

УДК 539.3

С. К. Голушко

Об аналитических и численных решениях прямых и обратных задач механики композитов*

S. K. Golushko

On Analytical and Computational Solutions for Direct and Inverse Problems of Composites

Приведены аналитические и численные решения прямых задач расчета напряженно-деформированного состояния и обратных задач рационального проектирования многослойных композитных конструкций. Исследовано влияние структурных и механических характеристик композиционных материалов на напряженно-деформированное состояние параболических антенн и армированных куполов, подверженных действию собственного веса, ветровой и температурной нагрузок, определены нагрузки их начального разрушения. Получены аналитические решения обратных задач рационального проектирования безмоментных оболочек вращения с двумя семействами равнонапряженной арматуры, находящихся под действием постоянного внутреннего давления. Показаны широкие возможности практической реализации и эффективность конструкций с рациональными параметрами армирования.

Ключевые слова: композиционный материал, оболочка, прямые и обратные задачи, аналитические и численные решения, напряженно-деформированное состояние.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-09

Широкое использование композитов в разнообразных конструкциях современной техники привело к ряду принципиально новых проблем механики композитных конструкций. Наиболее важными из них стали разработка структурных моделей композитов, учитывающих особенности реальной структуры, нелинейные процессы деформирования и разрушения, разработка методов решения прямых задач расчета прочности и обратных задач рационального проектирования композитных конструкций.

Определяющие соотношения полиармированного слоя. Соотношения между осредненными напряжениями и деформациями в k -м полиармированном слое могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^k &= a_{\alpha\alpha}^k e_{\alpha\alpha}^k + a_{\alpha\beta}^k e_{\beta\beta}^k + a_{\alpha 3}^k \cdot 2e_{\alpha\beta}^k - a_{\alpha\Theta}^k \Theta, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= a_{\alpha 3}^k e_{\alpha\alpha}^k + a_{\beta 3}^k e_{\beta\beta}^k + a_{33}^k \cdot 2e_{\alpha\beta}^k - a_{3\Theta}^k \Theta, \\ \gamma_{\alpha 3}^k &= q_{\alpha\alpha}^k \tau_{\alpha 3}^k + q_{\alpha\beta}^k \tau_{\beta 3}^k, \end{aligned} \quad (1)$$

In this paper, analytical and computational solutions for stress-strain state direct problems and inverse problems of composite constructions rational design are presented. The influence of structural and mechanical properties of composite materials on the stress-strain state of parabolic antennas and reinforced domes exposed to their own weight, wind loads, and temperature is investigated, and their initial failure loads are estimated. Also, analytical solutions for inverse problems of rational design of momentless rotation shells with two families of isotensoid reinforcement structure under constant internal pressure are found. This research demonstrates efficiency and manifold possibilities for practical implementation of composite constructions with rational design methodology for reinforcement parameters.

Key words: composite shell, direct and inverse problems, analytical and computational solutions, stress-strain state.

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}^k &= a_{\alpha\beta}^k(E_c^k, E_n^k, \nu_c^k, \nu_n^k, \omega_z^k, \omega_n^k, \omega_{cn}^k, \psi_n^k), \\ q_{\alpha\beta}^k &= q_{\alpha\beta}^k(E_c^k, E_n^k, \nu_c^k, \nu_n^k, \omega_z^k, \omega_n^k, \omega_{cn}^k, \psi_n^k). \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты матрицы жесткости в соотношениях (1) — (2), зависящие от структурных и механических параметров композиционного материала, выписаны, например, в [1]. В выражениях (1) — (2) $\sigma_{\alpha\alpha}^k$, $\sigma_{\alpha\beta}^k$, $\tau_{\alpha 3}^k$, $e_{\alpha\alpha}^k$, $e_{\alpha\beta}^k$, $\gamma_{\alpha 3}^k$ обозначают компоненты тензоров напряжений и деформаций k -го слоя; E_c^k , E_n^k , ν_c^k , ν_n^k — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов связующего и n -го семейства арматуры в k -м слое; ω_n^k , ω_{cn}^k , ω_z^k — интенсивности армирования в поверхности и в направлении толщины оболочки для n -го семейства арматуры и связующего материала в армирующем слое; ψ_n^k — угол армирования n -го семейства арматуры в k -м слое; Θ — приращение температуры.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-12032 офи_м), Программы Президиума РАН (проект 15.4), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-6293.2012.9)..

Сравнительный анализ расчетных характеристик однонаправленно и перекрестно армированных композиционных материалов с известными экспериментальными данными проведен в [2]. Показано, что результаты, получаемые по структурной модели композиционных материалов с двумерными волокнами Ю. В. Немировского [3] и модели В. В. Болотина [4], хорошо согласуются с экспериментальными данными, что позволяет эффективно использовать эти модели при исследовании напряженно-деформированного состояния армированных конструкций. Модель с одномерными волокнами [5] дает заниженные значения для эффективных жесткостей армированных материалов, что позволяет использовать ее для оценки прочности конструктивных элементов «сверху», с «запасом».

Численные решения прямых задач механики композитных конструкций. Системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие поведение многослойных композитных пластин и оболочек, имеют высокий порядок, переменные коэффициенты, малые параметры, приводящие к появлению краевых эффектов. Математически это проявляется в наличии в фундаментальной системе решений как быстро, так и медленно возрастающих и убывающих функций, что приводит к плохой обусловленности матрицы системы, определяющей произвольные постоянные в общем решении исходной системы дифференциальных уравнений. Такие системы принято называть жесткими, а соответствующие задачи — задачами с погранслоем. При численном решении задач с погранслоем возникают трудности, связанные с неустойчивостью счета. В работах [6–7] предложены подходы по преодолению таких трудностей.

В качестве первого примера исследуем влияние структурных и механических характеристик композиционных материалов на напряженно-деформированное состояние зеркала параболической антенны,

выполненного в виде тонкой композитной оболочки и подверженного действию собственного веса, ветровой и температурной нагрузок. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая поведение такой конструкции, сведена к последовательности краевых задач для неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

На рисунке 1 представлены зависимости максимальных приведенных интенсивностей напряжений в алюминиевой матрице bs_0 , углеродных спиральных bs_1 и окружном bs_2 семействах волокон от угла армирования ψ в зеркале параболической антенны, защемленном в центре по окружности радиуса r_0 . Из анализа полученных результатов следует, что укладка арматуры вдоль меридианов позволяет уменьшить напряжения в матрице почти в 2 раза, а прогибы — почти в 1,5 раза. При воздействии только собственного веса конструкция остается в упругом состоянии при любых параметрах армирования. Учет ветровой и температурной нагрузок приводит к существенному увеличению напряжений как в матрице, так и в арматуре. Для ряда структурных параметров композиционного материала интенсивность напряжений в алюминиевой матрице превышает предельное значение, однако подбором параметров армирования этого можно избежать.

Титановое зеркало, армированное углеродными волокнами, ведет себя в таких же условиях иначе. Напряжения в элементах композиционного материала значительно уменьшились (рис. 2), а из-за высокого предела прочности титановая матрица остается в упругом состоянии при всех значениях структурных параметров композиционного материала. Минимальные прогибы зеркальной антенны с титановой матрицей в 1,5 раза больше, чем антенны с алюминиевой матрицей, т. е. использование более высоко модульной матрицы не всегда улучшает жесткостные свойства конструкции.

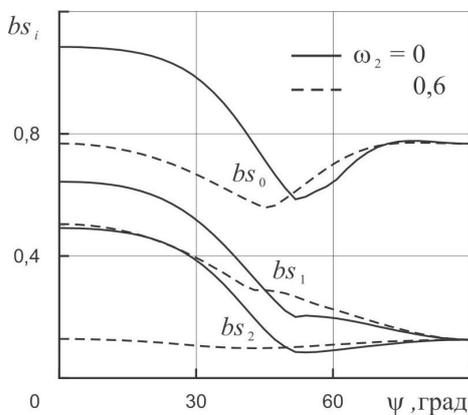


Рис. 1. Максимальные приведенные интенсивности напряжений в алюминиевой матрице bs_0 , углеродных спиральных bs_1 и окружном bs_2 семействах арматуры параболической антенны

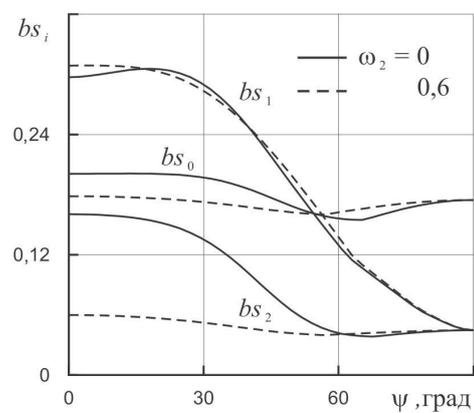


Рис. 2. Максимальные приведенные интенсивности напряжений в титановой матрице bs_0 , углеродных спиральных bs_1 и окружном bs_2 семействах арматуры параболической антенны

В качестве второго примера исследуем особенности деформирования и определим нагрузки начального разрушения армированных куполов и сводов, находящихся под действием собственного веса, ветровой и температурной нагрузок.

Представленные на рисунке 3 зависимости максимальных приведенных интенсивностей напряжений bs_0 в связующем материале купола от параметров армирования показывают, что выбором структуры композита можно более чем в 1,5 раза понизить уровень напряжений в конструкции.

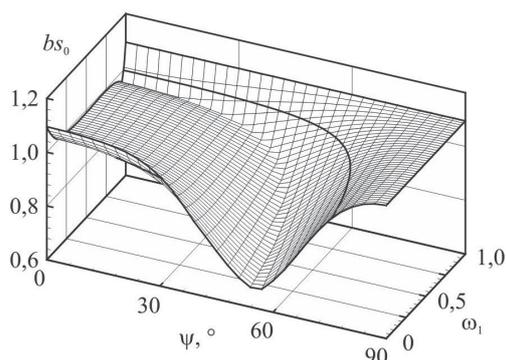


Рис. 3. Максимальные приведенные интенсивности напряжений bs_0 в матрице стеклопластикового купола

На рисунке 4 показано влияние структуры армирования на область упругого поведения гиперболического стеклопластикового купола. Кривым соответствуют параметры армирования $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,2$, $\omega_3 = 0,6$, $\psi = 15^\circ$ (кривая 1), $\psi = 45^\circ$ (кривая 2), $\psi = 75^\circ$ (кривая 3), $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0,4$ (кривая 4), $\omega_1 = 0,4$, $\omega_2 = 0$ (кривая 5), $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 1$, $\psi = 45^\circ$ (кривая 6). Очевидно, что изменением структуры армирования можно существенно влиять на прочность конструкции исходя из вида ее нагружения.

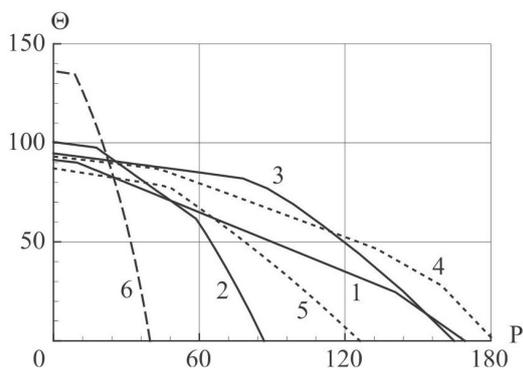


Рис. 4. Гиперповерхности прочности стеклопластиковых куполов (пояснения в тексте)

Аналитические решения обратных задач рационального проектирования композитных конструкций. Полученные решения прямых задач расчета напряженно-деформированного состояния композитных

конструкций дают основания для постановки и поиска решений обратных задач рационального проектирования композитных конструкций с целью максимального использования потенциальных возможностей композиционных материалов.

Большой практический интерес вызывают оболочки вращения, обладающие свойством максимального внутреннего объема при минимальной площади боковой поверхности. Если при этом необходимо обеспечить отверстие заданного радиуса по оси оболочки, то полусфера перестает быть наилучшей из оболочек. Этим свойством обладают нодоидные оболочки.

Решение обратной задачи проектирования квазиоднородной безмоментной нодоидной оболочки, армированной окружным и двумя симметричными относительно меридиана спиральными семействами равнонапряженных волокон, находящейся под действием постоянного внутреннего давления, можно обеспечить за счет выбора какой-либо пары функций, например, специального закона профилирования толщины стенки и интенсивности укладки спиральных семейств волокон

$$2E_1\omega_1 = [\alpha(T_1 - T_2) + \omega_2 E_2 T_1] (T_2 \cos^2 \psi - T_1 \sin^2 \psi)^{-1}, \quad (3)$$

$$2h\epsilon^* = (T_2 \cos^2 \psi - T_1 \sin^2 \psi) (\alpha \cos 2\psi + \omega_2 E_2 \cos^2 \psi)^{-1}.$$

$$T_1 = J(r \sin \theta)^{-1}, \quad T_2 = R_2 q_3 - J(R_1 \sin^2 \theta)^{-1},$$

$$J = \int_{\theta_0}^{\theta} r R_1 (q_3 \cos \theta - q_1 \sin \theta) d\theta + c_0.$$

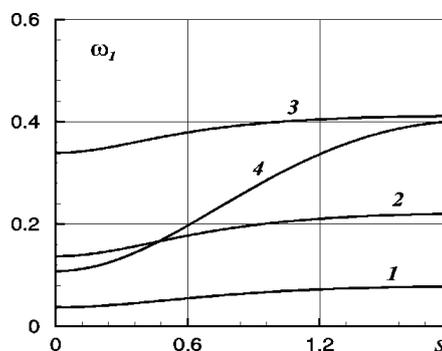


Рис. 5. Интенсивности спирального армирования безмоментной нодоидной оболочки с равнонапряженной арматурой

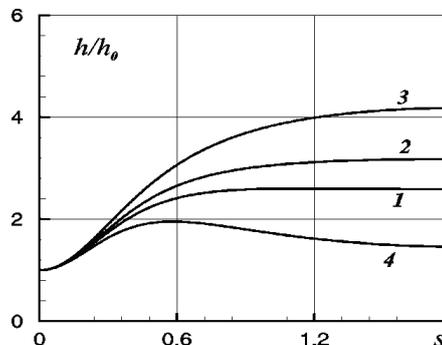


Рис. 6. Приведенные толщины безмоментной нодоидной оболочки с равнонапряженной арматурой

На рисунках 5, 6 приведены зависимости интенсивности спирального армирования и толщины стенки пододной оболочки вдоль ее меридиана, построенные на основе аналитического решения (3). Кривым 1–4 отвечают следующие значения параметров: 1 — $E_1 = 400$ ГПа, $E_2 = 80$ ГПа, $\psi = 20^\circ$; 2 — $E_1 = 300$

ГПа, $E_2 = 300$ ГПа, $\psi = 10^\circ$; 3 — $E_1 = 80$ ГПа, $E_2 = 400$ ГПа, $\psi = 20^\circ$; 4 — $E_1 = 400$ ГПа, $E_2 = 80$ ГПа, $\psi = 48^\circ$.

Из полученных результатов следует, что существуют достаточно широкие возможности для реализации полученных рациональных решений.

Библиографический список

1. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. — М., 2008.
2. Голушко С. К. Сравнительный анализ моделей композиционных материалов при расчете круглых пластин и оболочек вращения // Вычислительные технологии. — 2004. — Т. 9, № 10.
3. Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров. — 1972. — № 5.
4. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. — М., 1980.
5. Немировский Ю. В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // Журнал прикладной механики и технической физики. — 1969. — № 6.
6. Голушко С. К., Горшков В. В., Юрченко А. В. О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии. — 2002. — Т. 7, № 2.
7. Голушко С. К., Морозова Е. В., Юрченко А. В. О численном решении краевых задач для жестких систем дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Сер.: Математика, механика, информатика. — 2005. — № 2.