

А.В. Проскурин, А.М. Сагалаков

Вейвлет-аппроксимация и краевые задачи на собственные значения математической физики

A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov

Wavelet Approximation and Boundary Eigenvalue Problems in Mathematical Physics

В работе рассмотрено применение вейвлетов в задачах математической физики. Использование базисов вейвлетов при решении задач математической физики – относительно новая и перспективная область науки. Исследована аппроксимация функций при помощи вейвлетов WAVE, MHAT, DOG, MORLET, семейства Добеши. Подробно изучено влияние масштаба детализации и типа материнского вейвлета на точность приближенного представления функции. Для вейвлетов WAVE, MHAT, DOG, MORLET качество аппроксимации сильно зависит от выбора материнского вейвлета: в рассмотренном примере наибольшая скорость сходимости отмечена для вейвлета WAVE и MORLET, хуже результаты для DOG и MHAT. Также следует отметить, что после определенного уровня увеличение точности не происходит. Это обусловлено, по-видимому, деталями реализации алгоритма, точностью вычисления интегралов. Ортогональные вейвлеты (HAAR(D1), D2, D10) демонстрируют более стабильное поведение: с увеличением порядка вейвлета Добеши скорость сходимости увеличивается. Предложен метод решения краевой задачи на собственные значения. В зависимости от количества слоев разрешения, вычисляется разное количество собственных значений. Таким образом, метод позволяет отфильтровывать собственные числа, соответствующие собственным функциям заданного масштаба.

Ключевые слова: вейвлеты, аппроксимация, краевые задачи, метод Галеркина.
DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-52

Введение. Методы приближенного представления функций можно разделить на две группы: высокого и низкого порядка точности. К методам низкого порядка относятся метод конечных разностей и метод конечных элементов, которые широко используются в научных и инженерных вычислениях. Но они обладают и некоторыми недостатками, главным из которых является медленная сходимость, что усложняет вычисления на плоскости и в про-

A wavelet approach for mathematical physics is considered in the paper. Application of wavelet bases for solving problems of mathematical physics – a relatively new promising area of science. We investigate a approximation of function using WAVE, MHAT, DOG, MORLET and Daubechies wavelets. A effect of influence of scale of detalization and type of mother wavelet to the accuracy of the approximation studied in detail. For wavelets WAVE, MHAT, DOG, MORLET approximation quality depends from the choice a one of them: for the example function the highest rate of convergence is marked for wavelet WAVE and MORLET, worse results for DOG and MHAT. It should also be noted that after a certain level increase of accuracy does not occur. This is due, apparently, the implementation details of the algorithm, accurate computation of integrals. Orthogonal wavelets (HAAR (D1), D2, D10) show a more stable behavior: with increasing order of Daubechies wavelet convergence rate increases. The method for boundary eigenvalue promlem is proposed. Depending of number of layers the method calculate some number of eigenvalues. Thus, the method allows to filter the eigenvalues corresponding to eigenfunctions of given scale.

Key words: wavelets, approximation, boundary problem, Galerkin method.

странстве. К методам высокого порядка можно отнести методы, основанные на приближении функций полиномами. Данная группа методов чувствительна к качеству постановки задачи, также имеются трудности при удовлетворении граничным условиям.

В 80-х гг. XX в. получила развитие идея приближения функций при помощи вейвлетов. Вейвлет – это функция $\psi(x)$, ненулевые значения которой локализованы на некотором отрезке оси

x . При определенных условиях функция $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ может быть представлена в виде сжатий (растяжений) и смещений материнского вейвлета ψ . Данный метод по своим свойствам, по-видимому, занимает промежуточное положение по сравнению с рассмотренными выше двумя группами методов (см. например: [1]). Он был по достоинству оценен в тех областях, которые бурно развивались после его появления, в частности, в области обработки сигналов и изображений. Применения данного метода для приближенного представления функций при решении уравнений математической физики менее известны. Данное направление является относительно новым и содержит много нерешенных задач. Все эти вопросы более подробно обсуждаются в работах [2–4].

1. Численный метод. Рассмотрим дискретное вейвлет-преобразование (см. [5]). Соответствующее множество вейвлетов имеет вид

$$\psi_{ij}(x) = a_0^{-\frac{i}{2}} \psi(a_0^{-i}x - jb_0), \quad (1)$$

где i, j — целые числа, a_0 — параметр сжатия, b_0 — параметр смещения. Функция $y(x)$, $x \in [a, b]$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{ij} c_{ij} \psi_{ij}, \quad (2)$$

где c_{ij} — коэффициенты, которые могут быть найдены по формуле

$$c_{ij} = \int_a^b dx y(x) \psi_{ij}(x), \quad (3)$$

если вейвлеты ортонормированы. В противном случае следует решать линейное алгебраическое уравнение

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{d}, \quad (4)$$

где \mathbf{c} — вектор, составленный из c_{ij} для всех i и j , Элементы матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{d} получены из выражений $\int_a^b dx \psi_{kl} \psi_{ij}$ и $\int_a^b dx y(x) \psi_{kl}$ соответственно.

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$Ly = \lambda y, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (5)$$

где L — дифференциальный оператор, а λ — собственное значение. Решение (5) может быть представлено в виде, аналогичном (2)

$$f(x) = R(x) \sum_{ij} c_{ij} \psi_{ij}, \quad (6)$$

где $R(x)$ — функция, обращающаяся в нуль на концах отрезка. Уравнение (5) при помощи метода Галеркина сведем к алгебраической задаче на собственные значения

$$\mathbf{Ac} = \lambda \mathbf{Bc}, \quad (7)$$

где \mathbf{c} — вектор, составленный из c_{ij} для всех i и j , Элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} получены из выражений

$$\int_a^b dx L(R(x) \psi_{ij}) \psi_{kl} \quad \text{и} \quad \int_a^b dx \psi_{ij} \psi_{kl}$$

соответственно. Алгебраическую задачу на собственные значения (7) можно решить при помощи стандартных математических программ, например, LAPACK.

2. Результаты вычислений. Для тестирования алгоритма рассмотрим задачу аппроксимации функции $y(x) = \sin(2\pi x)$ на отрезке $[-1, 1]$. В первом слое детализации примем расстояние между вейвлетами равным ширине отрезка. Слои более высокого разрешения будем строить в соответствии с кратномасштабным принципом с коэффициентом 2, всего шесть слоев. Возьмем следующие распространенные типы вейвлетов: WAVE, MHAT, DOG, MORLET, HAAR(D1), Добеши D2 и D10. Соответствующие формулы приведены в таблице 1, кроме вейвлетов Добеши, которые не имеют явного представления. Интегралы (3) были вычислены методом трапеций по равномерной сетке из 1000 точек.

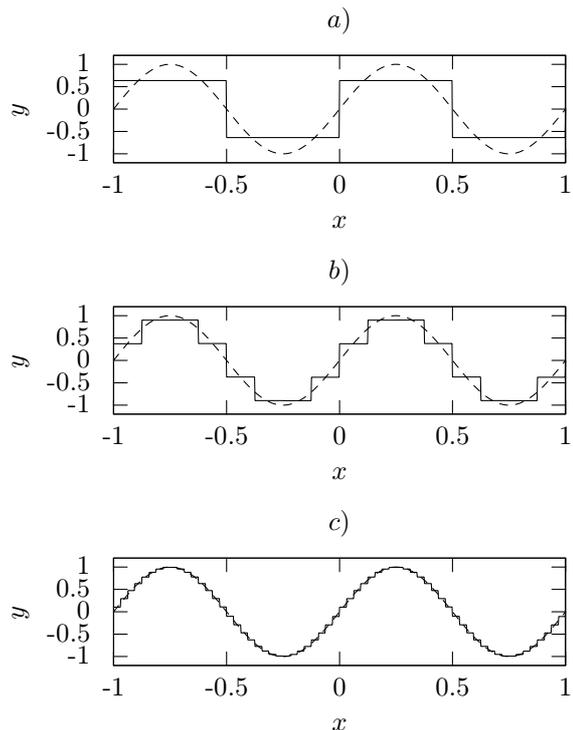


Рис. 1. Графики функции $y(x) = \sin(2\pi x)$ (пунктирная линия) и ее приближенного представления (сплошная линия) при помощи вейвлета Хаара в случае двух (а), четырех (б) и шести (с) слоев

В таблице 1 приведены абсолютные значения ошибки аппроксимации для рассмотренных вейвлетов в зависимости от числа слоев детализации.

Таблица 1

Таблица максимального уклонения аппроксимирующей функции для разного количества слоев

Тип вейвлета	Формула	Число слоев					
		1	2	3	4	5	6
WAVE	$\psi(x) = -x e^{-0.5x^2}$	0.1	0.015	1.0e-5	1.0e-6	1.0e-6	1.0e-6
МНАТ	$\psi(x) = \frac{2}{30.5\pi^{0.25}} (1-x^2) e^{-0.5x^2}$	0.15	0.3	0.14	0.004	0.002	2.0e-4
DOG	$\psi(x) = e^{-(x^2)/2.0} - 0.5e^{-(x^2)/8.0}$	0.1	0.02	0.01	0.001	1.0e-4	0.012
MORLET	$\psi(x) = e^{-0.5x^2} \cos(5x)$	0.15	8.0e-4	6.0e-4	8.0e-5	9.0e-4	3.0e-5
НААР	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ -1, & 0.5 \leq x < 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$	1	0.7	0.7	0.4	0.2	0.1
D2	—	1.2	1	0.4	0.15	0.04	0.01
D10	—	0.25	0.03	0.015	6.0e-5	6.0e-5	5.0e-5

Таблица 2

Таблица собственных значений при разном количестве слоев

λ_k	1	4	9	16	25	36	49	64
Число слоев	D10							
1	0.9999	4.0000	—	—	—	—	—	—
2	0.9999	4.0000	9.0001	16.0023	—	—	—	—
3	0.9999	3.9999	8.9999	16.0002	—	—	—	—
4	0.9999	3.9998	8.9999	15.9991	24.9997	35.9995	—	—
5	0.9999	3.9998	8.9999	15.9989	24.9995	35.9997	48.9999	63.9998
Число слоев	WAVE							
1	0.9999	4.0000	9.0002	—	—	—	—	—
2	1.0000	3.9999	—	—	—	—	—	—
3	0.9999	3.9999	8.9999	16.0000	—	—	—	—
4	0.9999	4.0000	9.0001	16.0000	—	35.9954	—	—
5	0.9999	3.9999	9.0000	16.0000	24.9993	36.0073	49.0461	—

Для вейвлетов WAVE, МНАТ, DOG, MORLET качество аппроксимации сильно зависит от выбора материнского вейвлета: наибольшая скорость сходимости отмечена для вейвлета WAVE и MORLET, хуже результаты для DOG и МНАТ. Также следует отметить, что после определенного уровня увеличение точности не происходит. Это обусловлено, по-видимому, деталями реализации алгоритма, точностью вычисления интегралов. Ортогональные вейвлеты (НААР, D2, D10) демонстрируют более стабильное поведение: с увеличением слоев разрешения точность увеличивается. Как и следовало ожидать, скорость сходимости наименьшая у вейвлета НААР(D1) и наибольшая у D10. Для примера на рисунке 1 приведены графики функции $y(x) = \sin(2\pi x)$ (пунктирная линия) и ее приближенного представления (сплошная линия) при помощи вейвлета Хаара в случае двух (а), четырех (b) и шести (c) слоев.

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' = -\lambda y, y(0) = y(\pi) = 0. \tag{8}$$

Ее решение: $y_k = \sin(kx)$, $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Для вычислений примем разбиение отрезка, как и в предыдущем примере, равномерным, 1000 точек. В таблице 2 приведены собственные значения, вычисленные с использованием разного числа слоев от одного до пяти, с помощью вейвлетов WAVE и D10. В зависимости от количества слоев разрешения вычисляется разное количество собственных значений. Это объясняется тем, что собственные функции рассматриваемой задачи при увеличении номера k требуют увеличения уровня детализации. Также вычисляется некоторое количество ложных собственных значений. Такие собственные значения легко отсеять, так как соответствующие им собственные функции имеют нулевую амплитуду.

Заключение. В работе подробно исследовано влияние масштаба детализации и типа материнского вейвлета на точность приближенного представления функции: увеличение детализации до некоторого предела увеличивает точность. Предел точности, по-видимому, ограничен погрешностями вычислений при реализации алгоритма. Увеличение слоев детализации, однако, не влечет прямо увеличение точности вычисления собственных значений, но позволяет вычислить собственные значения, которые соответству-

ют собственным функциям с меньшими характерными масштабами. Таким образом, метод позволяет отфильтровывать собственные числа на основе априорных представлений о масштабах собственных функций, полученных, например, в результате эксперимента.

Данный алгоритм может быть эффективно использован для решения других краевых задач на собственные значения, например, задач гидродинамической устойчивости, рассмотренных в работах [6, 7].

Библиографический список

1. Liandrat J, Tchamitchian Ph. Resolution of the 1D regularized Burgers equation using a spartial wavelet approximation // Rep. Insitute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center. — 1990.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. — 1996. — Т. 166, № 11.
3. Vuduc R. A Wavelet Collocation Method for Solving PDEs // J. Comp. Phys. — 2000. — Vol. 165.
4. Christov I. Wavelet-Galerkin Methods for Partial Differential Equations // Massachusetts Institute of Technology Matrix Analysis and Wavelets REU, TAMU. — 2003.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск, 2001.
6. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Численное моделирование устойчивости локализованных возмущений в течении Пуазейля // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 3.
7. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Локальные возмущения в течении Пуазейля // Известия Алтайского государственного университета. — 2012. — Вып. 2/1.