица, размерности 24×96 , $e = 1, \dots, m$.

Используя (13) в (12), из условия $\partial \Pi_a(\delta_a) / \partial \delta_a = 0$ получаем $[K_a] \delta_a = \mathbf{F}_a$, где

$$[K_a] = \sum_{e=1}^m [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \quad \mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^m [A_e^a]^T \mathbf{P}_e, \quad (14)$$

$[K_a]$ — матрица жесткости; \mathbf{F}_a — вектор узловых сил двухсеточного конечного элемента V_a 1-го типа.

2.2. Кратко рассмотрим процедуру построения двухсеточного конечного элемента 3-го порядка 2-го типа, который обозначим через V_s . Двухсеточный конечный элемент V_s имеет размеры, форму и неоднородную структуру, как и двухсеточный конечный элемент V_a (рис. 3). В данной процедуре используем мелкую h_a и крупную H_a сетки, базовое разбиение R_a и аппроксимирующие функции перемещений u_a, v_a, w_a двухсеточного конечного элемента V_a (см. п. 2.1), т. е. δ_a — вектор узловых неизвестных двухсеточного конечного элемента V_s . На базовом разбиении R_a двухсеточного конечного элемента V_s с помощью метода конденсации [4, с. 248] строим суперэлемент G_s . Систему уравнений для разбиения R_a представим

$$[A_{11}] \delta_1 + [A_{12}] \delta_s = \mathbf{B}_1, \quad [A_{21}] \delta_1 + [A_{22}] \delta_s = \mathbf{B}_2, \quad (15)$$

где δ_1, δ_s — векторы перемещений соответственно внутренних и граничных узлов сетки h_a разбиения R_a суперэлемента G_s ; $[A_{11}], [A_{22}]$ ($[A_{12}], [A_{21}]$) — квадратные (прямоугольные) матрицы; $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ — векторы узловых сил.

Из (15) для суперэлемента G_s получаем систему уравнений $[K_s] \delta_s = \mathbf{P}_s$, где $[K_s]$ — матрица жесткости; \mathbf{P}_s, δ_s — векторы узловых сил и неизвестных суперэлемента G_s ; $[K_s] = [A_{22}] - [A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}]$, $\mathbf{P}_s = \mathbf{B}_2 - [A_{21}][A_{11}]^{-1}\mathbf{B}_1$. Полную потенциальную энергию Π_s суперэлемента G_s запишем в виде

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \delta_s^T [K_s] \delta_s - \delta_s^T \mathbf{P}_s. \quad (16)$$

Используя (7), между векторами δ_s, δ_a установим связь

$$\delta_s = [A_s] \delta_a, \quad (17)$$

где $[A_s]$ — прямоугольная матрица; δ_a — вектор узловых неизвестных двухсеточного конечного элемента V_s .

Подставляя (17) в (16), из условия $\partial \Pi_s / \partial \delta_a = 0$ получаем $[K_s] q_a = F_s$, где

$$[K_s] = [A_s]^T [K_s] [A_s], \quad F_s = [A_s]^T \mathbf{P}_s, \quad (18)$$

$[K_s]$ — матрица жесткости и F_s — вектор узловых сил двухсеточного конечного элемента V_s 2-го типа.

Отметим, что матрицы жесткости и векторы узловых сил двухсеточного конечного элемента V_a (V_s) определяются в локальной декартовой системе координат $Ox_0y_0z_0$ (рис. 3). Процедуры построения криволинейных двухсеточных конечных элементов 1-го и 2-го порядков двух типов, имеющих форму, как двухсеточный конечный элемент V_a (V_s), аналогичны выше описанным процедурам.

3. Результаты расчетов. Рассмотрим в глобальной декартовой системе координат $O_2x_0y_0z_0$ расчет композитной прямоугольной цилиндрической панели V_0 , угол раствора которой $\alpha_0 = \pi/2$; $O_2x_0y_0$ — плоскость симметрии.

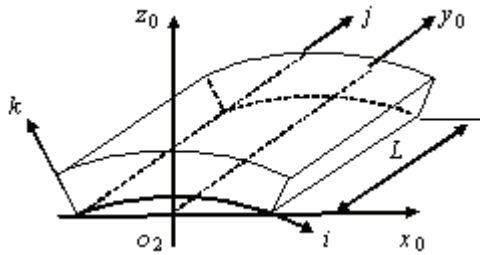


Рис. 5. Панель V_0

При $y_0 = 0$ панель закреплена. Базовая дискретная модель панели состоит из однородных изотропных конечного элемента V_e (рис. 1), которая порождает криволинейную сетку i, j, k размерами $82 \times 82 \times 19$ (рис. 5). Для конечного элемента V_e имеем: $\alpha_e = \alpha_0/81$, $h_x^e = \alpha_e R_1^e$, $h_y^e = L/81 = 0,5$, $h_z^e = h/18 = 0,278$, где $L = 40,5$, $h = 5$, L — длина; h — толщина панели. Внешний и внутренний радиусы панели равны 29 и 24. Двухсеточная дискретная модель панели состоит из двухсеточного конечного элемента V_s 3-го порядка 2-го типа размерами $9h_x^e \times 9h_y^e \times 9h_z^e$ (рис. 3), $h_x^a = 9h_x^e$, $h_y^a = 9h_y^e$. Двухсеточный конечный элемент V_s армирован волокнами (с криволинейным сечением со сторонами h_x^e, h_z^e), направленными по оси Oy , сечения волокон закрашены (рис. 4). Расстояние между волокнами по дуговой координате равно $2h_x^e$, по толщине двух-

сеточного конечного элемента V_s — $2h_z^e$. Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокон — 10, коэффициент Пуассона — 0,3. На внешней поверхности панели в узлах i, j, k заданы силы $q_z = 0,01$, где $k = 19$, $i = 46 + 9(\alpha - 1)$, $j = 10 + 9(\beta - 1)$, $\alpha = 1, \dots, 5$, $\beta = 1, \dots, 9$. Ось O_2y_0 (рис. 5) параллельна оси Oy (см. рис. 3), угол между осями O_2x_0 и Ox равен β_s , вектор δ_a^0 узловых неизвестных двухсеточного конечного элемента V_s в глобальной декартовой системе координат $O_2x_0y_0z_0$ имеет вид

$$\delta_a^0 = \{u_1^0, \dots, u_{32}^0, v_1^0, \dots, v_{32}^0, w_1^0, \dots, w_{32}^0\}^T, \quad (19)$$

где u_i^0, v_i^0, w_i^0 — перемещения узла i двухсеточного конечного элемента V_s ; $i = 1, \dots, 32$.

С помощью матрицы вращений $[T_s]$, размерности 96×96 , между векторами δ_a, δ_a^0 установим связь $\delta_a = [T_s] \delta_a^0$. Матрица $[T_s]$ в силу (8), (19) имеет вид

$$[T_s] = \begin{bmatrix} [E_1^s] & [E_0^s] & [E_2^s] \\ [E_0^s] & [E_s] & [E_0^s] \\ -[E_2^s] & [E_0^s] & [E_1^s] \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $[E_0^s], \dots, [E_2^s]$ — матрицы размерности 32×32 ; $[E_0^s]$ — нулевая и $[E_s]$ — единичная матрицы; $[E_1^s] = \cos \beta_s [E_s]$, $[E_2^s] = \sin \beta_s [E_s]$.

Используя равенство $\delta_a = [T_s] \delta_a^0$, построим соотношения [3, с. 237]

$$[K_s^0] = [T_s]^T [K_s] [T_s], \quad F_s^0 = [T_s]^T F_s, \quad (21)$$

где $[K_s^0]$ — матрица жесткости; F_s^0 — вектор узловых сил двухсеточного конечного элемента V_s , которые определяются в глобальной декартовой системе координат $O_2x_0y_0z_0$ панели V_0 .

Для двухсеточного конечного элемента V_s находим угол β_s и по формуле (20) вычисляем матрицу $[T_s]$; $s = 1, \dots, N$; N — общее число двухсеточного конечного элемента V_s . Используя (21), определяем матрицы жесткости $[K_s^0]$ и векторы узловых сил F_s^0 двухсеточного конечного элемента V_s , $s = 1, \dots, N$, с помощью которых строим систему уравнений метода конечных элементов для дискретной модели панели V_0 .

Анализ результатов показывает, что максимальные перемещения двухсеточной $w_h = 3,694$ и базовой $w_0 = 4,002$ моделей отличаются на 7,7%. Максимальные эквивалентные напряжения двухсеточной $\sigma_h = 0,424$ и базовой $\sigma_0 = 0,431$ моделей отличаются на 1,6%. Число неизвестных базовой модели равно 378594, двухсеточной — 4968. Ширина ленты системы уравнений метода конечных элементов базовой модели равна 9474, двухсеточной — 1206. Двухсеточная модель занимает в 600 раз меньше памяти ЭВМ, чем базовая. Время реализации метода конечных элементов для двухсеточной модели в 27 раз меньше, чем для базовой модели.

Расчеты показывают, что для однородной изотропной панели V_0 (рис. 5) погрешность для макси-

мальных перемещений (по оси O_2z_0) равна 3,0%, для максимальных эквивалентных напряжений — 11,6%, т. е. двухсеточный конечный элемент V_s мож-

но использовать для анализа деформирования однородных изотропных цилиндрических оболочек и панелей.

Библиографический список

1. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНИТИ № 2990-В00 / Институт вычислительного моделирования СО РАН. — Красноярск, 2000.

2. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // ПМТФ. — № 3. — 2004.

3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975.

4. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. — М., 1981.

5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. — М., 1982.