УДК 539.3

С. В. Идимешев

Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании*

S. V. Idimeshev

Calculation of Stress-Strain State for Isotropic Rectangular Plates on Elastic Foundation

Прямоугольные пластины с переменными геометрическими и механическими параметрами находят широкое применение в различных отраслях промышленности. Прямоугольная поперечно нагруженная пластина может опираться на упругое основание, как это имеет место, например, в покрытиях автомобильных дорог, мостов или взлетно-посадочных полос аэродромов. Для исследования прочности и несущей способности таких конструкций требуется знание их напряженно-деформированного состояния. Для численного решения задачи об изгибе пластины применяется метод коллокаций и наименьших невязок. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных для задач гидродинамики. Для расчета напряженно-деформированного состояния пластин он используется впервые. Решена задача о расчете напряженно-деформированного состояния прямоугольных изотропных пластин на упругом основании, в том числе свободно лежащих на грунте.

Применены специальные краевые условия на свободных краях пластины. Рассмотрено несколько моделей реакции основания и проведено качественное сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, упругое основание, напряженно-деформированное состояние, метод коллокаций и наименьших невязок.

Rectangular plates with variable geometric and mechanic characteristics have been used widely in various industries. Transversally loaded rectangular plate can rest on elastic foundation, as in, for example, surfaces of roads, bridge or airport runways. Knowledge of stress-strain state is essential for researching of strength and load bearing capacity of such constructions. In this paper, we use a method of collocations and least residuals to find numerical solution of plate bending problem. The method of collocations and least residuals has proved to be effective for ordinary differential equations and partial differential equation of hydrodynamics. However, it is used for the first time for plate stress-strain state calculation. The problem of stress-strain state calculation for isotropic rectangular plates on elastic foundation and for plates free-lying on the ground has been solved. Special boundary conditions for plate with free boundaries are used. Several models of foundation reaction are considered, and qualitative comparison of obtained results is provided.

Key words: rectangle plate, elastic foundation, stress-strain state, method of collocations and least residuals.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-11

Проблема изгиба пластин на упругом основании представляет собой одну из актуальных задач математической теории упругости. В замкнутой аналитической форме ее решение удается получить только для очень ограниченного числа краевых задач. Альтернативным подходом поиска приближенного решения этой задачи является представление решения в виде ряда [1–3]. Авторы [4] предлагают, используя вариационный метод, свести разрешающие уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Недостаток этих методов — их явная зависимость от способов задания краевых условий и видов нагружения. В работе [5] применяется конечно-разностный подход, что в свою очередь приводит к трудностям реализации граничных условий, так как для дифференциальных уравнений высокого порядка приходится использовать шаблон большого размера. Все вышесказанное приводит к необходимости разработки эффективных численных методов решения краевых задач теории пластин.

* Работа выполнена в рамках научно-исследовательской работы в КТИ ВТ СО РАН (программа Президиума РАН №15.4) и при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-12032-офи_м).

Рассмотрим прямоугольную плиту на упругом основании. Реакцию упругого основания будем проводить с использованием однопараметрической модели, основанной на гипотезе Винклера (далее — модель Винклера) [1, 5, 6], и двух более сложных двухпараметрических моделей Власова [4] и Пастернака [7]. Гипотеза Винклера предполагает, что реакция основания пропорциональна прогибу плиты

$$p = kw\,, \tag{1}$$

где p — реакция основания; w — прогиб плиты; k — коэффициент постели (коэффициент пропорциональности), определяемый экспериментально для каждого типа грунта.

Несмотря на простоту, во многих случаях использование этой модели достаточно для получения приемлемых с практической точки зрения результатов. Однако такое представление реакции грунта имеет ряд недостатков. Например, внешние нагрузки распределяются на грунт только в пределах площади подошвы плиты. Это положение не отвечает реальным наблюдениям, по которым грунт оседает, а следовательно, он напряжен за пределами пластины. Еще один недостаток — трудность в определении значения коэффициента постели k, который зависит от размеров и формы пробного штампа. Более сложная модель реакции грунта заложена в двухпараметрических моделях

$$p = C_1 w - C_2 \Delta w\,, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа; C_1, C_2 — параметры грунта.

Здесь, помимо работы основания на сжатие (гипотеза Винклера), дополнительно учитывается работа основания на сдвиг или срез.

В работе [4] авторы представляют основание как среду, в которой отсутствуют продольные (вдоль плоскости покоящейся пластины) перемещения. Тогда коэффициенты C_1, C_2 можно определить по следующим формулам:

$$C_1 = \frac{E_0}{1-\nu_0^2}\int_0^H \phi'(z)^2\,dz\,,\; C_2 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}\int_0^H \phi(z)^2\,dz\,,$$

$$E_0 = \frac{E_f}{1-\nu_f^2}\,,\; \nu_0 = \frac{\nu_f}{1-\nu_f}\,, \tag{3}$$

E_f, ν_f — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого основания; $\phi(z)$ — функция поперечного распределения упругого основания, которая характеризует угасание напряженности грунта с увеличением глубины H.

В данной работе $\phi(z) = sh\gamma(H-z)/sh\gamma H$, где $\gamma = 1.5$.

В работе [8] предлагается получать коэффициенты из следующих соображений. C_1 связывает интенсивность вертикального отпора грунта с его осадкой, а второй независимый коэффициент C_2 позволяет определить интенсивность вертикальной силы сдвига. Также в работе приведены следующие возможные значения параметров:

$$C_1 = \frac{E_0}{(1-2\nu_0^2)H}\,,\; C_2 = \frac{E_0 H}{6(1+\nu_0)}\,. \tag{4}$$

Перейдем к математической постановке задачи. В прямоугольной области $\Omega = [0,l_1]\times[0,l_2]$ рассматривается краевая задача, описывающая изгиб пластины с учетом реакции упругого основания (рис. 1) [1, 4].

$$D\Delta\Delta w(x_1,x_2) = q(x_1,x_2) - p(x_1,x_2)\,,$$

где $w(x_1,x_2)$ — прогиб пластины; $q(x_1,x_2)$ — внешняя нагрузка; $p(x_1,x_2)$ — реакция упругого основания; $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ — цилиндрическая жесткость; l_1, l_2, h — длина, ширина, толщина пластины; E,ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины.

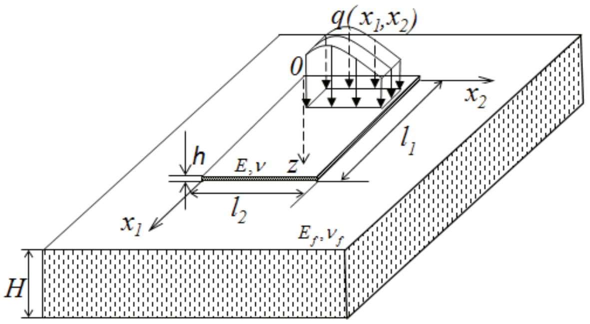

Рис. 1. Плита на упругом основании

Реакция упругого основания определяется для каждой модели из соответствующих формул (1), (2) с коэффициентами (3) или (4). При $p(x_1,x_2)\equiv 0$ получаем классическое уравнение изгиба пластины [1].

На краях пластины будем использовать известные краевые условия [1]. Например, при $x_1 = 0$ может быть свободный край:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0,\; \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right) = Q^f.$$

Особое внимание следует уделить величине Q^f. Эту функцию можно трактовать как влияние грунта, находящегося за пределами пластины, на ее края [5, 8]. Так как модель Винклера не учитывает этот эффект, то для нее $Q^f \equiv 0$. Для двухпараметрических моделей Q^f принимает следующий вид [4]:

$$Q^f = C_2\left(\alpha w + \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right),\; \alpha = \sqrt{C_1/C_2}\,.$$

Аналогичным образом можно выписать условия на других краях пластины.

Подробно метод КНН описан в работе [8]. Здесь же мы остановимся на результатах численных экспериментов.

Рассмотрим прямоугольную пластину на упругом основании под действием равномерной нагрузки q. Две смежные стороны пластины защемлены, две другие свободны. В эксперименте приведены расчеты по трем мо-

делям основания (рис. 2, 3) для параметров $l_1 = 2l_2 = 20$ м, $h = 0.1$ м, $H = 2$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $E_f = 0.4$ ГПа, $\nu_f = 0.4$, $k = 0.3$ ГПа/м, $q = 1$ МПа.

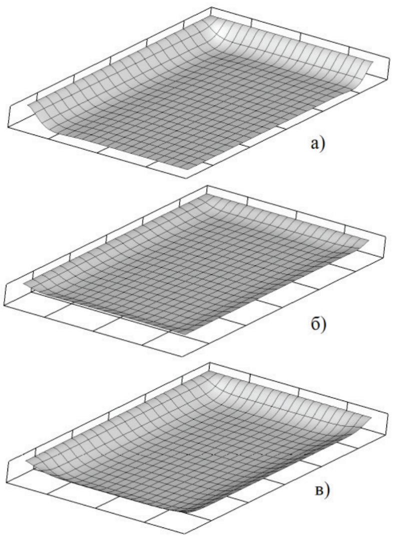

Рис. 2. Форма деформированной равномерно нагруженной пластины, два края которой защемлены для моделей Винклера (а), Власова (б), Пастернака (в)

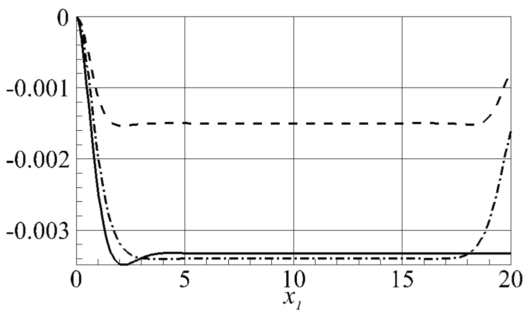

Рис. 3. Срез прогиба пластины при $x_2 = 5$, два края которой защемлены, для моделей Винклера (сплошная), Власова (штриховая), Пастернака (штрихпунктирная)

Из рисунков видно, что для двухпараметрических моделей учет функции Q^f на свободном крае приводит к его приподниманию, что с точки зрения реального опыта более логично, чем для случая модели Винклера, когда свободный край деформируется без изгиба.

Рассмотрим квадратную пластину, свободнолежащую на грунте, моделирующую, например, фундамент опоры моста. Пластина находится под действием равномерной нагрузки q, приложенной в область $[2,8]\times[2,8]$ (рис. 4, 5), $l_1 = l_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $H = 2$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $E_f = 0.4$ ГПа, $\nu_f = 0.4$, $k = 0.3$ ГПа/м, $q = 1$ МПа.

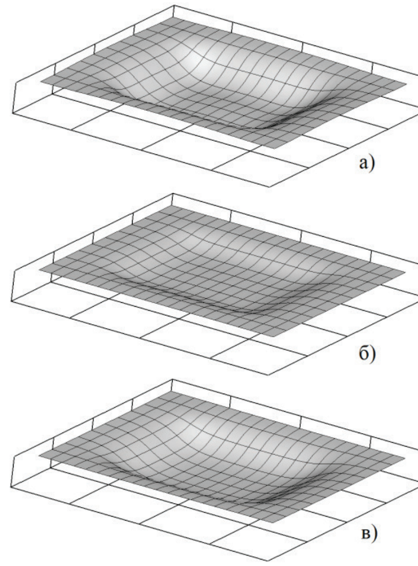

Рис. 4. Форма деформированной свободнолежащей на грунте пластины под специальной нагрузкой для моделей Винклера (а), Власова (б), Пастернака (в)

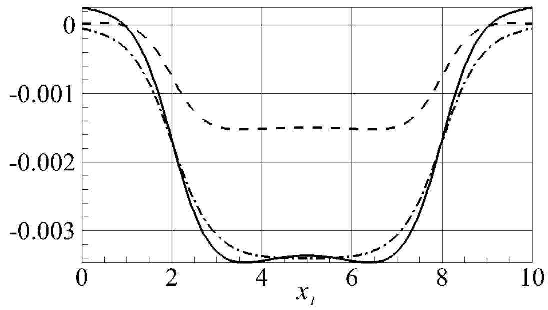

Рис. 5: Срез прогиба свободнолежащей на грунте пластины для моделей Винклера (сплошная), Власова (штриховая), Пастернака (штрихпунктирная)

В данном случае прогиб пластин качественно не зависит от выбора модели реакции основания, так как значения прогибов на контуре малы.

Автор выражает глубокую признательность д.ф.-м.н. С.К. Голушко и д.ф.-м.н. В.П. Шапееву за обсуждение результатов и поддержку работы.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М., 1963.

2. Коренева Е.Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. — М., 2009.

3. Большаков А. А. Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение // Вестник СамГУ. — 2011. — №8 (89).

4. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М., 1960.

5. Клепиков С. Н. Расчет конструкций на упругом основании. — Киев, 1967.

6. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. — М., 1973.

7. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. — М., 1954.

8. Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В. Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье-Стокса // Вычислительная математика и программирование. — М., 2013. — Т. 14. Разд. 1.