

УДК 539.3

*С. Н. Коробейников, В. Д. Кургузов, А. Ю. Ларичкин, А. А. Олейников***Компьютерное моделирование деформирования эластомеров***S. N. Korobeynikov, V. D. Kurguzov, A. Yu. Larichkin, A. A. Oleinikov***Computer Simulation of Elastomer Deformations**

Проведен сравнительный анализ математического моделирования умеренных деформаций эластомеров с использованием моделей гиперупругих материалов Сен-Венана, Муни — Ривлина и Генки с использованием пакета MSC.Marc 2012. Показано, что модель материала Сен-Венана не описывает большие деформации эластомеров, а модели материалов Муни — Ривлина и Генки дают хорошее приближение к описанию деформирования эластомеров до 50% деформаций. Проведены натурные эксперименты и компьютерное моделирование кручения образца из дуотана. Получено хорошее соответствие результатов численных решений как по модели материала Муни — Ривлина, так и по модели материала Генки, однако модель Муни — Ривлина несколько лучше приближает зависимость закручивающего момента от погонного угла закручивания по сравнению с моделью Генки. Проведено сравнение экспериментальных данных по растяжению листа с разрезом из полиуретана с результатами расчетов, в которых использовались модели материалов Муни — Ривлина и Генки. В процессе деформирования первоначально прямолинейный разрез постепенно раскрывался, превращаясь в эллипс. В эксперименте обнаружена сдвигка максимального главного напряжения от вершины разреза в глубь образца. Однако в численных экспериментах, выполненных с использованием обеих моделей материалов, максимальное главное напряжение отмечено на границе (в точке, принадлежащей эллипсу). Обсуждаются возможные причины расхождения данных эксперимента и компьютерного моделирования.

**Ключевые слова:** большие деформации, гиперупругость, эксперимент.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-37

Эластомеры могут претерпевать большие деформации (несколько сотен процентов) без разрушения и повреждения структуры материала. В силу этих уникальных свойств они широко используются в технике. Потребность в математическом моделировании процессов деформирования тел и конструкций из таких материалов стимулирует развитие теории боль-

In this paper, mathematical simulations of elastomers moderate deformations are performed, and a comparative analysis is carried out. Software package MSC.Marc 2012 is utilized for the simulations based on Saint-Venant, Mooney — Rivlin, and Hencky hyperplastic material models. It is shown that the Seint-Venan model is not effective for large deformations of elastomers, when the Mooney — Rivlin and Hencky models provide good approximation of elastomers deformations up to 50% of scale.

Physical experiments and computer simulations of Duotan sample twisting are conducted. Results of simulation based on Mooney — Rivlin and Hencky models are in good agreement with experimental data while the Mooney — Rivlin model provides slightly better relationship between twisting moment and twist angle in comparison with the Hencky model. Results of Mooney — Rivlin and Hencky models simulations of stretching of polyurethane sheet sample with a cut are compared to corresponding experimental data. The initially linear cut gradually opens and transforms into an ellipse during the deformation process. Experiments reveal that maximal principal stress being initially on top of the cut shifts deep into the sample. However, numerical simulations show that the maximal principal stress is located on the boundary (point of the ellipse). Possible reasons of that divergence are discussed.

**Key words:** large deformation, hyperelasticity, experiment.

ших деформаций гиперупругих тел, создание алгоритмов численных решений уравнений гиперупругости и их программную реализацию. Цель настоящей работы — сравнительный анализ математического моделирования умеренных деформаций эластомеров (до 50 процентов) с использованием моделей гиперупругих материалов Сен-Венана, Муни — Ривлина

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-08-00191, 12-08-00707) и программы Президиума РАН №25.3.

и Генки в среде пакета MSC.Marc [1]. Первые две модели имеются в виде стандартных моделей материалов пакета MSC.Marc, а модель материала Генки адаптирована и внедрена в этот пакет авторами настоящей работы [2, 3]. Данные компьютерного моделирования сопоставляются с результатами натурных экспериментов.

**1. Определяющие соотношения гиперупругости.** В рамках уравнений линейной теории упругости для изотропных упругих материалов используется закон Гука [4]

$$s = \lambda(\text{tr } \varepsilon)I + 2\mu\varepsilon, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  и  $s$  — соответственно тензоры напряжений и деформаций Коши;  $I$  — единичный тензор второго порядка;  $\text{tr}$  — след тензора второго порядка;  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламэ, которые выражаются через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  следующим образом:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2)$$

Закон Гука (1) можно переписать так:

$$s = \mathbb{C}^E : \varepsilon, \quad (3)$$

где операция «:» обозначает двойное внутреннее произведение тензоров [4], а тензор четвертого порядка  $\mathbb{C}^E$  имеет следующий вид:

$$\mathbb{C}^E \equiv \lambda \mathbb{C}_I + \mu(\mathbb{C}_{II} + \mathbb{C}_{III}), \quad (4)$$

где  $\mathbb{C}_I$ ,  $\mathbb{C}_{II}$ ,  $\mathbb{C}_{III}$  — базовые *изомеры* изотропного тензора четвертого порядка [4].

Закон Гука допускает также запись в потенциальном виде

$$s = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}^E : \varepsilon = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \varepsilon)^2 + \mu \varepsilon : \varepsilon. \quad (5)$$

Уравнения линейной теории упругости (а следовательно, и закон Гука) описывают только малые (не более трех процентов) деформации твердых тел. Для математического моделирования деформирования тел из упругих материалов надо использовать уравнения нелинейной теории упругости. При записи определяющих соотношений эта теория требует использования объективных по Лагранжу или Эйлеру тензоров напряжений и деформаций, сопряженных по мощности внутренних сил [4–7]. Так как тензор деформаций Коши  $\varepsilon$  не объективен, то закон Гука, представленный в альтернативных формах записи (1), (3) или (5), нельзя прямо использовать в уравнениях нелинейной теории упругости.

В нелинейной теории упругости различают три типа определяющих соотношений: гиперупругости (упругости по Грину), упругости (упругости по Коши) и гипопругости [4]. В рамках уравнений линейной теории упругости для изотропных материалов все три типа определяющих соотношений эквивалентны (формулы (1) или (3) являются аналогом записи определя-

ющих соотношений упругости по Коши, а формула (5) — по Грину). Далее в рамках нелинейной теории упругости рассматриваем гиперупругие материалы, так как только для этих материалов гарантируется сохранение потенциальной энергии внутренних сил на замкнутых путях деформирования в пространстве компонент тензора деформаций. В дальнейшем ограничимся использованием только лагранжеских тензоров напряжений и деформаций.

Пусть  $(S, E)$  — пара сопряженных лагранжеских тензоров напряжений и деформаций. Определяющие соотношения гиперупругости записываются в виде [4, 5]

$$S = \frac{\partial W_E(E)}{\partial E}, \quad (6)$$

где  $W_E(E)$  — скалярнозначная тензорная функция, которая называется удельной потенциальной энергией деформаций. Для изотропного гиперупругого материала эта функция должна зависеть только от трех главных инвариантов тензора деформаций  $I_1(E)$ ,  $I_2(E)$ ,  $I_3(E)$  или, эквивалентно, от трех главных удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  [2, 4]

$$W_E(E) = \bar{W}_E(I_1, I_2, I_3) = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (7)$$

Рассмотрим три пары сопряженных лагранжеских тензоров напряжений и деформаций [7]

$$\left( \frac{1}{2} S^{(2)}, C \right), \quad (S^{(2)}, E^{(2)}), \quad (\bar{\tau}, E^{(0)}), \quad (8)$$

где  $C$  — правый тензор деформаций Коши — Грина;  $E^{(2)}$  — тензор деформаций Грина — Лагранжа;  $E^{(0)}$  — правый тензор логарифмических деформаций (правый тензор деформаций Генки);  $S^{(2)}$  — второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа;  $\bar{\tau}$  — тензор напряжений Нолла. Отметим, что третья пара тензоров в (8) сопряжена только для изотропной гиперупругой среды (в общем случае в этой паре вместо тензора напряжений Нолла  $\bar{\tau}$  должен стоять правый тензор напряжений Генки  $S^{(0)}$  [2, 7]).

С помощью каждой из трех пар тензоров в (8) строятся определяющие соотношения известных моделей гиперупругих материалов:

- *Муни — Ривлина* ( $I_3(C) = 1$ , что соответствует несжимаемому материалу) [1, 4]

$$S^{(2)} = 2 \frac{\partial W_{MR}[I_1(C), I_2(C)]}{\partial C}, \quad (9)$$

$$W_{MR} \equiv C_1[I_1(C) - 3] + C_2[I_2(C) - 3],$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — константы Муни — Ривлина;

- *Кирхгофа — Сен-Венана* [8]

$$S^{(2)} = \frac{\partial W_{KSV}(E^{(2)})}{\partial E^{(2)}}, \quad W_{KSV} \equiv \frac{1}{2} E^{(2)} : C^E : E^{(2)}; \quad (10)$$

- Генки [2]

$$\bar{\tau} = \frac{\partial W_H(E^{(0)})}{\partial E^{(0)}}, \quad W_H \equiv \frac{1}{2} E^{(0)} : \mathbb{C}^E : E^{(0)}. \quad (11)$$

Определяющие соотношения моделей Кирхгофа — Сен-Венана (10) и Генки (11) обобщают закон Гука на случай больших деформаций гиперупругой среды [7].

Для использования определяющих соотношений (9) — (11) в уравнениях гиперупругости требуется для каждой из моделей материалов для заданного закона движения  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  ( $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x}$  — радиусы-векторы материальных частиц в отсчетной и текущей конфигурациях;  $t$  — параметр деформирования) [1] определить второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа  $\mathbf{S}^{(2)}$  и тензор упругости  $\mathbb{C}$  — тензор четвертого порядка, связывающий скорости изменения тензоров  $\mathbf{E}^{(2)}$  и  $\mathbf{S}^{(2)}$  в соотношении

$$\dot{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}^{(2)}. \quad (12)$$

Для определяющих соотношений изотропных материалов Муни — Ривлина и Кирхгофа — Сен-Венана эти выражения даны в [4] (для модели материала Кирхгофа — Сен-Венана  $\mathbb{C} = \mathbb{C}^E$ ), а для модели Генки — в [2, 3].

**2. Эксперименты по одноосному деформированию образцов из дуотана.** На рисунке 1 приведены данные эксперимента по одноосному деформированию

образца из материала дуотан (Duothan QA965) (нанесены точками). Режиму сжатия соответствуют данные при  $\lambda < 1$ , а режиму растяжения — при  $\lambda > 1$  ( $\lambda = l/L$ , где  $L, l$  — длины рабочей части образца в отсчетной и деформированной конфигурациях соответственно). Модуль Юнга определялся для модели материала Генки, имеем  $E = 5,157$  МПа. Осредненный коэффициент Пуассона по растяжению и сжатию (при обработке в логарифмических деформациях) имеет значение  $\nu = 0,485$ , т. е. материал дуотан — почти несжимаемый. Получены следующие значения констант для модели материала Муни — Ривлина:  $C_1 = 0,3313$  МПа,  $C_2 = 0,4425$  МПа. Зависимости напряжения от параметра  $\lambda$  для рассматриваемых моделей материалов приведены сплошными кривыми: кривая 1 соответствует обработке экспериментальных данных в рамках модели материала Муни — Ривлина, кривая 2 — Генки, кривая 3 — Кирхгофа — Сен-Венана. На рисунке 1а — б приведены соответственно кривые зависимости продольных компонент тензоров напряжений Нолла и инженерных напряжений (первого тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа) от параметра  $\lambda$ . Видно, что модель Кирхгофа — Сен-Венана описывает деформирование дуотана только в пределах нескольких процентов, а модели Генки и Муни — Ривлина — порядка 50% инженерной деформации.

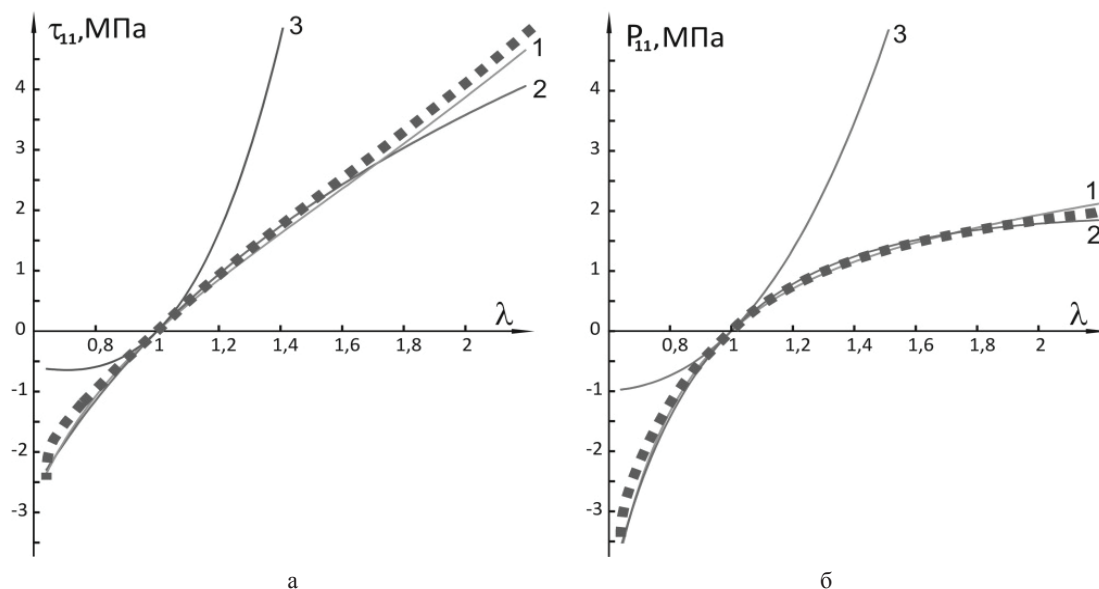


Рис. 1. Диаграммы одноосного деформирования дуотана: зависимость продольных компонент тензоров напряжений Нолла (а) и первого тензора Пиолы — Кирхгофа (инженерное напряжение) (б) от параметра  $\lambda$

**3. Экспериментальные исследования и компьютерное моделирование кручения образцов из дуотана.** Компьютерное моделирование деформирования эластомеров проводилось с использованием пакета MSC.Marc 2012 [1]. В этом пакете модели изотропных гиперупругих материалов Муни — Ривлина и Кирхгофа — Сен-Венана имеются в библиотеке стандартных моделей материалов, а модель материала Генки введена в пакет MSC.Marc с помощью пользовательской программы hypela2.f [3].

тропных гиперупругих материалов Муни — Ривлина и Кирхгофа — Сен-Венана имеются в библиотеке стандартных моделей материалов, а модель материала Генки введена в пакет MSC.Marc с помощью пользовательской программы hypela2.f [3].

На рисунке 2 приведены результаты натурных экспериментов и компьютерного моделирования кручения образца из дуотана. В эксперименте закручивание образца проводилось с помощью стальных выступов, приклеенных к его торцам, а в компьютерном моделировании — с использованием двух жестких поверхностей, приклеенных к торцам конечно-элементной модели. Кручение образца как в эксперименте, так и в расчете осуществлялось заданным углом закручивания таким образом, чтобы угловая скорость закручивания торца была постоянной. Отметим, что модель Муни — Ривлина лучше приближает зависимость закручивающего

момента от погонного угла закручивания  $\psi$  по сравнению с моделью Генки. Штриховая вертикальная линия на рисунке 2а соответствует такому значению угла закручивания, когда инженерные деформации в образце не превышают 50% (т. е. когда допустимо использование модели материала Генки). Отметим, что в допустимых пределах использования модели материала Генки (так же, как и для модели материала Муни — Ривлина) графики для моментов на рисунке 2а близки к данным эксперимента, модель материала Кирхгофа — Сен-Венана работоспособна только для малых углов закручивания.

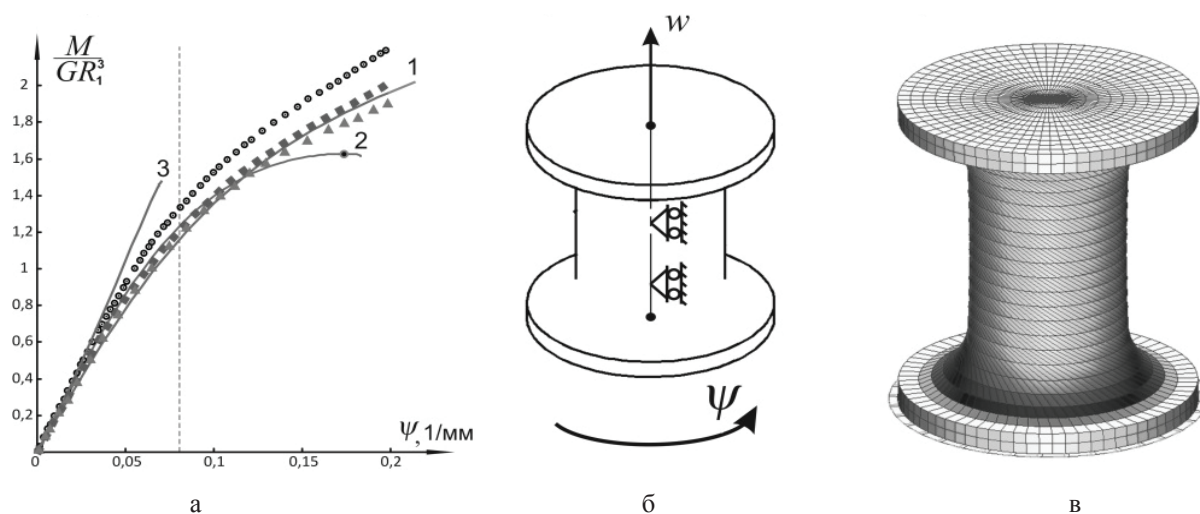


Рис. 2. Эксперимент и компьютерное моделирование кручения цилиндрического образца из дуотана: а — зависимости приведенного момента от погонного угла закручивания: точки — данные эксперимента, кривая 1 соответствует решению с использованием модели материала Муни — Ривлина, кривая 2 — Генки, кривая 3 — Кирхгофа — Сен-Венана; б — геометрия образца и схема нагружения; в — деформированная конфигурация образца при погонном угле закручивания  $\psi = 0,161 \text{ мм}^{-1}$ , полученная в расчете по модели Генки

**4. Экспериментальные исследования и компьютерное моделирование растяжения листов из полиуретана с разрезом.** Проведено сравнение экспериментальных данных по растяжению листа из полиуретана [9] с результатами расчетов с использованием моделей материалов Муни — Ривлина и Генки в пакете MSC.Marc (рис. 3). В процессе деформирования первоначально прямолинейный разрез постепенно раскрывался, превращаясь в эллипс. На рисунке 3б приведена расшифровка результатов поляризационно-оптического эксперимента с получением полей напряжений и деформаций по всей области образца. Обнаружена сдвижка максимального главного напряжения от вершины разреза в глубь образца. Также следует отметить смещение максимального значения контурных напряжений от геометрических источников концен-

трации (вершины разреза) на некоторое расстояние от них вдоль контура эллипса, что можно визуально наблюдать по картинам полос. Однако в численных экспериментах, выполненных с использованием обеих моделей материалов, максимальное главное напряжение отмечено на границе (в точке, принадлежащей эллипсу). Причиной такого расхождения данных эксперимента и компьютерного моделирования могут быть микрповреждения в вершине разреза в эксперименте, приводящие к релаксации напряжений в окрестности этой вершины, что и является причиной сдвижки максимального главного напряжения от границы эллипса внутрь листа. Это предположение основывается на том, что в расчетах получены нереально большие значения максимального главного напряжения на границе выреза.

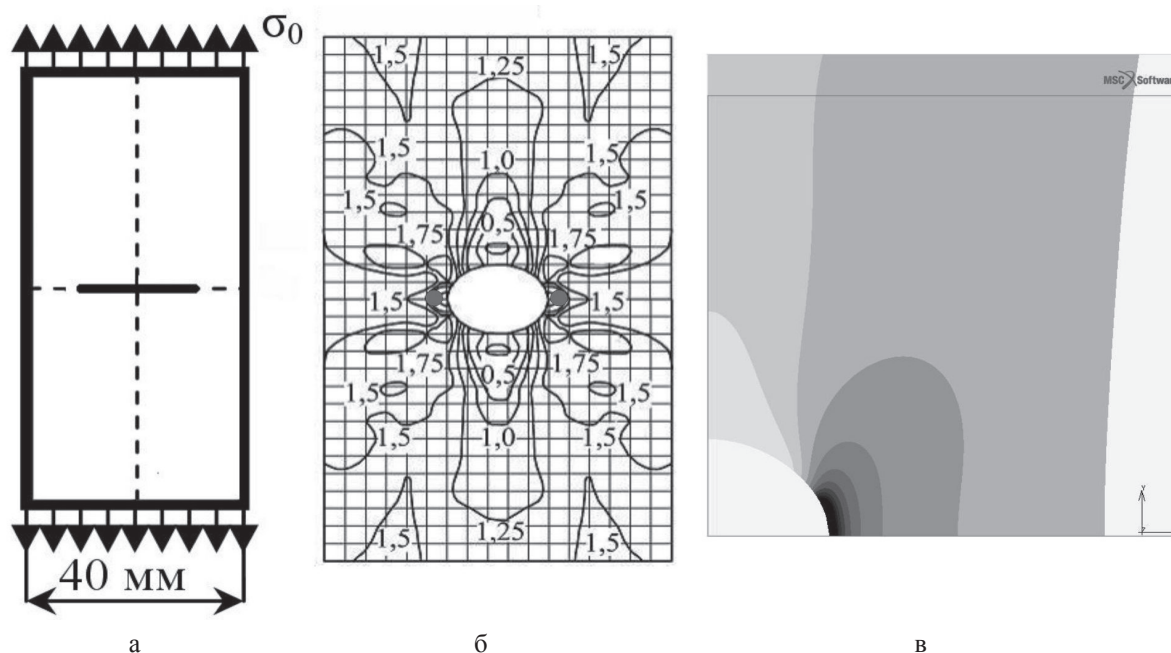


Рис. 3. Натурный и численный эксперименты по растяжению листа из полиуретана с разрезом: *а* — схема растяжения листа; *б, в* — изолинии максимального главного напряжения в эксперименте и расчете соответственно (при компьютерном моделировании рассматривалась четверть листа)

### Библиографический список

1. MARC Users Guide. Vol. A: Theory and Users Information. — Santa Ana (CA): MSC Software Corporation, 2012.
2. Коробейников С.Н., Олейников А.А. Лагранжева формулировка определяющих соотношений гиперупругого материала Генки // Дальневосточный математический журнал. — 2011. — Т. 11, № 2.
3. Коробейников С.Н., Олейников А.А., Ларичкин А.Ю., Бабичев А.В., Алехин В.В. Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки // Дальневосточный математический журнал (в печати) 2013, 13:2,222–249.
4. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск, 2000.
5. Korobeynikov S.N. Objective tensor rates and applications in formulation of hyperelastic relations // Journal of Elasticity. — 2008. — V. 93, № 2.
6. Korobeynikov S.N. Families of continuous spin tensors and applications in continuum mechanics // Acta Mechanica. — 2011. — Vol. 216, № 1–4.
7. Hill R. Aspects of invariance in solid mechanics // Advances in Applied Mechanics; V. 18. C.-S. Yih (Ed.). — New York, 1978.
8. Curnier A. Computational Methods in Solid Mechanics. — Dordrecht, 1994.
9. Албаут Г.Н., Харинова Н.В. Концентрация напряжений и деформаций в эластомерах // Надежность и долговечность машин и сооружений: междунар. науч.-техн. сб. — Киев, 2006. — № 26.