

*Д.И. Попов, Р.М. Утемесов***Маломодовое приближение в задаче Бенара-Рэлея для двухфазной смеси***D.I. Popov, R.M. Utemesov***Low-Dimensional Approximation of Rayleigh–Benard Convection Problem for Two-Phase Mixture**

Рассмотрена задача Бенара-Рэлея о конвекции двухфазной смеси в горизонтальном слое, подогреваемом снизу. В качестве модели, определяющей движение дисперсной смеси, рассматриваются уравнения приближения Эйлера взаимно проникающего движения сплошных сред. Тепло-массообмен в смеси твердых частиц и несжимаемого газа описывается двухскоростными и двухтемпературными уравнениями. Несущая среда является несжимаемым вязким газом, а дисперсная рассматривается, как сжимаемый газ, касательные и нормальные напряжения в котором равны нулю. Получена конечномерная динамическая система, обобщающая уравнения Лоренца на случай двухфазных сред. Показано, что в случае дисперсной смеси условия устойчивости стационарных решений видоизменяются, а в их определение входит параметр, характеризующий силу трения на границе раздела фаз. При этом число Рэлея, при котором стационарное решение теряет устойчивость повышается. Численно построены фазовые портреты динамической системы для различных чисел Рэлея. Результаты расчетов указывают на качественное изменение сценария перехода к хаотическому движению для дисперсной смеси. Например, при числах Рэлея, для которых характерно сильно хаотическое движение в случае однородной жидкости, наблюдается притягивающее множество типа странного аттрактора Лоренца.

Ключевые слова: задача Бенара-Рэлея, двухфазные среды, нелинейная динамика.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-51

Половина столетия прошла с момента выхода работы Лоренца [1], описывающей детерминированный хаос в конечномерной динамической системе. Известен так же результат (см., например: [2–4]) о конечной размерности многообразия, описывающего турбулентное движение, для одной из наиболее важных бесконечномерных динамических систем, уравнение Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Разумеется, для получения реалистичных количественных результатов необходимы вычислительные схемы высокого разрешения [5]. Однако преимущество динамических систем малой размерности заключается в возможности качественно описывать такие сложные явления, как переход к хаосу, методами нелинейной динамики (см., например: [6]).

The Rayleigh–Benard convection problem in a horizontal layer of a two-phase mixture heated from below is considered. The model of disperse flow is described with the Eulerian approach of interpenetrating motion of two continua. Two-fluid velocity and temperature field equations are used to describe heat and mass transfer in mixture. The carrier medium is concerned as incompressible viscous gas and dispersed phase is concerned as gas without tangential and normal tensions. The low-order dynamical system, generalized Lorenz equations for two-phase flow, is obtained. It is shown that in the case of disperse flow the stability conditions of the stationary solution are modified and the description of that conditions includes the parameter characterizing interfacial viscous force. The critical Rayleigh number increases. Phase portraits of dynamical system at various Rayleigh numbers are numerically obtained. With numerical results, we can see transformation of transition to chaotic motion for disperse flow. For example, one can observe the attractor, type of Lorentz attractor, at values of Rayleigh number corresponding to strongly chaotic homogeneous flow.

Key words: Rayleigh–Benard problem, two-phase flow, nonlinear dynamics.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №1.3820.2011, гранта РФФИ 13-08-01097 и программы стратегического развития.

1. Уравнения конвекции дисперсной смеси. Будем рассматривать тепловую гравитационную конвекцию в приближении Обербека-Буссинеска [7]. Движение смеси описывается уравнениями двухскоростной модели монодисперсной смеси [8]. Дисперсионная фаза является несжимаемой вязкой жидкостью, а дисперсная представлена облаком твердых частиц, нормальные и касательные напряжения в котором равны нулю. Положим, что на границе раздела фаз действует сила трения Стокса, а межфазный теплообмен определяется законом Фурье. Таким образом, межфазное взаимодействие будет характеризоваться величинами $\tau_v' = m/(3\pi d\mu)$, $\tau_T' = mc_p/(2\pi d k)$ – времена скоростной и тепловой релаксации соответственно. Здесь m , d , c_p – масса, диаметр и теплоемкость материала частиц; k – коэффициент теплопроводности жидкости. При переходе к безразмерным уравнениям нами будут приняты следующие обозначения: $\rho = \bar{\rho}_p/\bar{\rho}_f$, $\tilde{c} = c_p/c_f$, $a = d/2$, $\tau_v = 2/9(a/h)^2(\rho_p^*/\rho_f)$, $\tau_T = (\tilde{c}Pr/3)(a/h)^3(\rho_p^*/\rho_f)$. Здесь $\bar{\rho}_p$, $\bar{\rho}_f$ – плотности материала частиц и жидкости, c_f – теплоемкость несущей среды, $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, h – характерный масштаб длины. Далее единицы измерения и обозначения приняты такими же, как в работе [1].

Положим, что в равновесном состоянии температура и плотность смеси являются однородными и постоянными. При этом скоростью оседания частиц $\mathbf{v}_s = \tau_v' \mathbf{g}$ пренебрегаем, принимая величину τ_v' достаточно малой. Будем считать, что объемная концентрация достаточно мала так, что кажущаяся вязкость смеси определяется формулой Эйнштейна [9]. Считается, что изменение плотности облака частиц обусловлено температурным расширением несущей жидкости [10]. В двумерном случае, учитывая условие несжимаемости несущей среды и принятые обозначения (см. [1]), уравнения движения смеси в безразмерной форме запишутся в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \{\psi, \Delta \psi\} = \frac{b\sigma}{4\pi^2} \Delta \Delta \psi + \frac{4\sigma r}{b\alpha^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + (\rho/\tau_v)\omega - (\rho/\tau_v)\Delta \psi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\tau_v} v_x - \frac{1}{\tau_v} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\tau_v} v_z + \frac{1}{\tau_v} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \{\psi, \theta\} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{b}{4\pi^2} \Delta \theta + \frac{\rho \tilde{c}}{\tau_T} (\theta_p - \theta), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_p}{\partial x} + v_z \frac{\partial \theta_p}{\partial z} = -\frac{1}{\tau_T} (\theta_p - \theta) + v_z. \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения: ψ – функция тока, v_x , v_z – компоненты скорости,

$\omega = \partial_x v_z - \partial_z v_x$ – двумерная завихренность, σ – число Прандтля. В задаче Бенара-Рэлея уравнениями (1)-(5) описывается конвекция в горизонтальном бесконечном слое неоднородной жидкости, ограниченном параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = h$. Температура на границах слоя фиксирована. В состоянии равновесия температурный напор внутри слоя задается выражением $-(T(0)-T(h))/h \cdot z$. Символом θ обозначено отклонение температуры от равновесной.

2. Уравнения конечномерного приближения. Рассмотрим приближенное решение для функции тока и поля температуры для жидкости в виде

$$\psi = y_1(t) \sqrt{2}(\pi^2 \alpha)^{-1} \sin(\pi \alpha x) \sin(\pi z), \quad (6)$$

$$\theta = y_2(t)(\pi r)^{-1} \sqrt{2} \cos(\pi \alpha x) \sin(\pi z) - y_3(t)(\pi r)^{-1} \sin(2\pi z). \quad (7)$$

Для континуума частиц приближение представим в следующей форме:

$$v_x = -y_4(t) \sqrt{2}(\pi \alpha)^{-1} \sin(\pi \alpha x) \cos(\pi z), \quad (8)$$

$$v_z = y_5(t) \sqrt{2} \pi^{-1} \cos(\pi \alpha x) \sin(\pi z), \quad (9)$$

$$\theta_p = y_6(t)(\pi r)^{-1} \sqrt{2} \cos(\pi \alpha x) \sin(\pi z) - y_7(t)(\pi r)^{-1} \sin(2\pi z). \quad (10)$$

Подставляя выражения (6)-(10) в уравнения (1)-(5) и приравнявая множители при одинаковых модах, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \sigma(y_2 - y_1) - (\rho/\tau_v)y_1 + (\rho/\tau_v)(\tilde{b}_1 y_5 - \tilde{b}_2 y_4), \\ \dot{y}_2 &= -y_1 y_3 + r y_1 - y_2 + (\rho \tilde{c}/\tau_T)(y_6 - y_2), \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - b y_3 + (\rho \tilde{c}/\tau_T)(y_7 - y_3), \\ \dot{y}_4 &= (1/\tau_v)(y_1 - y_4), \\ \dot{y}_5 &= (1/\tau_v)(y_1 - y_5), \\ \dot{y}_6 &= -y_5 y_7 + r y_5 - (1/\tau_T)(y_6 - y_2), \\ \dot{y}_7 &= (1/2)(y_4 + y_5)y_6 - (1/\tau_T)(y_7 - y_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\tilde{b}_1 = 1 - b/4$, $\tilde{b}_2 = b/4$. Уравнения системы (11) можно записать в векторной форме

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(\mathbf{y}). \quad (12)$$

Легко видеть, что след матрицы \mathbf{A} , коэффициенты a_{ij} которой определяются из соотношений (11), является отрицательной величиной и выражается по формуле

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{A}) &= -(\sigma + b + 1) - \\ &\quad -(\rho + 2)/\tau_v - 2(1 + \rho \tilde{c})/\tau_T. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнений (11) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|^2 &= - \sum_{i=1}^7 |a_{ii}| y_i^2 + \sum_{i,j=1}^7 q_{ij} y_i y_j + \\ &+ \frac{1}{2} (y_4 - y_5) y_6 y_7. \end{aligned} \quad (14)$$

Величины q_{ij} несложно определить из уравнений (11). Квадратичную форму в уравнении (14) выбором координат можно привести к главным осям

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{y}}\|^2 = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \xi_i^2 + \sum_{i,j,k=1}^7 \mathcal{M}_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k. \quad (15)$$

Здесь λ_i – собственные числа матрицы A . Мы можем сформулировать условия асимптотической устойчивости начала координат при том условии, что все $\lambda_i < -\delta_1$ и $\|\tilde{\mathbf{y}}\|^2 < \delta$, где $\delta, \delta_1 > 0$. Действительно, в этом случае правую часть уравнения (15) можно оценить величиной

$$(\lambda + \mathcal{M}/2 + \mathcal{M}/2 \cdot \delta) \|\tilde{\mathbf{y}}\|^2.$$

Откуда для $\lambda = \max(\lambda_i)$ следует отношение

$$\lambda < -\mathcal{M}/2(1 + \delta).$$

Здесь $\mathcal{M} = \max(|\mathcal{M}_{ijk}|)$. Тогда на основании классической теоремы некоторая окрестность нуля V_0 будет отображаться фазовым потоком системы (11) в себя по следующему закону:

$$V_k = V_0 e^{-k \text{Tr}(A)}.$$

Выражения для собственных чисел матрицы A чрезвычайно громоздки. Устойчивость начала координат определяется критерием Рауса-Гурвица. Например, одним из главных миноров матрицы A задается условие устойчивости

$$r < r_c = (1 + \rho/(\tau_v \sigma))(1 + \rho \tilde{c}/\tau_T). \quad (16)$$

Из отношения (16) следует значительное повышение порога устойчивости по сравнению с однородной жидкостью.

Система (11) имеет дополнительно особые точки Y и Y' , задаваемые значениями

$$\begin{aligned} y_3 = y_7 = Z, \quad y_1 = y_4 = y_5 = X, \\ Z = r - \left(1 + \frac{\rho(b+1)}{\tau_v \sigma}\right) \frac{1}{1 + \rho \tilde{c}}, \\ X = \pm \sqrt{bZ / \left(1 + \frac{\rho(b+1)}{\tau_v \sigma}\right)}, \\ y_2 = \left(1 + \frac{\rho(b+1)}{\tau_v \sigma}\right) X, \\ y_6 = y_2 + \tau X(r - Z). \end{aligned}$$

Точками Y и Y' определяются стационарные конвективные валы.

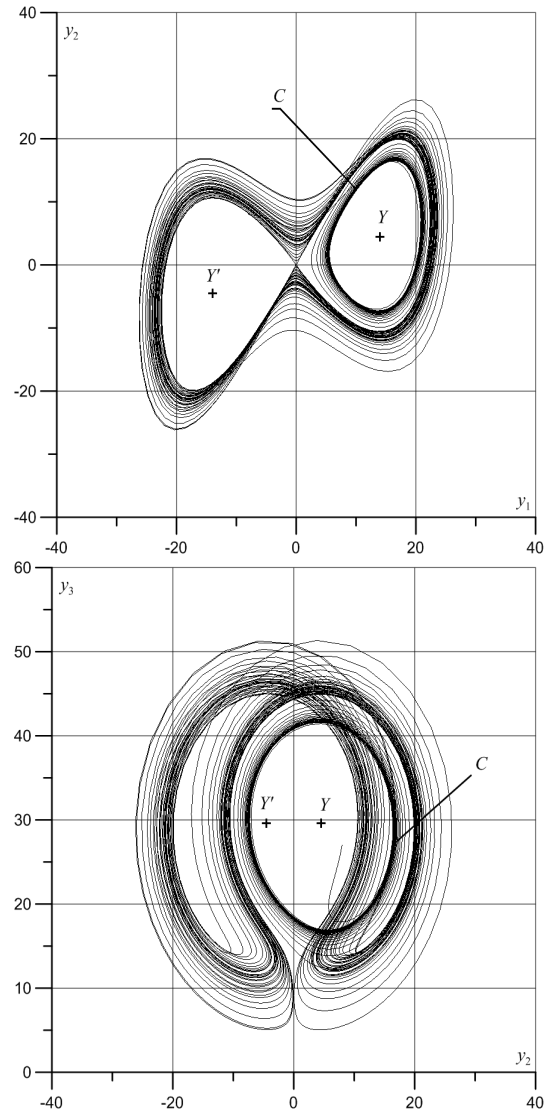


Рис. 1. Две проекции решения при $r = 30$

3. Численные результаты. Для решения задачи (11) применялся явный метод Рунге–Кутты, основанный на формулах Дорманда и Принса с автоматическим управлением длиной шага [11]. Были положены следующие параметры смеси: $d/h = 0,01$, $\tau_v = 0,0023$, $\tau_T = 0,0068$, $\rho = 0,1$ и $\sigma = 10$ (см. [10]). На рисунке 1 представлены проекции решения для значения приведенного числа Рэлея $r = 30$. На рисунке видны устойчивые особые точки Y и Y' , неустойчивый цикл C . Обращает на себя внимание наличие аттрактора, движение на котором является стохастическим. Для сравнения на рисунке 2 представлены проекции орбиты для случая однородной жидкости. Известно, что при $r = 30$ движение сильно хаотичное, что видно из рисунка 2. Результаты расчетов показывают, что линейные размеры аттрактора увеличиваются с ростом r , а фазовый объем остается конечным.

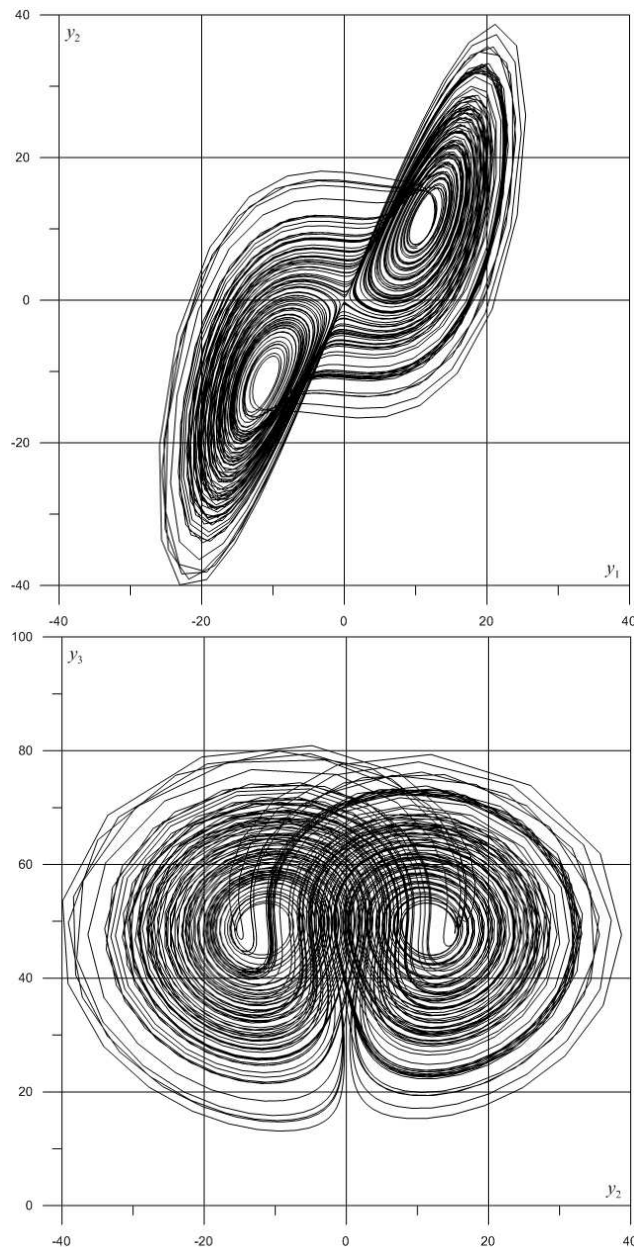


Рис. 2. Две проекции решения при $r = 30$ для однородной жидкости

Заключение. Необходимо отметить сильное стабилизирующее воздействие примеси. Данный эффект проявляется как в количественных харак-

теристиках условий устойчивости, так и в скорости уменьшения фазового объема динамической системы.

Библиографический список

1. Lorenz E. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. — 1963. — V. 20.
2. Ladyzhenskaya O.A. A dynamical system generated by the Navier-Stokes equations // Journal of Mathematical Sciences. — 1975. — V. 20, P.vol. 3, №4.
3. Foias C. and Temam R. Finite parameter approximative structure of actual flows // in Nonlinear Problems: Present and Future, A.R. Bishop, D. K. Campbell, and B. Nicolaenko, Eds., vol. 61 of North-Holland Mathematics Studies. — 1982. — V. 61.
4. Delin Wu. The Finite-Dimensional Uniform

Attractors for the Nonautonomous g-Navier-Stokes Equations // Journal of Applied Mathematics. — 2009. — V. 2009.

5. Canuto C.G., Hussaini M.Y., Zang T.A. Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics — Springer, 2007.

6. Кузнецов С.П., Жалнин А.Ю., Сатаев И.Р., Седова Ю.В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неавтономной механике «кельтского камня» // Нелинейная динамика. — 2012. — Т. 8, №4.

7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвек-

тивная устойчивость несжимаемой жидкости. Гл. ред. физ.-мат. лит. — М., 1972.

8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М., 1987.

9. Соу С.Л. Гидродинамика многофазных систем. — М., 1971.

10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. — М., 1989.

11. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1990.