УДК 539.3

А. Н. Андреев

Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин

A. N. Andreev

A Mathematical Model of Thermoelastic Deformation of Layered Composite Shells and Plates

Представлена неклассическая математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин. В ее основу положены специальные законы распределения компонент вектора перемещений и теплового потока по толщине оболочки, позволившие учесть поперечные сдвиговые деформации, нелинейное распределение температуры по толщине слоистого пакета, удовлетворить условиям идеального теплового, кинематического и силового сопряжения слоев, условиям термомеханического нагружения на граничных поверхностях оболочки, условиям сопряжения полей деформаций и температур. В пространстве изображений по Лапласу составлен функционал, для которого уравнениями Эйлера соответствующей вариационной задачи служат уравнения трехмерной задачи термоупругости в изображениях. Принятые допущения позволили свести данный пространственный функционал к двумерному и получить из него корректные дифференциальные уравнения и краевые условия связанной задачи термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин в изображениях, а после обращения преобразования Лапласа — в оригиналах.

Ключевые слова: слоистая композитная оболочка, связанная задача термоупругого деформирования, поперечные сдвиговые деформации.

A non-classical mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates is presented. It is based on special distribution laws for components of the displacement vector and the heat flow through the shell thickness. It takes into account transverse shear deformation and nonlinear temperature distribution across the thickness of laminated package to satisfy the conditions of ideal thermal, kinematic, and structural coupling of layers, thermomechanical loading conditions on boundary surfaces of the shell, coupling conditions of deformation fields and temperatures. A novel functional in the Laplace-transform domain is developed which uses three-dimensional thermoelasticity problem equations as the Euler equations of corresponding variational problem. With the assumptions made, the functional is reduced to the two-dimensional functional, and differential equations and boundary conditions of coupled thermoelastic deformation problem of layered composite shells and plates are formulated for the Laplace-transform domain for further inversion.

Key words: layered composite shell, coupled thermoelastic deformation problem, transverse shear deformation

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-02

Введение. Построение математической модели, адекватно описывающей процесс термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин, требует разрешения ряда принципиальных вопросов, а именно:

— разработки методики определения интегральных коэффициентов теплопроводности армированного слоя и построения эффективных определяющих уравнений его термоупругого поведения;

— разработки неклассической кинематической модели деформирования слоистой оболочки и нелинейной модели распределения теплового потока по толщине оболочки, позволяющих учесть поперечные сдвиговые деформации, обеспечить условия механического и теплового сопряжения слоев и условия термомеханического нагружения на лицевых поверхностях оболочки;

— построения замкнутой системы дифференциальных уравнений и соответствующих им краевых и начальных условий связанной задачи термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин;

— разработки и апробации эффективных численных методов решения соответствующих начально-краевых задач.

Рассмотрению этих вопросов посвящены последующие разделы.

1. Структурная модель термоупругого поведения однонаправленно армированного слоя. Система допущений, в рамках которой строятся эффективные теплофизические и механические характеристики однонаправленно армированных волокнистых композитов, подробно изложена в [1, с. 28; 2, с. 8].

1.1. Теплопроводность однонаправленно армированного слоя. Линейный закон Фурье для квазиоднородного анизотропного материала армированного слоя (в двойные угловые скобки заключены средние по объему представительного элемента величины) записывается в виде:

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = -\hat{\Lambda}_{ij} \nabla_j \langle\langle T \rangle\rangle. \qquad (1.1.1)$$

$$\hat{\Lambda}_{11} = \bar{\omega}\bar{\omega}_z \lambda_a + \left(1-\bar{\omega}\bar{\omega}_z\right)\lambda_c, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \lambda_c \frac{\bar{\omega}\left(1-\bar{\omega}_z\right)\lambda_c + (1-\bar{\omega}\left(1-\bar{\omega}_z\right))\lambda_a}{\bar{\omega}\lambda_c + \left(1-\bar{\omega}\right)\lambda_a},$$

$$\hat{\Lambda}_{33} = \lambda_c \frac{\bar{\omega}\lambda_a + (1-\bar{\omega})\lambda_c}{\bar{\omega}\left(1-\bar{\omega}_z\right)\lambda_a + (1-\bar{\omega}(1-\bar{\omega}_z))\lambda_c},$$

$$\hat{\Lambda}_{ij} = 0, i, \ j = 1,2,3; \ \ i \neq j. \qquad (1.1.2)$$

Пояснения всех величин приведены в [1, с. 29; 2, с. 14].

1.2. Определяющие уравнения термоупругого поведения однонаправленно армированного слоя. Эффективные определяющие уравнения волокнистого композитного материала записываются в виде [1, с. 31]

$$\langle\langle \sigma_{(\alpha\beta)} \rangle\rangle = \hat{A}_{(\alpha\beta\lambda\mu)} \langle\langle \varepsilon_{(\lambda\mu)} \rangle\rangle - \hat{c}_{(\alpha\beta)} \langle\langle \vartheta \rangle\rangle, \qquad (1.2.1)$$

$$\langle\langle \tau_{(\alpha 3)} \rangle\rangle = \hat{p}_{(\alpha\beta)} \langle\langle \gamma_{(\beta 3)} \rangle\rangle, \ \ \langle\langle \gamma_{(\alpha 3)} \rangle\rangle = \hat{q}_{(\alpha\beta)} \langle\langle \tau_{(\beta 3)} \rangle\rangle.$$

Здесь $\| \hat{p}_{(\alpha\beta)} \| = \| \hat{q}_{(\alpha\beta)} \|^{-1}$, в двойные угловые скобки заключены средние по объему представительного элемента величины. Выражения для составляющих тензоров эффективных упругих и температурных жесткостей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{c}$, тензора поперечных сдвиговых податливостей $\mathbf{q}$ приведены в [1, с. 31; 2, с. 20].

2. Кинематика деформирования многослойной оболочки. Закон распределения приращения температуры по толщине оболочки. Неклассические дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругого деформирования многослойной анизотропной оболочки строим на основе следующего допущения [1, с. 39; 2, с. 44; 3, с. 88; 4, с. 57] о законе распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине оболочки:

$$\gamma^{(k)}_{\alpha 3} = q^{(k)}_{\alpha\beta}\left[\tau^{3\beta}_{0} + zh^{-1}\left(\tau^{3\beta}_{h} - \tau^{3\beta}_{0}\right) + f'(z)\pi^{\beta}\right], \quad \varepsilon^{(k)}_{33} = 0. \ (2.1)$$

Распределение компонент вектора перемещений по толщине многослойного пакета и тангенциальных компонент тензора деформаций, соответствующие закону (2.1), имеет вид [1, с. 46; 2, с. 44; 3, с. 89; 4, с. 56]

$$v^{(k)} = w(x^1,x^2,t), \quad v^{(k)}_{\alpha} = \ {}^{(k)}_{\alpha}(x^1,x^2,z,t) + u_{\alpha}(x^1,x^2,t) +$$

$$+ z\eta_{\alpha}(x^1,x^2,t) + \mu^{(k)}_{\alpha\beta}(x^1,x^2,z,t)\pi^{\beta}(x^1,x^2,t), \qquad (2.2)$$

$$2\varepsilon^{(k)}_{\alpha\beta} = (\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\nabla_{\beta}\lambda^{(k)}_{\tau} + (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\nabla_{\alpha}\lambda^{(k)}_{\tau} + (\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\nabla_{\beta}u_{\tau} +$$

$$+ (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\nabla_{\alpha}u_{\tau} + z(\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\nabla_{\beta}\eta_{\tau} + z(\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\nabla_{\alpha}\eta_{\tau} +$$

$$+ (\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\mu^{(k)}_{\tau\sigma}\nabla_{\beta}\pi^{\sigma} + (\delta^{\tau}_{\beta} - zb^{\tau}_{\beta})\mu^{(k)}_{\tau\sigma}\nabla_{\alpha}\pi^{\sigma} + (\delta^{\tau}_{\alpha} - zb^{\tau}_{\alpha})\left(\nabla_{\beta}\mu^{(k)}_{\tau\sigma}\right)\pi^{\sigma}.$$

Закон распределения приращения температуры ϑ по толщине пакета слоев примем в виде [2, с. 45]

$$\vartheta_{(k)} = G(z)\Pi(x^1,x^2,t) + \Xi_{(k)}(x^1,x^2,z,t),$$

$$\left(h_{k-1} \leq z \leq h_k\right). \qquad (2.3)$$

$$\Xi_{(k)}(x^1,x^2,z,t) = \frac{\vartheta_h - \vartheta_0}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\Lambda^{33}_{(1)}}{\Lambda^{33}_{(i)}}\left(h_i - h_{i-1}\right)}\left[\frac{\Lambda^{33}_{(1)}}{\Lambda^{33}_{(k)}}\left(z - h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Lambda^{33}_{(1)}}{\Lambda^{33}_{(i)}}\left(h_i - h_{i-1}\right)\right] + \vartheta_0.$$

3. Вариационные уравнения пространственной задачи термоупругости в изображениях. Рассмотрим пространственный функционал

$$J\left(v^*,\vartheta^*\right) = \frac{1}{2}\int\limits_V \left[A_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}\varepsilon^*_{ij} - 2c_{ij}\vartheta^*\varepsilon^*_{ij} + \rho p^2 v^*_i v^*_i - 2\left(f^*_i + \rho p v^0_i + \rho \dot{v}^0_i\right)v^*_i\right]\cdot$$

$$\cdot dV + \frac{1}{2pT_0}\int\limits_V \left[-\Lambda_{ij}\nabla_j\vartheta^*\nabla_i\vartheta^* - c_{\varepsilon}p\vartheta^*\vartheta^* + 2\left(W^* + c_{\varepsilon}\vartheta^0 + T_0 c_{ij}\varepsilon^0_{ij}\right)\vartheta^*\right]\cdot$$

$$\cdot dV - \int\limits_{B_\sigma} \tilde{p}^*_i v^*_i dB + \frac{1}{pT_0}\int\limits_{B_\Theta} \tilde{\Theta}^*_{\nu}\vartheta^* dB, \qquad (3.1)$$

в котором v^*_i и ϑ^* — изображения по Лапласу компонент вектора перемещений и приращения температуры, рассматриваемые как геометрически и термически допустимые независимые функциональные аргументы. Легко убедиться, что необходимое условие экстремума функционала J, заключающееся в обращении в нуль его вариации: $\delta J = 0$, содержит в себе как дифференциальные уравнения связанной пространственной задачи термоупругости [5, с. 217], так и соответствующие им естественные краевые условия. Подставляя (2.1) — (2.3) в (3.1) и выполняя интегрирование по координате z, преобразуем (3.1) в двумерный функционал, необходимое условие экстремума которого содержит в себе как дифференциальные уравнения связанной задачи термоупругости слоистых оболочек и пластин в изображениях, так и соответствующие им естественные краевые условия. Применяя к последним обращение преобразования Лапласа, приходим к замкнутой системе дифференциальных уравнений модели термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta} - b^{\beta}_{\lambda}\nabla_{\alpha}M^{\alpha\lambda} = \ddot{X}^{\beta} - b^{\beta}_{\alpha}\ddot{Y}^{\alpha} + \tau^{3\beta}_{0} - \tau^{3\beta}_{+} + hb^{\beta}_{\lambda}\tau^{3\lambda}_{+},$$

$$b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}M^{\alpha\beta} = \ddot{I} + \nabla_{\beta}\ddot{Y}^{\beta} + \sigma^{33}_{0} - \sigma^{33}_{+} - h\nabla_{\beta}\tau^{3\beta}_{+},$$

$$\nabla_{\alpha}S^{\alpha\beta} - Q^{\beta} = \ddot{Z}^{\beta} - \tau^{+}_{3\alpha}\mu^{\circ\alpha\beta}_{(m)}(x^1,x^2,h), \qquad (3.2)$$

$$\nabla_{\alpha}\left(\Phi^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\Pi\right) - \Phi^{33}\Pi - C_{\varepsilon}\dot{\Pi} -$$

$$-T_0\left(\underline{N^{\beta\alpha}\nabla_{\beta}\dot{u}_{\alpha} + \mathrm{K}^{\beta\alpha}\nabla_{\beta}\dot{\eta}_{\alpha} + E^{\beta}_{\alpha}\nabla_{\beta}\dot{\pi}^{\alpha} + E_{\alpha}\dot{\pi}^{\alpha} - E\dot{w}}\right) =$$

$$= -\hat{W} + \Psi^3 - \nabla_{\alpha}\Psi^{\alpha} - \underline{T_0\dot{\mathrm{N}}} + \dot{C}_{\varepsilon\Xi} \qquad (3.3)$$

и к соответствующей системе граничных условий, требующей задания в каждой точке граничного контура Γ значений семи величин, альтернативно выбираемых из следующих семи пар

$$\left(T_{\nu s}-k_s M_{\nu s}, u_s\right),\ \left(T_{\nu\nu}+\tau_s M_{\nu s}, u_\nu\right),\ \left(M_{\nu\nu}, \eta_\nu\right), \quad (3.4)$$

$$\left(\nu_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha}+\frac{\partial M_{\nu s}}{\partial l_s}-\ddot{Y}_\nu,\ w\right),\ \left(S_{\nu s},\ \pi_s\right),\ \left(S_{\nu\nu},\ \pi_\nu\right),$$

$$\left(\nu_\alpha\left(\Phi^{\alpha\beta}\nabla_\beta \Pi+\Psi^\alpha\right),\ \Pi\right).$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) записываются в виде

$$u_\alpha\Big|_{t=0}=u_\alpha^0,\ \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot{u}_\alpha^0,\ w\Big|_{t=0}=w^0, \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=$$

$$=\dot{w}^0, \pi_\alpha\Big|_{t=0}=\pi_\alpha^0,\ \left.\frac{\partial \pi_\alpha}{\partial t}\right|_{t=0}=\dot{\pi}_\alpha^0,\ \Pi\Big|_{t=0}=\Pi^0. \quad (3.5)$$

Учет взаимного влияния полей деформаций и температур осуществляется в (3.2) — (3.3) подчеркнутыми слагаемыми. Выражения усилий и обобщенных моментов $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, ... приведены в [1, с. 50; 2, с. 49; 3, с. 90; 4, с. 57].

Библиографический список

1. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. — Новосибирск, 2001.

2. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. — Saarbrucken, Deutschland, 2013.

3. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Известия АН СССР. МТТ. — 1977. — № 5.

4. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Об одном варианте теории упругих многослойных анизотропных пластин // Прикладная механика. — 1978. — Т. 14, № 7.

5. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. — М.: Мир, 1970.