УДК 539.374

В.М. Садовский, К.С. Свободина

О численной реализации термомеханической модели динамики упругопластической среды*

V.M. Sadovskii, K.S. Svobodina

On Numerical Implementation of Thermo-Mechanical Model of Elastic-Plastic Material Dynamics

Рассматривается круг вопросов, связанных с построением и численной реализацией математической модели упругопластического деформирования материалов под действием интенсивных внешних возмущений. Для анализа развитых течений, при которых упругим изменением формы частиц можно пренебречь по сравнению с пластическим формоизменением, предлагается упрощенная термодинамически корректная модель упруго сжимаемой пластической среды. На основе метода расщепления по физическим процессам и пространственным переменным строится экономичный вычислительный алгоритм, реализующий геометрически линейный вариант модели. На этапе решения одномерных систем используется разностная схема «предиктор — корректор» с контролируемой искусственной диссипацией энергии, построенная по методу Иванова. Для учета необратимой деформации строится специальная процедура корректировки решения, аналогичная корректировке напряжений Уилкинса. Производится верификация компьютерных программ путем сравнения результатов расчетов с точным решением задачи о распространении пластической ударной волны в неограниченной среде.

Ключевые слова: упругость, пластичность, термодинамика, конечные деформации, ударная волна, метод расщепления.

In this paper, a set of problems related to development and numerical implementation of a mathematical model of elastic-plastic deformation of materials under intensive external disturbances is considered. A simplified thermodynamically correct model of elastically compressible plastic medium is proposed for analysis of developed flows with negligible elastic changes of particle shapes. An efficient numerical algorithm of geometrically linear model is constructed by the method of splitting by physical processes and spatial variables. Problem solution is based on finite-difference scheme of predictor-corrector type with controlled artificial dissipation of energy in accordance with the Ivanov's method. A special correction procedure similar to the Wilkins stress correction procedure deals with irreversible deformation. Numerical algorithm validation is performed by results validation with the exact solution of a problem for plastic shock wave propagation in the unbounded medium.

Key words: elasticity, plasticity, thermodynamics, finite strains, shock wave, splitting method.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-39

Введение. При исследовании динамических процессов, протекающих под действием интенсивных механических и температурных возмущений, в грунтах, сыпучих средах, горных породах и инженерных сооружениях широко используется метод Уилкинса [1] и различные его обобщения для описания разрушения материалов. Этот метод позволил решить обширный класс прикладных задач и сыграл важную роль в развитии теории конечных деформаций упругопластических материалов [2, 3]. Однако детальный анализ математической модели в методе Уилкинса показал [4], что при определенном выборе начальных данных задачи нарушается условие гиперболичности системы. Появляются неустойчивые, по Адамару, режимы деформирования с экспоненциально растущими возмущениями, которые не имеют физической природы. Причина такой некорректности связана с использованием не имеющего строгого обоснования разложения тензора Альманси в сумму обратимой (упругой) и необратимой (пластической) деформаций в сочетании с законом гипоупругости.

Альтернативные варианты модели предлагались многими авторами [5–7]. Детально изучался вопрос о представлении конечной деформации среды в виде

* Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН №18 и РФФИ (проект № 11-01-00053).

суперпозиции обратимой и необратимой составляющих [8, 9]. Но этот вопрос до сих пор не получил окончательного решения. В настоящей работе рассматривается упрощенная термодинамически корректная модель развитых пластических течений [10], в которой упругая деформация среды характеризуется изменением ее плотности и которую можно рассматривать как предельный вариант общей модели при неограниченном росте деформации сдвига.

1. Математическая модель. В эйлеровом описании уравнения движения, неразрывности и притока тепла относительно декартовой системы координат имеют вид:

$$\rho \dot{v}_j = \sigma_{jk,k}, \qquad \dot{\rho} = -\rho v_{k,k}, \qquad \rho \dot{U} = \sigma_{jk} v_{j,k}. \quad (1)$$

Используются общепринятые обозначения, принимается правило суммирования по повторяющимся индексам, индекс после запятой означает частную производную по времени или пространственной переменной, точка — полную производную по времени. Уравнения состояния среды задаются зависимостями давления и температуры от плотности и внутренней энергии: $p = p(\rho,U)$, $T = T(\rho,U)$ $T = T(\rho,U)$. Определяющие соотношения необратимого деформирования записываются в форме принципа максимума мощности диссипации энергии [11]:

$$-(\tilde{\tau}_{jk} - \tau_{jk})\xi_{jk} \geq 0, \qquad f(\tilde{\tau}_{jk}) \leq \kappa, \quad f(\tau_{jk}) \leq \kappa. \quad (2)$$

где $\tau_{jk} = \sigma_{jk} + p\delta_{jk}$ — девиатор симметричного тензора напряжений; $\tilde{\tau}_{jk}$ — произвольная допустимая вариация, подчиненная условию пластичности; $\kappa = \kappa(\rho,U)$ — предел текучести; $\xi_{jk} = (v_{j,k} + v_{k,j})/2 + \dot{\rho}/(3\rho)\delta_{jk}$ — девиатор тензора деформации, характеризующий пластическое формоизменение частица среды (δ_{jk} — символ Кронекера).

Уравнения (1) и вариационное неравенство (2) составляют замкнутую математическую модель деформирования упруго сжимаемой пластической среды, термодинамическое состояние которой характеризуются двумя параметрами — плотностью ρ и внутренней энергией U. Она может быть получена исходя из принципов неравновесной термодинамики, и на ее основе корректно описываются разрывные решения с пластическими ударными волнами и контактными разрывами [10]. В пределе при $\kappa \to 0$ из нее следует модель идеального сжимаемого газа, а при $\partial p/\partial\rho \to \infty$ — модель несжимаемой жесткопластической среды. Одновременный учет двух факторов — упругого изменения объема и пластического формоизменения — делает ее пригодной для описания динамики деформируемых сред в условиях высоких давлений, когда жесткопластическая модель неприменима из-за большой объемной деформации частиц, а модель сжимаемого газа — из-за наличия касательных напряжений.

Конечная цель нашего исследования — разработка вычислительного алгоритма, реализующего соотношения (1), (2). В данной работе с этой целью рассматривается упрощенный геометрически линейный вариант модели, учитывающей вязкость среды:

$$\rho v_{j,t} = -p_{,j} + \tau_{jk,k}, \quad p_{,t} = -\rho c^2 v_{k,k}, \qquad (3)$$
$$(\tilde{\tau}_{jk} - \tau_{jk})(\tau_{jk} - \eta v_{j,k}) \geq 0,$$

в котором плотность ρ, скорость акустических волн c, предел текучести κ и коэффициент вязкости η считаются постоянным величинами.

2. Метод расщепления. Расщепление по физическим процессам предполагает численное решение на первом этапе вытекающей из (3) системы уравнений вязкоупругости. На втором этапе на каждом шаге по времени решается вариационное неравенство (3), в котором градиенты скорости $v_{j,k}$ берутся с первого этапа. Решение неравенства определяется как проекция тензора вязких напряжений на выпуклое множество в девиаторном пространстве, задаваемое неравенством $f(\tau_{jk}) \leq \kappa$. Так выглядит процедура корректировки напряжений, реализующая определяющие соотношения необратимого деформирования. Для вычисления проекции на поверхность текучести Мизеса служит корректировка Уилкинса. Формулы вычисления проекции на призму Треска — Сен-Венана получены в [10].

При расщеплении по пространственным переменным система уравнений распадается на одномерные системы для продольных волн следующего вида:

$$\rho v_{,t} = -p_{,x} + \tau_{,x}, \qquad p_{,t} = \rho c^2 v_{,x}, \qquad \tau = \eta v_{,x} + g(x,t)$$

и одномерные системы для поперечных волн:

$$\rho v_{,t} = \tau_{,x}, \qquad \tau = \eta v_{,x} + g(x,t),$$

где g — функция, зависящая от производных по второму направлению.

Численное решение краевых задач для одномерных систем осуществлялось на основе разностных схем с контролируемой диссипацией энергии, построенных по методу Иванова [12].

3. Результаты расчетов. На основе одномерной модели проводились методические расчеты распространения волн сильного разрыва в вязкоупругом полупространстве, на границе которого действует внешняя нагрузка в виде короткого Π-образного или Λ-образного импульса. Для сравнения расчеты выполнялись с помощью немонотонной схемы второго порядка точности, которая строится на разнесенных сетках по принципу схемы Неймана — Рихтмайера. Сравнение показало, что схема с контролируемой диссипацией практически монотонна — не дает паразитных осцилляций за фронтом падающей волны и волны разгрузки, характерных для схемы на разнесенных сетках.

В плоской постановке решалась задача о прохождении пластической ударной волны, имеющая точное решение [11]. Анализ результатов расчетов показал, что полученная схема обладает сглаживающими свойствами, характерными для схем первого порядка точности, и дает хорошее совпадение с точным решением по скорости и амплитуде волны.

Библиографический список

1. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. — М., 1967.
2. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. — 1960. — Т. 24, вып. 6.
3. Фомин В. М., Гулидов А. И., Сапожников Г. А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. — Новосибирск, 1999.
4. Быченков В. А., Свидинский В. А. Некорректность модели упругопластического течения в методе Уилкинса // ФГВ. — 1990. — №1.
5. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — М., 1998.
6. Кондауров В. И., Фортов В. Е. Основы термомеханики конденсированной среды. — М., 2002.
7. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. — М., 1986.
8. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. — Киев, 1987.
9. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск, 2000.
10. Садовский В. М. К теории ударных волн в сжимаемых пластических средах // Известия РАН: МТТ. — 2001. — №5.
11. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. — М., 1997.
12. Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. — Новосибирск, 2002.