

О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова, Я.А. Тарасов

**Математическое моделирование
термокапиллярных течений в тонком слое
жидкости с учетом испарения**

O.N. Goncharova, E.V. Rezanova, Ya.A. Tarasov

**Mathematical Modeling of the Thermocapillary
Fluid Flows in a Thin Layer with Evaporation**

Математическое моделирование конвективных течений, вызываемых действием на жидкие среды дополнительных касательных напряжений со стороны сопутствующей газовой среды, гравитационных и термокапиллярных сил и других факторов, очень актуально в последнее время. Конвективные течения часто сопровождаются переносом массы через границу раздела, например, в результате испарения. Условия на границе раздела, учитывающие перенос массы (обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия), являются следствием соотношений на сильном разрыве. В работе проводится построение математической модели для описания течений тонкого слоя жидкости по наклонной подложке с учетом испарения. Математическое моделирование проводится на основе длинноволнового приближения уравнений Навье-Стокса и переноса тепла, а также обобщенных условий на границе раздела в двумерном случае. Построены точные решения систем уравнений для главных и первых членов разложений по малому параметру задачи в двумерном случае. Выведено уравнение для толщины слоя в случае умеренных чисел Рейнольдса. Эволюционное уравнение для толщины слоя учитывает эффекты гравитации, капиллярности и термокапиллярности, вязкости и испарения, а также дополнительных касательных напряжений на границе со стороны газовой среды.

Ключевые слова: термокапиллярное движение, свободная граница, испарение, уравнения тонкого слоя жидкости, математическая модель.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-10

Введение. Изучается тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости, стекающий по наклонной, неравномерно нагретой подложке в усло-

Mathematical modeling of the convective processes caused by impact of various factors on the fluid media, such as shear flows and additional tangential stresses, gravity and thermocapillary forces and some other factors is rather important nowadays. The convective flows are often accompanied by interfacial mass transfer due to evaporation. The conditions to be applied at the interface between two interacting gas and liquid phases (the generalized kinematic, dynamic and energetic interface conditions) result from the strong discontinuity relations for mass, momentum and energy at interface. In the present paper construction of a mathematical model of flows of the evaporating liquid films on an inclined substrate is carried out. Mathematical modeling is based on the long wave approach of the Navier-Stokes equations coupled with heat transfer equation and of the generalized interface conditions. The exact solutions of the systems of equations for the zeroth and first orders of approximations with respect to a small parameter of the problem, are constructed in the two-dimensional case. An equation of the thin liquid films is derived for the case of the moderate Reynolds numbers. The equation incorporates the effects of gravity, viscosity, capillarity and thermocapillarity, co-current gas flow and evaporation.

Key words: thermocapillary motion, free boundary, evaporation, equations of a thin liquid layer, mathematical model.

виях сопутствующего потока газа и испарения на границе раздела. Построению математических моделей, описывающих течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя, исследованию корректности моделей, качественных свойств и устойчивости решений, а также их численному исследованию посвящено много работ (см., например: [1–3]). При этом в работах [4–7] представлено математическое моделирование испаряющихся

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00163) в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012-2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири» (№ 2013.312.1.66).

пленок.

В данной работе предложена новая математическая модель для описания течений тонкого слоя жидкости в условиях испарения на границе раздела. Данное математическое моделирование будет проведено на основе длинноволнового приближения уравнений Навье-Стокса и уравнения переноса тепла, а также обобщенных кинематического, динамического и энергетического условий на свободной границе [8–10], учитывающих эффекты переноса массы за счет испарения. На твердой непроницаемой подложке должны быть выполнены условия прилипания. Распределение температуры на твердой подложке, обеспечивающее ее неоднородный нагрев, представляет собой функцию продольной координаты. Кинетическое уравнение Герца-Кнудсена будет использовано для определения зависимости локального потока массы пара от температуры на границе раздела.

В работе представлены точные решения систем уравнений для главных и первых членов разложений по малому параметру задачи в двумерном случае. Эволюционное уравнение для толщины слоя получено в случае умеренных чисел Рейнольдса и учитывает эффекты гравитации, капиллярности и термокапиллярности, вязкости и испарения, а также действие дополнительных касательных напряжений на границе со стороны газовой среды.

Представлены результаты параметрического анализа задачи о термокапиллярных течениях в тонких слоях с учетом испарения и сравнения для различных пар «жидкость — газ» типа «этанол — азот», «HFE 7100 — азот», «FC 72 — азот».

1. Постановка задачи о течении тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости с учетом испарения. В рассматриваемой задаче течение тонкого слоя жидкости изучается с помощью системы Навье-Стокса и уравнения переноса тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u, w)$ — вектор скорости жидкости, p — давление, T — температура, ρ — плотность жидко-

сти, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент температуропроводности.

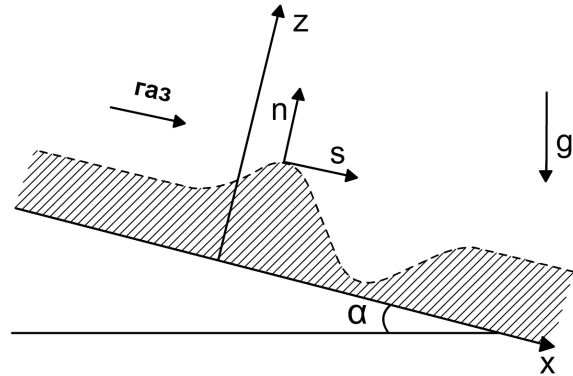


Рис. 1. Геометрия области течения

На рисунке 1 представлена геометрия области течения. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости по твердой подложке при наличии свободной деформируемой границы раздела. Твердая непроницаемая подложка наклонена под углом α к горизонту. Система координат выбрана таким образом, что ось Ox направлена вдоль твердой границы. Твердая граница определяется уравнением $z = 0$, а положение границы раздела Γ — уравнением $z = h(x, t)$. Вектор силы тяжести \mathbf{g} имеет вид $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$, $g = |\mathbf{g}|$.

В задаче имеется два различных масштаба длины, поскольку характерная длина деформации свободной поверхности намного превосходит амплитуду деформации. Пусть l — продольная характерная длина, d — поперечная характерная длина, причем $l \gg d$, так что $\varepsilon = \frac{d}{l}$ представляет собой малый параметр системы. Отметим, что характерные продольная и поперечная скорости u_* и w_* также связаны между собой: $w_* = \varepsilon u_*$. Пусть характерное время процесса t_* связано с другими параметрами задачи следующим образом $l = u_* t_*$, а характерное давление задается выражением $p_* = \frac{\rho u_* \nu l}{d^2}$.

Система уравнений (1)-(4) в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$Re \varepsilon^2 (u_t + u u_x + w u_z) - \varepsilon^2 u_{xx} = u_{zz} - p_x + \gamma_1 \sin \alpha, \quad (5)$$

$$Re \varepsilon^4 (w_t + u w_x + w w_z) - \varepsilon^4 w_{xx} - \varepsilon^2 w_{zz} = -p_z - \gamma_2 \cos \alpha, \quad (6)$$

$$u_x + w_z = 0, \quad (7)$$

$$Re Pr \varepsilon^2 (T_t + u T_x + w T_z) - \varepsilon^2 T_{xx} = T_{zz}. \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения для безразмерных комплексов: $Re = \frac{u_* l}{\nu}$ — число Рейнольдса, $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, $\gamma_1 = \frac{Gr}{BuRe\varepsilon}$, $\gamma_2 = \frac{Gr}{BuRe}$, $Gr = \frac{Bugd^3}{\nu^2}$ — число Грасгофа, $Bu = \beta T_*$ — число Буссинеска, T_* — характерная температура задачи (характерный перепад температуры).

Пусть уравнение вида $z = h(x, t)$ по-прежнему используется для задания свободной границы. Вектор нормали к свободной границе \mathbf{n} и касательный вектор \mathbf{s} имеют координаты (n_1, n_2) и $(n_2, -n_1)$, соответственно, где $n_1 = -\frac{\varepsilon h_x}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}}$, $n_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}}$. Кривизна свободной границы и скорость ее перемещения по направлению внешней нормали задаются соотношениями:

$$2H = \frac{\varepsilon h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}}, \quad D_n = -\frac{\varepsilon h_t}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}}$$

На свободной границе раздела $z = h(x, t)$ должны быть выполнены кинематическое, динамическое и энергетическое условия [8–10].

Представим кинематическое условие в виде:

$$-\varepsilon(h_t + h_{xy} - w) \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} = J_{ev} \bar{J}. \quad (9)$$

Динамические условия в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} -p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] &= \\ = -p^g + \frac{\bar{\rho} \bar{\nu} \bar{v}}{h} \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x^g + w_z^g - \\ - \varepsilon h_x(u_z^g + w_x^g)] + Re\varepsilon^2 (1 - \frac{1}{\bar{\rho}}) J_{ev}^2 \bar{J}^2 + 2\sigma H \frac{\varepsilon^2}{Ca}, & \quad (10) \\ \frac{2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \left[-\varepsilon h_x u_x + \varepsilon h_x w_z - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \varepsilon^2 h_x)(u_z + \varepsilon^2 w_x) \right] - \\ - \frac{\bar{\rho} \bar{\nu} \bar{v}}{h} \frac{2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \left[-\varepsilon h_x u_x^g + \varepsilon h_x w_z^g + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2 h_x^2)(u_z^g + w_x^g) \right] &= \\ = -\frac{Ma}{RePr} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (T_x + h_x T_z) \right]. & \quad (11) \end{aligned}$$

Представим энергетическое условие в следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} + \beta_2 \{T \operatorname{div}_{\Gamma} v\} &= \beta_3 \bar{J} J_{ev} + \\ + \beta_4 \bar{J} J_{ev} \left\{ -p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - \right. \\ \left. - h_x(u_z + \varepsilon^2 w_x)] \right\} + \frac{1}{2} \beta_5 \bar{J}^3 J_{ev}^3 + \\ \beta_6 \sigma \left\{ \frac{\varepsilon h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}} \right\} \bar{J} J_{ev}. & \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь $\frac{\partial T}{\partial n}$ и $\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v}$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (-\varepsilon^2 h_x T_x + T_z), \\ \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{v} &= (u_x + w_z)|_{\Gamma} - \\ - \left\{ \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} u_x - \frac{\varepsilon h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} u_z - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} w_x + \frac{1}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} w_z \right\} \end{aligned}$$

Принята линейная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры, которая в безразмерной форме имеет вид: $\sigma = 1 - \alpha_{\sigma} T$, $\alpha_{\sigma} = \frac{MaCa}{RePr}$. Также введены следующие обозначения: $Ma = \frac{\sigma_T T_* l}{\rho \nu \chi}$ — число Марангони; $Ca = \frac{u_* \rho \nu}{\sigma_0}$ — капиллярное число; $\bar{\nu}$, $\bar{\rho}$ — отношение коэффициентов кинематической вязкости и плотностей газа и жидкости соответственно; $\bar{v} = \frac{u_*^g}{u_*}$ — отношение характерной продольной скорости газа к характерной скорости жидкости u_* ; p^g — давление в газе; σ_0 — значение коэффициента поверхностного натяжения при некотором относительном значении температуры; σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения. Коэффициенты β_i ($i = 2, \dots, 6$) следующим образом выражаются через другие безразмерные комплексы: $\beta_2 = \frac{Ma}{Re^2 Pr E \bar{U}}$, $\beta_3 = \frac{1}{E}$, $\beta_4 = (\frac{1}{\bar{\rho}} - 1) \frac{1}{E \bar{U}}$, $\beta_5 = (1 - \frac{1}{\bar{\rho}})^2 \frac{1}{E \bar{U}}$, $\beta_6 = (1 - \frac{1}{\bar{\rho}}) \frac{1}{Re Ca E \bar{U}}$, $\bar{U} = \frac{\lambda_U}{u_*^2}$, $E = \frac{\kappa T_*}{\lambda_U \rho \nu}$ — параметр испарения [4], λ_U — скрытая теплота парообразования, κ — коэффициент теплопроводности жидкости.

Для определения величины локального потока массы пара на границе раздела J_{ev} примем соотношение (см. [5]):

$$J_{ev} = \alpha_J T|_{z=h(x,t)}. \quad (13)$$

Здесь коэффициент α_J определится, исходя из соотношения Герца-Кнудсена, записанного в безразмерной форме [5, 10]. Отметим, что $\bar{J} = \frac{J_{ev}^*}{\rho u_*}$ или

$\bar{J} = \frac{E}{Re}$, где характерная величина потока массы пара J_*^{ev} вычисляется следующим образом: $J_*^{ev} = \frac{\kappa T_*}{l \lambda_U}$.

На твердой границе $z = 0$ выполнено условие прилипания:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0. \quad (14)$$

Распределение температуры на $z = 0$ имеет вид

$$T|_{z=0} = \Theta_0(x, t). \quad (15)$$

Выбирая характерную скорость u_* , равной характерной скорости релаксации вязких напряжений $u_\nu = \frac{\nu}{l}$, получим $Re = 1$. Тем самым дальнейшее моделирование применимо для случая умеренных чисел Рейнольдса ($Re = O(1)$).

2. Вывод уравнений тонкого слоя. Для определения искомых функций u, w, T, p , а также толщины слоя жидкости h рассматривается задача (5)-(8), (9)-(15) в длинноволновом приближении. Решение задачи ищем в виде разложений по степеням малого параметра ε . Тогда уравнения (5)-(8), записанные для главных членов разложения, примут вид

$$p_x^0 = u_{zz}^0 + \gamma_1 \sin \alpha, \quad (16)$$

$$p_z^0 = -\gamma_2 \cos \alpha, \quad (17)$$

$$T_{zz}^0 = 0. \quad (18)$$

Следствием условий прилипания на границе $z = 0$ (14) являются условия

$$u^0|_{z=0} = 0, \quad w^0|_{z=0} = 0, \quad (19)$$

а условие для температуры (15) приведет к следующему требованию:

$$T^0|_{z=0} = \Theta_0. \quad (20)$$

Следствием условий на свободной границе (9)-(13) являются следующие соотношения:

$$p^0 = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma \Theta^0), \quad (21)$$

$$u_z^0 = \alpha_\tau \tau(x, t) - \alpha_{Ma} \tilde{\Theta}, \quad (22)$$

$$T_z^0 + \bar{\beta}_2 \{\Theta^0(-w_z^0)\} = \bar{\beta}_3 J_0 + \bar{\beta}_6 J_0 h_{xx}. \quad (23)$$

Здесь $\Theta^0 = T^0|_\Gamma$, $\tilde{\Theta} = (T_z^0 + h_x T_z^0)|_\Gamma$.

Интегрируя уравнения (16)-(18) с учетом (19)-(23), получим, что решениями являются функции u^0, w^0, p^0, T^0 вида:

$$u^0 = (C_0)_x \frac{z^2}{2} - \gamma_1 \sin \alpha \frac{z^2}{2} + C_1 z, \quad (24)$$

$$w^0 = -(C_0)_{xx} \frac{z^3}{6} - (C_1)_x \frac{z^2}{2}, \quad (25)$$

$$p^0 = -\gamma_2 \cos \alpha z + C_0, \quad (26)$$

$$T^0 = A(x, t)z + \Theta_0. \quad (27)$$

Коэффициенты $C_0(x, t)$, $C_1(x, t)$, $A(x, t)$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$C_0(x, t) = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma \Theta^0) + \gamma_2 \cos \alpha h,$$

$$C_1(x, t) = \alpha_\tau \tau(x, t) - \alpha_{Ma} \tilde{\Theta} - (C_0)_x h + \gamma_1 \sin \alpha h,$$

$$A = \frac{(-\bar{\beta}_2 (C_1)_x h + \bar{\beta}_3 \alpha_J + \bar{\beta}_6 h_{xx} \alpha_J) \Theta_0}{1 + \bar{\beta}_2 (C_1)_x h^2 - \bar{\beta}_3 \alpha_J h - \bar{\beta}_6 \alpha_J h_{xx}}.$$

Здесь $\bar{\beta}_2 = \varepsilon \beta_2$, $\bar{\beta}_3 = \varepsilon \beta_3 \bar{J}$, $\bar{\beta}_6 = \varepsilon^2 \beta_6 \bar{J}$, функция $\tau(x, t)$ определяет действие дополнительных касательных напряжений на свободной границе и считается известной (по определению $\tau = (u_z^g + w_x^g)|_\Gamma$). Для Θ^0 и $\tilde{\Theta}$ имеем: $\Theta^0 = Ah + \Theta_0$, $\tilde{\Theta} = A_x h + (\Theta_0)_x + h_x A$.

Первые члены u^1, w^1, p^1, T^1 разложений по степеням малого параметра ε удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u_{zz}^1 = p_x^1, \quad p_z^1 = 0, \quad w_z^1 = -u_x^1, \quad (28)$$

$$T_{zz}^1 = 0. \quad (29)$$

На твердой границе $z = 0$ выполняются условия:

$$u^1|_{z=0} = 0, \quad w^1|_{z=0} = 0,$$

а из условий (15) и (19) следует:

$$T^1|_{z=0} = 0.$$

На границе $z = h(x, t)$ должны быть выполнены следующие соотношения:

$$p^1 = -2(w_z^0 - h_x u_z^0) + \alpha_{Ca} \alpha_\sigma h_{xx} \Theta^1,$$

$$u_z^1 = -\alpha_{Ma} \tilde{\Theta},$$

$$T_z^1 + \bar{\beta}_2 \{\Theta^0 h_x (u_z^0 + w_x^0) + \Theta^1 (-w_z^0)\} = 0.$$

Здесь $\Theta^1 = T^1|_{\Gamma}$, $\tilde{\Theta} = (T_x^1 + h_x T_z^1)|_{\Gamma}$.

Тогда решение системы (24)-(25) можно представить в виде:

$$u^1 = (\bar{C}_0)_x \frac{z^2}{2} + \bar{C}_1(x, t)z, \quad (30)$$

$$w^1 = -(\bar{C}_0)_{xx} \frac{z^3}{6} - \bar{C}_1(x, t)z, \quad (31)$$

$$p^1 = \bar{C}_0(x, t), \quad (32)$$

$$T^1 = B(x, t)z. \quad (33)$$

Заметим, что должны быть выполнены условия

$$\Theta_1 = B(x, t)h, \quad \tilde{\Theta} = B_x h + h_x B,$$

а функции \bar{C}_0 , \bar{C}_1 , B должны удовлетворять соотношениям:

$$\bar{C}_0(x, t) = -2\{w_z^0 - h_x u_z^0\} + \alpha_{Ca} \alpha_{\sigma} h_{xx} B h,$$

$$\bar{C}_1(x, t) = -\alpha_{Ma} \tilde{\Theta} - (\bar{C}_0)_x h,$$

$$B = -\frac{\bar{\beta}_2}{1 - \bar{\beta}_2 h} \frac{\Theta^0 h_x (u_z^0 + w_x^0)}{w_z^0}.$$

Используя выражения (24), (25), (30), (31) для выражения функций u и w через u^0 , w^0 , u^1 , w^1 , получим следующее уравнение для определения толщины слоя жидкости:

$$h_t + u h_x - w + \frac{E}{\varepsilon} J_{ev} = 0. \quad (34)$$

Таблица 1
Физические параметры задачи

Параметр	Этанол	HFE-7100	FC-72
ρ , г/см ³	0.79	1.5	1.68
ν , см ² /сек	0.015	0.0038	0.0038
σ_0 , дин/см	22	12.4	11.91
σ_T , дин/(см К)	0.08	0.114	0.09
λ_U , кал/Г	217	26.5	21
κ , кал/(сек см К)	$4 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
χ , см ² /сек	$0.89 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$	$0.32 \cdot 10^{-3}$
c_p , кал/(г К)	0.71	0.312	0.26

Таблица 2
Значения параметров α в системе «этанол—азот»

α — параметр	значения ($T_* = 1 K$)	значения ($T_* = 10 K$)
$\alpha_{\sigma} = \frac{MaCa}{RePr}$	10^{-2}	10^{-1}
$\alpha_{Ca} = \frac{\varepsilon^3}{Ca}$	$10^5 \varepsilon^3$	$10^5 \varepsilon^3$
$\alpha_D = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \bar{J}^2$	$10^{-5} \varepsilon^2$	$10^{-3} \varepsilon^2$
$\alpha_{\tau} = \frac{\rho \nu \bar{v} \varepsilon}{\bar{h}}$	$\varepsilon; 10\varepsilon$	$\varepsilon; 10\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \frac{\varepsilon Ma}{RePr}$	$10^3 \varepsilon$	$10^4 \varepsilon$

Таблица 3
Значения параметров α в системе «HFE
7100—азот»

α — параметр	значения ($T_* = 1 K$)	значения ($T_* = 10 K$)
$\alpha_{\sigma} = \frac{MaCa}{RePr}$	10^{-2}	10^{-1}
$\alpha_{Ca} = \frac{\varepsilon^3}{Ca}$	$10^6 \varepsilon^3$	$10^6 \varepsilon^3$
$\alpha_D = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \bar{J}^2$	$10^{-3} \varepsilon^2$	$10^{-1} \varepsilon^2$
$\alpha_{\tau} = \frac{\rho \nu \bar{v} \varepsilon}{\bar{h}}$	$\varepsilon; 10\varepsilon$	$\varepsilon; 10\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \frac{\varepsilon Ma}{RePr}$	$10^4 \varepsilon$	$10^5 \varepsilon$

Таблица 4
Значения параметров α в системе «FC 72—азот»

α — параметр	значения ($T_* = 1 K$)	значения ($T_* = 10 K$)
$\alpha_{\sigma} = \frac{MaCa}{RePr}$	10^{-2}	10^{-1}
$\alpha_{Ca} = \frac{\varepsilon^3}{Ca}$	$10^5 \varepsilon^3$	$10^5 \varepsilon^3$
$\alpha_D = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \bar{J}^2$	$10^{-3} \varepsilon^2$	$10^{-1} \varepsilon^2$
$\alpha_{\tau} = \frac{\rho \nu \bar{v} \varepsilon}{\bar{h}}$	$\varepsilon; 10\varepsilon$	$\varepsilon; 10\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \frac{\varepsilon Ma}{RePr}$	$10^4 \varepsilon$	$10^5 \varepsilon$

Перепишем уравнение (34) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & h_t + h_x \left\{ (C_0)_x \frac{h^2}{2} - \gamma_1 \sin \alpha \frac{h^2}{2} + C_1 h + \right. \\
 & + \varepsilon \left[(\overline{C_0})_x \frac{h^2}{2} + \overline{C_1} h \right] \left. \right\} - \left\{ - (C_0)_{xx} \frac{h^3}{6} - (C_1)_x h + \right. \\
 & \left. + \varepsilon \left[- (\overline{C_0})_{xx} \frac{h^3}{6} - \overline{C_1} \frac{h^2}{2} \right] \right\} + \frac{E}{\varepsilon} J_{ev} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь $J_{ev} = \alpha_J [A(x, t)h + \Theta_0(x, t) + \varepsilon \{B(x, t)h\}]$.

Следует отметить, что для замыкания постановки задачи необходимо задать начальное положение термокапиллярной границы раздела $h(x, 0) = h_0(x)$.

В таблице 1 представлены значения физических характеристик для систем «жидкость—газ»

вида «этанол—азот», «HFE 7100—азот», «FC 72—азот». При этом параметры азота таковы: $\rho = 1.2 \cdot 10^{-3}$, $\nu = 0.15$, $\kappa = 0.65 \cdot 10^{-4}$, $\chi = 0.3$. Значения используемых в задаче безразмерных параметров представлены в таблицах 2 и 3 для двух различных значений характерной температуры $T_* = 1$ K и $T_* = 10$ K (см. также [9, 10]).

Заключение. Эволюционное уравнение (2.) для толщины h слоя жидкости, стекающей по неравномерно нагретой подложке учитывает действие гравитационных и термокапиллярных сил, дополнительных касательных напряжений со стороны спутного потока газа, а также испарение на границе раздела. Если функция h известна, то распределение скоростей, давления и температуры также определяется с учетом формул (23)–(26) и (29)–(32).

Библиографический список

1. Копбосынов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости : сб. науч. тр. – 1983.
2. Кабов О.А., Кузнецов В.В., Марчук И.В., Пухначев В.В., Чиннов Е.А. Регулярные структуры при термокапиллярной конвекции в движущемся тонком слое жидкости // Поверхность. Рентгеновские, синхронные и нейтронные исследования. – 2001. – № 9.
3. Frank M.A., Kabov O.A. Thermocapillary structure formation in a falling film: Experiment and calculations // Phys of Fluids. – 2006. – № 18.
4. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films // Reviews of Modern Physics. – 1997. – Vol. 69 (3).
5. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 453.
6. Shklyaev O., Fried E. Stability of an evaporating thin liquid film // Journal of Fluid Mechanics. – 2007. – Vol. 584.
7. Кабов О.А., Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа // ДАН. – 2012. – № 446 (5).
8. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // Microgravity Sci. Technol. – 2009. – № 21(1).
9. Iorio C.S., Goncharova O.N., Kabov O.A. Heat and mass transfer control by evaporative thermal patterning of thin liquid layers // Computational Thermal Sci. – 2011. – №3(4).
10. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. – 2012. – № 73 (1/2).