УДК 539.3

А.Д. Матвеев

Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой*

A. D. Matveev

Constructing the Composite Multi-Grid Elements of Heterogeneous and Micro-Heterogeneous Structures

Предложены процедуры построения сложных многосеточных конечных элементов формы прямоугольного параллелепипеда, которые имеют неоднородную и микронеоднородную структуру. Процедура построения сложных многосеточных элементов сводится к построению некоторой системы вложенных композитных двухсеточных конечных элементов. Для построения двухсеточного элемента применяем две вложенные сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым разбиением двухсеточного элемента, которое учитывает его структуру, крупную сетку определяем на всей области данного элемента. С помощью аппроксимаций, построенных на крупной сетке, функционал полной потенциальной энергии двухсеточного элемента, отвечающий базовому разбиению, проецируем на крупную сетку. В результате минимизации этого функционала получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил двухсеточного конечного элемента.

Достоинства сложных многосеточных элементов заключаются в том, что они учитывают неоднородную и микронеоднородную структуру, образуют дискретные модели трехмерных композитных тел малой размерности и порождают решения с заданной погрешностью, при этом напряжения определяются в любом компоненте неоднородной и микронеоднородной структуры сложных многосеточных конечных элементов.

Ключевые слова: упругость, трехмерные тела, неоднородная, микронеоднородная структура, сложные многосеточные элементы.

In this paper, construction of complex composite multi-grid finite cuboid elements with heterogeneous and micro — heterogeneous structures is presented.The procedure for constructing complex multi-grid elements reduces to construction of a system of embedded composite two-grid finite elements. Both fine and coarse embedded grids are used to construct a double-grid element. Fine grid is generated after discretization of the double-grid element with consideration of its structure. Coarse grid is defined over the whole area of the element. Coarse grid approximations project the total potential energy functional of the double-grid element with base descretization on a coarse grid. Equations for calculating stiffness matrix and vector of nodal forces are obtained by functional minimization procedures for the energy functional.

Consideration of heterogeneous and micro-heterogeneous structures is one of the advantages of composite multi-grid elements. It is used for developing discrete models of small three-dimensional composite solids and obtaining solutions with specified errors. Thus, stresses can be estimated for every component of heterogeneous structure of composite multi-grid finite elements.

Key words: elasticity, three-dimensional solids, heterogeneous structure, micro-inhomogeneous structure, composite multi- grid elements.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-18

Введение. Расчет упругих трехмерных тел с неоднородной и микронеоднородной структурой по методу конечных элементов с учетом их структуры сводится к построению систем уравнений методом конечных элементов высокого порядка [1, с. 294; 2, с. 59]. В связи этим разработаны многосеточные конечные элементы [3, с. 3; 4, с. 161]. Существуют два типа таких элементов. Для построения m-сеточного конечного элемента, имеющего неоднородную структуру, применяем m вложенных узловых сеток. Самая мелкая сетка порождена базовым разбиением многосеточных конечных элементов, которое учитывает их неоднородную структуру. Остальные $m-1$ сетки для многосеточных конечных элементов первого типа определяются на его области, для многосеточных конечных элементов второго типа — на его границе.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00053).

В случае, когда размеры высокомодульных частиц и толщина волокон очень малы, для учета неоднородной (микронеоднородной) структуры тела необходимо использовать достаточно мелкие базовые разбиения многосеточных конечных элементов. Это приводит к резкому увеличению временных затрат на реализацию алгоритма построения матрицы жесткости и вектора узловых сил многосеточных конечных элементов.

В данной работе разработаны сложные многосеточные конечные элементы формы прямоугольного параллелепипеда, которые имеют неоднородную и микронеоднородную структуру. Процедура построения сложных многосеточных конечных элементов сводится к построению некоторой системы вложенных двухсеточных конечных элементов. Достоинства сложных многосеточных конечных элементов состоят в том, что они:

— учитывают неоднородную и микронеоднородную структуру трехмерных упругих тел;

— образуют многосеточные дискретные модели трехмерных композитных тел, число узловых неизвестных которых на несколько порядков меньше числа неизвестных базовых моделей;

— порождают решения с заданной погрешностью, при этом напряжения определяются в любом компоненте неоднородной (микронеоднородной) структуры многосеточных конечных элементов.

Процедура построения сложных многосеточных конечных элементов базируется на алгоритмах метода конечных элементов и поэтому удобно реализуется на ЭВМ. Реализация методом конечных элементов для многосеточных дискретных моделей трехмерных упругих тел, состоящих из сложных многосеточных конечных элементов, требует меньше памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

1. Процедура построения двухсеточных конечных элементов. Изложение данной процедуры проведем для двухсеточного конечного элемента V_i^2 первого типа неоднородной (микронеоднородной) структуры формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ (см. рис. 1). Считаем, что между компонентами неоднородной структуры двухсеточного конечного элемента V_i^2 связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче теории упругости [5, с. 40], т. е. во всей области двухсеточного конечного элемента V_i^2 реализуется трехмерное напряженное состояние. Область двухсеточного конечного элемента V_i^2 представляем базовым разбиением, состоящим из однородных односеточных конечных элементов V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [1, с. 135], $j = 1,...,M$; M – общее число конечных элементов V_j^h. На рисунке 1 показано базовое (мелкое) разбиение двухсеточного конечного элемента V_i^2 на конечные элементы V_j^h.

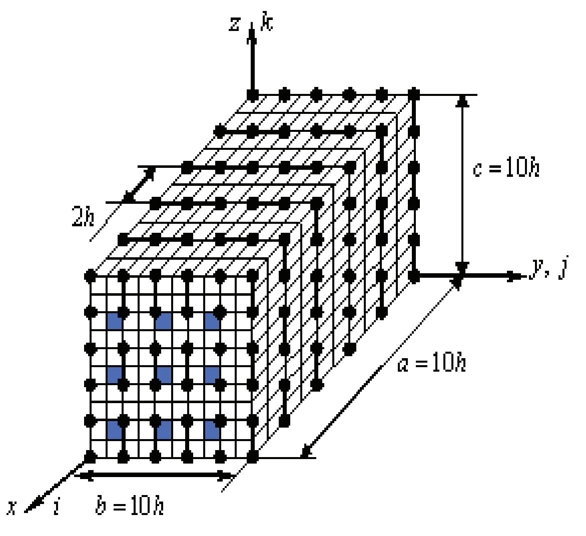

Рис. 1. Сетки двухсеточного конечного элемента V_e^3

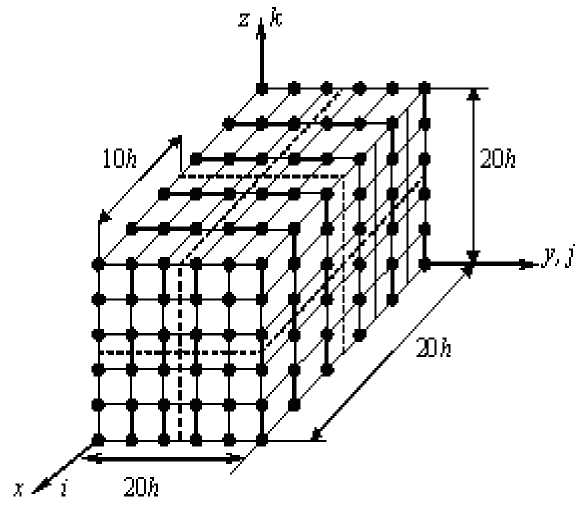

Рис. 2. Крупная сетка трехсеточного конечного элемента V_i^2

Базовое разбиение двухсеточного конечного элемента V_i^2 учитывает его неоднородную (микронеоднородную) структуру и порождает мелкую сетку W_i^1 размерности $m_1 \times m_2 \times m_3$ с шагом h по осям Ox, Oy, Oz; для рисунка 1 имеем $m_1 = m_2 = m_3 = 11$. На мелкой сетке W_i^1 определяем крупную сетку W_i^2 размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$ с шагами: H_1 — по оси Ox, H_2 — по оси Oy и H_3 — по оси Oz, причем $H_1 = k_1 h$, $H_2 = k_2 h$, $H_3 = k_3 h$, где k_1, k_2, k_3 — целые. На рисунке 1 узлы крупной сетки W_i^2 отмечены точками,

$k_1 = k_2 = k_3 = 2$, $H_1 = H_2 = H_3 = 2h$, $n_1 = n_2 = n_3 = 6$. Полную потенциальную энергию Π_i^2 базового разбиения двухсеточного конечного элемента V_i^2 представим в виде [1, с. 32]

$$\Pi_i^2 = \sum_{j=1}^{M} (\frac{1}{2}\mathbf{q}_j^T [K_j^h]\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j), \qquad (1)$$

где $[K_j^h]$ — матрица жесткости; $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$ — векторы узловых сил и неизвестных конечных элементов V_j^h базового разбиения двухсеточного конечного элемента; T — транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [6, с. 187] на сетке W_i^2 определяем аппроксимирующие функции u_2, v_2, w_2 для перемещений *u, v, w* двухсеточного конечного элемента V_i^2, которые запишем в форме

$$u_2 = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_2 = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} v_{ijk},$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} w_{ijk}, \qquad (2)$$

где u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk} — искомые значения функций u_2, v_2, w_2 в узле i,j,k сетки W_i^2; i,j,k — координаты целочисленной системы координат ijk, введенной для узлов крупной сетки W_i^2 (рис. 1); $N_{ijk} = N_{ijk}(x,y,z)$ — базисная функция узла i,j,k сетки W_i^2, $i = 1,...,n_1$, $j = 1,...,n_2$, $k = 1,...,n_3$, $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$,

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1,\alpha\neq i}^{n_1} \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{n_2} \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha},$$

$$L_k(z) = \prod_{\alpha=1,\alpha\neq k}^{n_3} \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \qquad (3)$$

x_i, y_j, z_k — координаты узла i,j,k сетки W_i^2 в системе координат $Oxyz$.

Обозначим: $N_\beta = N_{ijk}$, $u_\beta = u_{ijk}$, $v_\beta = v_{ijk}$, $w_\beta = w_{ijk}$, где $\beta = 1,...,n$; $n = n_1 n_2 n_3$. Тогда выражения (2) принимают вид

$$u_2 = \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta u_\beta, \quad v_2 = \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta v_\beta, \quad w_2 = \sum_{\beta=1}^{n} N_\beta w_\beta. \qquad (4)$$

Обозначим $\mathbf{q}_i^2 = \{u_1,...,u_n, v_1,...,v_n, w_1,...,w_n\}^T$ — вектор узловых неизвестных крупной сетки W_i^2, т.е. вектор неизвестных двухсеточного конечного элемента V_i^2. Используя (4), компоненты вектора $\mathbf{q}_j$ узловых неизвестных конечных элементов V_j^h выражаем через компоненты вектора $\mathbf{q}_i^2$, в результате получим равенство

$$\mathbf{q}_j = [A_j^2]\, \mathbf{q}_i^2, \qquad (5)$$

где $[A_j^2]$ — прямоугольная матрица; $j = 1,...,M$.

Подставляя (5) в выражение (1), из условия $\partial \Pi_i^2 / \partial \mathbf{q}_i^2 = 0$ получаем уравнение $[K_i^2]\, \mathbf{q}_i^2 = \mathbf{F}_i^2$, где

$$[K_i^2] = \sum_{j=1}^{M} [A_j^2]^T [K_j^h][A_j^2], \quad \mathbf{F}_i^2 = \sum_{j=1}^{M} [A_j^2]^T \mathbf{P}_j, \qquad (6)$$

$[K_i^2]$, $\mathbf{F}_i^2$ — матрица жесткости и вектор узловых сил двухсеточного конечного элемента V_i^2 первого типа.

Замечание 1. Решение, построенное для крупной сетки W_i^2 двухсеточного конечного элемента V_i^2 с помощью формулы (5), проецируется на мелкую сетку W_i^1 базового разбиения двухсеточного конечного элемента, что дает возможность вычислять напряжения в любом конечном элементе V_j^h базового разбиения двухсеточного конечного элемента V_i^2 и, следовательно, можно определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры двухсеточного конечного элемента V_i^2.

2. Процедура построения сложных многосеточных конечных элементов. Основные положения процедуры построения сложного многосеточного конечного элемента покажем на примере построения сложного трехсеточного конечного элемента V_e^3 с неоднородной (микронеоднородной) структурой формы прямоугольного параллелепипеда (рис. 2). Область трехсеточного конечного элемента V_e^3 представляем двухсеточным конечным элементом V_i^2, $i = 1,...,M_2$. M_2 — общее число двухсеточного конечного элемента V_i^2. При этом двухсеточный конечный элемент V_i^2 имеет одинаковые геометрические размеры, мелкие W_i^1 и крупные W_i^2 сетки (одинаковые базовые разбиения). На рисунке 2 трехсеточный конечный элемент V_e^3 (размерами $20h \times 20h \times 20h$) состоит из восьми двухсеточных конечных элементов V_i^2 (размерами $10h \times 10h \times 10h$). Границы двухсеточного конечного элемента V_i^2 на рисунке 2 отмечены пунктирными линиями, т.е. $M_2 = 8$. Базовые разбиения двухсеточного конечного элемента V_i^2 учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру трехсеточного конечного элемента V_e^3. Совокупность крупных сеток W_i^2 двухсеточного конечного элемента V_i^2 ($i = 1,...,M_2$) образует крупную сетку W_2. На крупной сетке W_2 определяем более крупную сетку W_e^3 размерности $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$. На рисунке 2 узлы крупной сетки W_e^3 отмечены точками, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 6$. Аппроксимирующие функции перемещений u_3, v_3, w_3, построенные на сетке W_e^3, применяем в виде

$$u_3 = \sum_{\beta=1}^{m} N_\beta^3 q_\beta^u, \quad v_3 = \sum_{\beta=1}^{m} N_\beta^3 q_\beta^v, \quad w_3 = \sum_{\beta=1}^{m} N_\beta^3 q_\beta^w, \qquad (7)$$

где N_β^3 — базисная функция β-го узла крупной сетки W_e^3; $q_\beta^u, q_\beta^v, q_\beta^w$ — значения соответственно функций u_3, v_3, w_3 в β-м узле сетки W_3; $m = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Полную потенциальную энергию Π_e^3 трехсеточного конечного элемента V_e^3 представляем как сумму полных потенциальных энергий двухсеточного конечного элемента V_i^2, $i = 1,...,M_2$, т.е.

$$\Pi_e^3 = \sum_{i=1}^{M_2} (\frac{1}{2}(q_i^2)^T [K_i^2] q_i^2 - (q_i^2)^T F_i^2), \qquad (8)$$

где M_2 — общее число элементов двухсеточного конечного элемента V_i^2.

Обозначим через $\mathbf{q}_e^3$ вектор узловых неизвестных крупной сетки W_e^3 трехсеточного конечного элемента V_e^3. Используя (7), вектор $\mathbf{q}_i^2$ узловых неизвестных двухсеточного конечного элемента V_i^2 выражаем через вектор $\mathbf{q}_e^3$ узловых неизвестных крупной сетки W_e^3, т.е. строим равенство

$$\mathbf{q}_i^2 = [A_i^3]\,\mathbf{q}_e^3, \qquad (9)$$

где $[A_i^3]$ — прямоугольная матрица; $i = 1,...,M_2$.

Подставляя (9) в выражение (8), из условия $\partial \Pi_e^3 / \partial \mathbf{q}_e^3 = 0$ получаем матричное уравнение $[K_e^3]\,\mathbf{q}_e^3 = \mathbf{F}_e^3$, где

$$[K_e^3] = \sum_{i=1}^{M_2} [A_i^3]^T [K_i^2][A_i^3], \quad \mathbf{F}_e^3 = \sum_{i=1}^{M_2} [A_i^3]^T\,\mathbf{F}_i^2\,, \qquad (10)$$

$[K_e^3]$, $\mathbf{F}_e^3$ — матрица жесткости и вектор узловых сил сложного трехсеточного конечного элемента V_e^3.

Замечание 2. Как показывают расчеты, погрешность решения, построенного методом конечных элементов для трехмерного тела, для которого заданы геометрические размеры, композитная структура, закрепление и нагружение с применением двухсеточного конечного элемента V_i^2 и сложного трехсеточного конечного элемента V_e^3 определенных размеров зависят от соотношения шагов узловых вложенных сеток W_i^1, W_i^2, W_e^3.

Построение сложных четырехсеточных конечных элементов формы прямоугольного параллелепипеда с применением сложных трехсеточных и двухсеточных конечных элементов аналогично вышеописанной процедуре.

3. Результаты расчетов. Рассмотрим в декартовой системе координат *Oxyz* модельную задачу о деформировании композитного трехмерного тела V_1 размерами $20h \times 120h \times 20h$ (рис. 3). При $y = 0$ тело V_1 закреплено, граница крепления тела на рисунке 3 заштрихована. На верхней поверхности тела V_1 (при $z = 20h$, $h = 0{,}5$) в точках с координатами $z = 20h$, x_k, y_i заданы силы $q_z = 0{,}15$; $x_k = 8h + 4h(k-1)$, $y_i = 20h + 4h(i-1)$, $k = 1,...,4$; $i = 1,...,26$ (рис. 3).

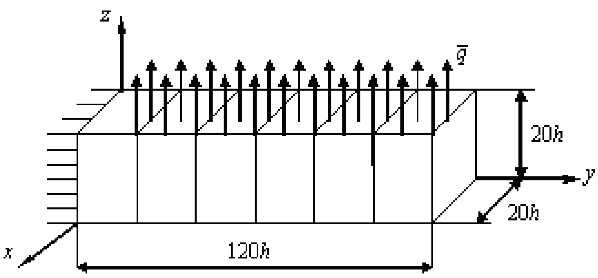

Рис. 3. Схема нагружения тела V_1

Базовая дискретная модель тела V_1 состоит из изотропных однородных конечных элементов 1-го порядка формы куба со стороной h. Многосеточная дискретная модель тела V_1 — из сложных трехсеточных конечных элементов V_e^3 (рис. 2), состоящих из восьми двухсеточных конечных элементов V_i^2 размерами $10h \times 10h \times 10h$ (см. рис. 1). Тело V_1 армировано волокнами (с поперечным сечением $h \times h$), направленными вдоль оси Oy. На рисунке 1 сечения волокон закрашены. Модуль Юнга связующего материала тела V_1 равен 1, волокон — 10, коэффициент Пуассона — 0,3.

Анализ результатов расчетов показывает, что максимальное перемещение $w_h = 356{,}992$ многосеточной дискретной модели тела V_1 отличается от максимального перемещения $w_0 = 388{,}653$ базовой модели на 8,14%. Максимальные эквивалентные напряжения $\sigma_h = 14{,}580$ многосеточной дискретной модели тела и $\sigma_0 = 15{,}578$ базовой модели отличаются на 5,75%. Базовая дискретная модель тела имеет 158760 узловых неизвестных, ширина ленты системы уравнений метода конечных элементов равна 2784. Многосеточная дискретная модель тела содержит 3240 узловых неизвестных, ширина ленты — 1296, т.е. занимает в 100 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем базовая. Время реализации метода конечных элементов для многосеточной дискретной модели в 12 раз меньше, чем для базовой. Отметим, что при $h = 0{,}5$мм волокна имеют поперечное сечение размерами $0{,}5 \times 0{,}5$мм, т.е. тело V_1 размерами $1 \times 6 \times 1$см имеет микронеоднородную структуру.

Библиографический список

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975.

2. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М., 1982.

3. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНИТИ. — №2990-В00. — 2000.

4. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // ПМТФ. — 2004. — №3.

5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. — М., 1982.

6. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. — М., 1981.