УДК 51.72, 539.3

С. В. Клишин, С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко

Аффинная деформация геоматериалов как методика тестирования моделей дискретных элементов*

S. V. Klishin, S. V. Lavrikov, A. F. Revuzhenko

Affine Deformation of Geomaterials as a Technique for Discrete Elements Models Testing

Выделяется класс краевых задач механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, в которых реализуется однородное по пространству распределение деформаций и их скоростей. Краевые условия, обеспечивающие такое однородное распределение, применяются для постановки численных экспериментов по аналогичным программам нагружения. На этой основе разработан метод аффинных преобразований, который позволяет по заданной модели дискретных элементов построить эквивалентную континуальную модель среды. Рассмотрена численная реализация гипопластической модели сыпучей среды при нагружении простым сдвигом и сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. Показано, что модель дает хорошее качественное и количественное приближение поведению сыпучей среды по дилатансии и уровню напряженного состояния. По условию соосности тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций модель дает приближение к поведению вязкой жидкости. На основе метода дискретных элементов проведена численная реализация сложного нагружения сыпучей среды с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. Показано, что выбор потенциалов взаимодействия частиц в линейном виде приводит к тому, что среда проявляет свойства континуальной модели сыпучей среды с внутренним трением и дилатансией. Приведены примеры численных расчетов по указанным моделям.

Ключевые слова: континуальная модель, сплошная среда, гранулированный материал, аффинное преобразование, численный анализ, гипопластическая модель, метод дискретных элементов.

The paper is focused on a class of boundary value problems of solid mechanics and granular media mechanics with spatially uniform distributions of strain and velocities. Boundary conditions for such distributions are used in numerical experiments. On this basis, a method of affine transformations is elaborated to allow an equivalent continuum model for a given discrete elements model to be developed. Numerically implemented hypoplastic model of a granular medium is presented for cases of both simple shear loading and complex loading with continuous rotation of principal strain axes. It is demonstrated that the model provides good quantitative and qualitative approximation for dilatancy and level of stress. Coaxiality of stress, strain and velocity tensors leads to model predictions close to results describing the behavior of viscous fluid. Numerical implementation of granular media complex loading with continuous rotation of principal strain axes is developed on the basis of discrete elements method. It is shown that the choice of linear forms of particle interaction potentials results in a medium with properties fit to properties of a continuum model for granular media with internal friction and dilatancy. Examples of numerical simulations are provided.

Key words: continual model, continuous medium, granular material, affine transformation, numerical analysis, hypoplastic model, discrete element method.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-12

Большинство математических моделей геомеханики носят феноменологический характер, т. е. они строятся на основе некоторых базисных экспериментов. Хорошо известно, что идеальными для этих целей являются эксперименты, в которых реализуется однородное распределение напряжений и деформаций по пространству. Здесь процесс деформирования сводится к реализации последовательности аффинных преобразований.

В [1] дана общая классификация однородных процессов деформирования. На их основе разработаны методики и лабораторные установки по реализации однородного деформирования сыпучей среды при чистом сдвиге, сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора напряжений и сложном нагружении с изломами траектории деформирования.

Реализация указанных однородных способов нагружения осуществляется заданием следующей кине-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00432).

матики деформирования. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — декартова система координат и деформирование осуществляется в плоскости Ox_1x_2. Случаю чистого сдвига в этой плоскости будет соответствовать поле скоростей

$$v_1 = 2 \cdot s \cdot x_2, \quad v_2 = 0, \tag{1}$$

где $s = \pm k$, $k > 0$ — некоторая положительная константа, причем знак ± указывает направление сдвига. В случае сложного нагружения с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций образцу материала необходимо придать форму эллиптического цилиндра с осью Ox_3 и на его границе в плоскости Ox_1x_2 задать поле скоростей, удовлетворяющее закону Кеплера

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \ |\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = \Omega = const, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к эллиптической границе образца; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Тогда компоненты вектора скорости примут вид

$$v_1 = -\Omega \frac{x_2}{b^2}, \ v_2 = \Omega \frac{x_1}{a^2}, \tag{3}$$

где постоянные a, b — соответственно большая и малая полуоси эллипса.

В свою очередь, сложное нагружение с изломами траектории деформирования осуществляется таким образом. Сначала осуществляется чистый сдвиг геоматериала в плоскости Ox_1x_2. При этом скорости, обеспечивающие однородное состояние, будут иметь вид (1). Если теперь направление сдвига поменять скачком на некоторый фиксированный угол κ, тогда поле скоростей (1) заменится на поле

$$v_1 = 2 \cdot s \cdot (-x_1 \cdot \sin\kappa + x_2 \cdot \cos\kappa) \cdot \cos\kappa, \quad v_2 = 2 \cdot s \cdot (-x_1 \cdot \sin\kappa + x_2 \cdot \cos\kappa) \cdot \sin\kappa, \tag{4}$$

где, как и прежде, $s = \pm k$, $k > 0$ — некоторая положительная константа, а знак ± указывает направление сдвига.

Очевидно, что поле (4) совпадает с (1) при $\kappa = 0$. Теперь, изменяя значение угла κ, можно получить излом траектории деформирования на любой заданный конечный угол.

Рассмотрим численную реализацию указанных способов нагружения для гипопластической модели сыпучей среды [2, 3]. Модель представляет собой пространственные нелинейные для приращений определяющие уравнения, что позволяет, оставаясь в рамках одних и тех же уравнений, описать как состояние активного нагружения, так и разгрузку. Сами уравнения [2] в силу громоздкости здесь не приводятся. Результаты численного моделирования показаны на следующих типичных графиках. На рисунке 1а–б показаны изменения напряжений σ_{11} и σ_{12} в зависимости от угла с учетом смены направления сдвига при моделировании поля скоростей чистого сдвига (1), на рисунке 1в–г — изменение вертикальной компоненты тензора деформаций ε_{33}, характеризующей дилатансию среды, при моделировании соответственно полей скоростей с непрерывным (3) и со скачкообразным (4) поворотом главных осей деформаций в плоскости Ox_1x_2.

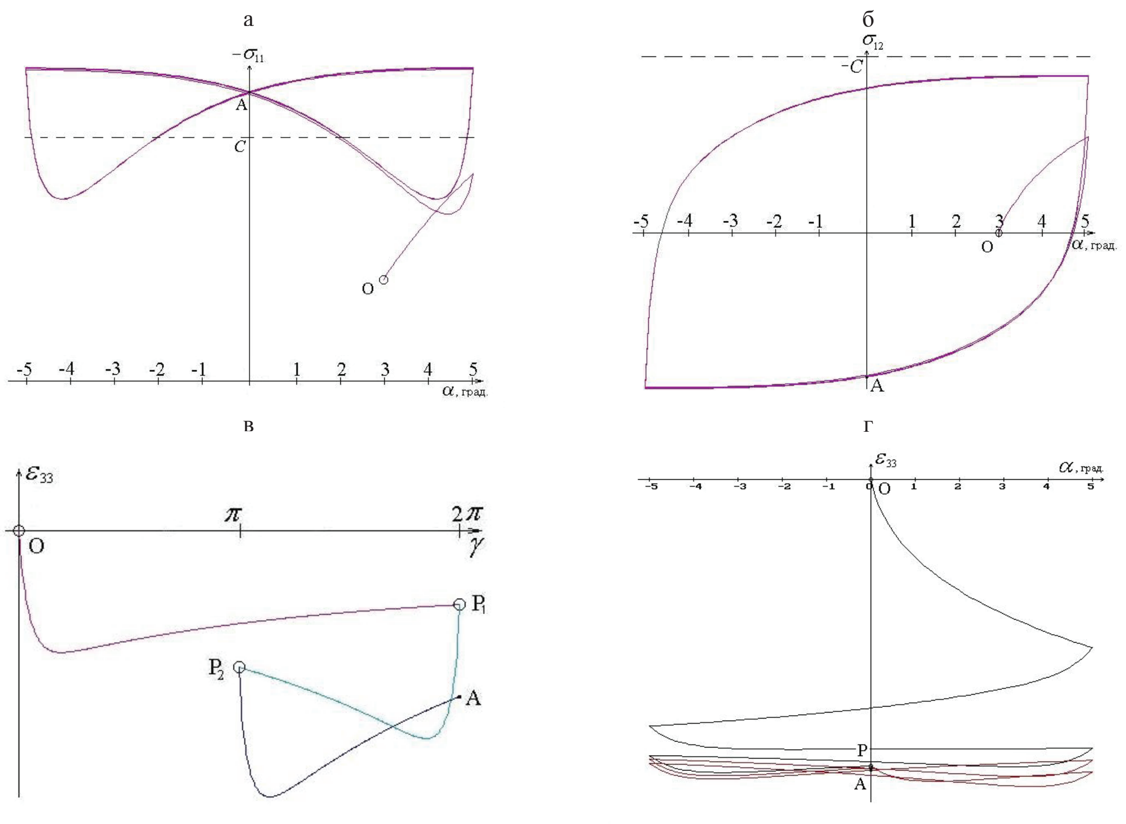

Рис. 1. Изменение напряжений и деформаций при траекториях нагружения: *OA* (*а, б*); OP_1P_2A (*в*); *OPA* (*г*)

Анализ показывает, что гипопластическая модель дает хорошее качественное и количественное приближение к поведению реальной сыпучей среды по дилатансии и уровню напряженного состояния. Что касается условия соосности, то модель показывает разосность тензоров напряжений и деформаций на угол 43° и соответственно на угол 2° — для тензоров напряжений и скоростей деформаций. Последнее означает фактически приближение к поведению вязкой жидкости.

На основе метода дискретных элементов [4] разработан алгоритм и программное обеспечение для реализации поля скоростей (2) в трехмерной постановке [5]. Применительно к рассматриваемой задаче суть метода дискретных элементов заключается в дискретизации исследуемой конечной области на отдельные элементы (частицы), заданием их механических свойств и геометрических параметров, на основе которых численно интегрируется система уравнений движения. Рассматривается сухая несвязная среда, силы взаимодействия между отдельными частицами возникают только при их контакте, сила тяжести отсутствует. В качестве потенциала взаимодействия между частицами применяется закон Гука с учетом нормальной и касательной составляющих силы. Частицы при деформировании среды не меняют своей формы и не разрушаются, а их форма ограничена сферами с заданным распределением радиусов.

Численный эксперимент заключается в следующем. Пусть в пространстве $Ox_1x_2x_3$ задана область — цилиндр, ось которого ориентирована вдоль оси Ox_3 и сечением которого в горизонтальной плоскости Ox_1x_2 является эллипс с соотношением полуосей $b\ /\ a = 0.8$ (рис. 2а). Цилиндр (исследуемый образец) заполнен сферическими частицами, образующими определенную упаковку. В качестве граничных условий принято: 1) на боковой поверхности задано распределение скоростей (3); 2) на верхнем и нижнем торцах образца задана постоянная пригрузка, действующая вдоль оси Ox_3, а трение между торцами и частицами материала отсутствует. Таким образом, создание вертикального поджатия играет роль веса и для этого необходимо, чтобы смещения боковой части границы вовлекали материал в процесс деформирования.

а б

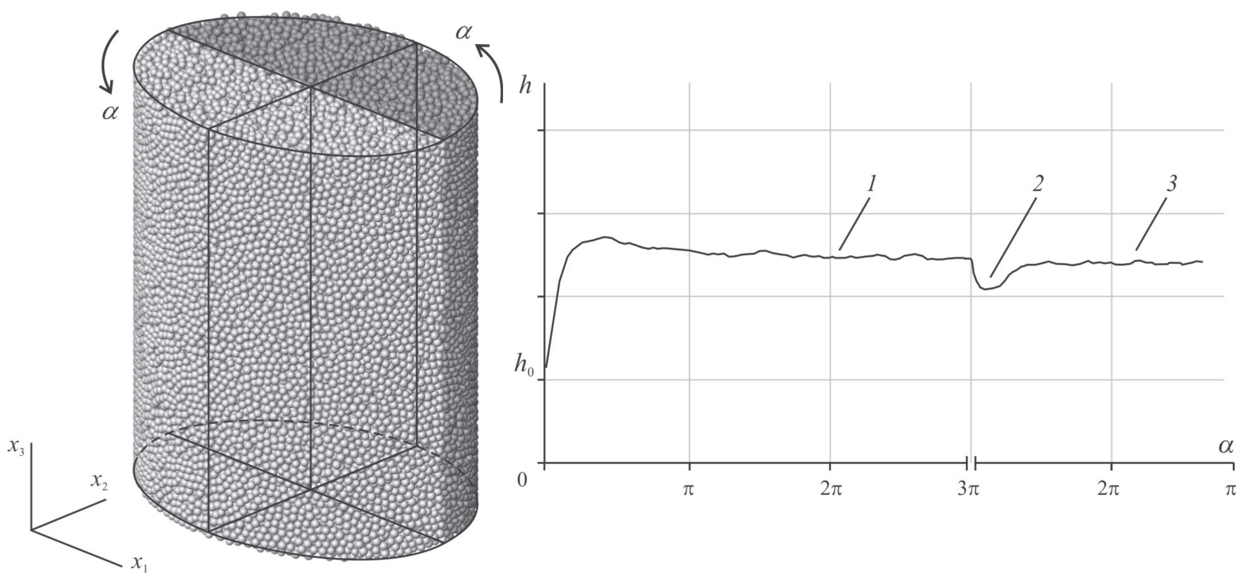

Рис. 2. Расположение частиц в начальный момент времени (*а*); изменение высоты образца при изменении направления вращения точек границы (*б*)

Такой переход от двумерного моделирования к пространственному позволяет исследовать дилатансию, которая оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние сыпучей среды. С этой целью была проведена серия численных экспериментов по нагружению образца с начальной высотой h_0 на основе закона движения (3). На рисунке 2б приведен характерный график изменения высоты h в зависимости от параметра нагружения — угла поворота границы α. После нагружения образца до полутора оборотов ($\alpha = 3\pi$) процесс останавливался, и нагрузка прикладывалась в противоположном направлении. Видно, что вначале высота образца стабилизируется (рис. 2а, элемент кривой *1*), затем при изменении направления нагружения уменьшается до некоторого предела (*2*) (материал уплотняется), а затем опять увеличивается, достигая своего устойчивого состояния (*3*).

Численные эксперименты по реализации поля (3) в обеих моделях показывают, что через 0.25…0.5

оборота напряжения, действующие внутри области, как и упаковка частиц, переходят в стационарное состояние. Деформации сдвига не сопровождаются изменением объема, т. е. дилатансия отсутствует (она имеет место только в начальный момент и при смене направления нагружения). Таким образом, среда находится в предельном состоянии. Анализ главных напряжений показал, что разосность тензоров напряжений и деформаций составляет для гипопластической модели угол 43^{o}, для модели дискретных элементов — 6^{o}.

Библиографический список

1. Ревуженко А. Ф. Механика сыпучей среды. — Новосибирск, 2003.

2. Kolymbas D., Herle I., Von Wolffersdorff P. A. Hypoplastic constitutive equation with internal variables // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. — 1995. — Vol. 19.

3. Колимбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // ПМТФ. — 1999. — Т. 40, № 5.

4. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies // Geotechnique. — 1979. — Vol. 29, № 1.

5. Ревуженко А. Ф., Клишин С. В. Численный метод построения континуальной модели деформирования твердого тела, эквивалентной заданной модели дискретных элементов // Физическая мезомеханика. — 2012. — Т. 15, № 6.