УДК 519.8

М. В. Досымова

Анализ чувствительности и устойчивости линейной математической модели процесса обучения

M. V. Dosymova

Sensitivity And Stability Analysis of a Mathematical Linear Model of Education Process

Рассмотрены устойчивость и чувствительность линейной математической модели обучения на примере литературного произведения А. С. Пушкина «Выстрел». Общая схема исследования включает следующие этапы: описание математической модели и пояснение целей моделирования реальных процессов, описание методов анализа математических моделей на чувствительность и устойчивость, изучение математической модели и интерпретация полученных результатов.

Описана линейная математическая модель обучения, приведено общее решение модели. Для анализа чувствительности линейной математической модели обучения описан метод прямого моделирования вариации параметров. Дано определение устойчивости математической модели, описан метод исследования устойчивости решений модели по Ляпунову. Представлены графики, отражающие влияние вариации параметров модели на уровень обученности. Описаны результаты исследования и определены особенности применения линейной математической модели обучения.

Ключевые слова: линейная модель обучения, чувствительность модели, чувствительность моделей к вариациям параметров, устойчивость модели, устойчивость решения по Ляпунову.

The author investigates stability and sensitivity of a mathematical linear model of education process on example of «The Shot», a short story by Alexander Pushkin. The proposed research consists of the following: (a) Description of mathematical model and modeling purposes; (b) Methods of sensibility and stability analysis; (c) Research of the proposed mathematical model; (d) Interpretation of obtained results. This paper presents the mathematical linear model of education process and general solution of the model. Sensitivity of the model is investigated by direct simulations of parameter variations. Definition of stability for the model is provided along with Lyapunov stability analysis for model solutions.

«The Shot», a story by A. Pushkin, is used to conduct sensitivity and stability analysis of the proposed model. Figures showing dependencies between parameter variations and education indicators/education levels are presented. In the conclusion, obtained results are shown, and specific features of mathematical linear model application are outlined.

Key words: linear model of education process, model sensitivity, models sensitivity to variations of the parameters, model stability, Lyapunov stability.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-34

Введение. Математические модели, описывающие те или иные процессы или явления, являются приближенными. Начальные данные, параметры модели, вид уравнения (или системы уравнений) могут изменяться для реальных процессов, если учесть ранее отброшенные или неучтенные факторы, более точно измерить исходные экспериментальные данные на этапе идентификации ее параметров. Возможны также изменения параметров уравнений, происходящие при проведении эксперимента или при функционировании моделируемых процессов.

Если указанные даже незначительные изменения параметров уравнений и начальных условий приводят к небольшому изменению решения, то такие решения можно рассматривать как приближенно описывающие процесс. Эти исследования в литературе проводятся методами теории чувствительности [1].

Другим важным моментом в теории и на практике являются исследования устойчивости математических моделей, записанных в рамках непрерывных или дискретных (разностных) дифференциальных уравнений [2]. На практике, как правило, известно, что поведение моделируемого процесса во времени является либо устойчивым, либо неустойчивым. Эта информация может быть использована при оценке адекватности полученной математической модели, хотя в полной мере не решает эту проблему.

В нашей работе мы проведем исследование чувствительности и устойчивости линейной модели процесса обучения [3]. Общая схема исследования включает следующие этапы: описание математической модели и пояснение целей моделирования реальных процессов, описание методов анализа математических моделей на чувствительность и устойчивость, исследование математической модели и интерпретация полученных результатов. В качестве примера мы используем математическую модель процесса обучения Сильвио по произведению А. С. Пушкина «Выстрел», представленную в работе [3].

1. Моделирование процессов обучения. Приобретение обучающимися определенных знаний, умений и навыков в процессе обучения можно представить с помощью динамической модели, в которой учитываются следующие факторы: индивидуальная динамика процесса обучения с учетом (или без учета) междисциплинарных связей; эффекты взаимодействия учащихся в группе; социально-экономические факторы среды образовательного процесса; уровня рыночных мотиваторов и др.

На уровень подготовленности помимо освоения теоретического материала и решения практических задач значительное влияние оказывают способности самого обучающегося.

Цель нашего исследования — описание применения и анализ математической модели процесса обучения в линейном варианте без учета междисциплинарных связей [2, 3]:

$$x(k+1)=ax(k)+\beta V(k)+\gamma Z(k),\ x(1)+x_1,\ k=1,2,... \quad (1)$$

где $x(k)$ — уровень знаний в момент времени k; $x(1)$ — заданный уровень знаний в момент времени $k=1$; $V(k)$ — фактор тренировки; $Z(k)$ — фактор обучения; α, β, γ — коэффициенты уравнения, значения которых индивидуальны для обучающегося.

Общее решение модели (1) выглядит следующим образом:

$$x(k)=\alpha^k x_1+\beta\sum_{j=1}^{k}V_j\alpha^{k-j}+\gamma\sum_{j=1}^{k}Z_j\alpha^{k-j},\ k=1,2,... \quad (2)$$

Модель (1) является универсальной. Ее можно использовать как для оценивания уровня обученности учащихся и студентов, так и применительно к любому процессу обучения.

Рассмотрим пример моделирования процесса обучения. Так в работе [3] рассмотрена математическая интерпретация основного содержания рассказа А. С. Пушкина «Выстрел». Исследование проведено с использованием математической модели процесса обучения (1), которая записана в следующем виде:

$$x(k+1)=\alpha\cdot x(k)+\beta\cdot V(k);\ x(1)=x_1;\ k=1,2,... \quad (3)$$

Режим тренировки $V(k)$ задан для всего периода времени, а фактор теоретического обучения отсутствует. Для исследуемого процесса можно предположить, что в выражении (1) либо значение параметра γ нулевое, либо затраты времени $Z(k)$ — нулевые.

Идентификация параметров модели (3) проведена в работе [3], в которой обоснована следующая система уравнений для оцениваемых параметров:

$$\begin{aligned}&\alpha\cdot x_C(\infty)+\beta\cdot 3=x_C(\infty);\\&\alpha\cdot 30+\beta\cdot 1=30;\\&\alpha^{30}\cdot 30+\beta\cdot 0=5.\end{aligned} \quad (4)$$

По тексту упомянутого произведения А. С. Пушкина интерпретировано, что уровень обученности Сильвио измеряется в шагах до мишени (игральной карты), в которую он попадает с первого выстрела; единичный период времени равен одному дню; $x_C(\infty)$ — максимальная квалификация Сильвио — стационарное решение уравнения (3); стационарный уровень обученности хорошего стрелка — 30; уровень обученности после месяца (30 дней) без тренировки для хорошего стрелка падает с 30 до 5; режим тренировки Сильвио — три упражнения в день; режим тренировки хорошего стрелка в среднем — одно упражнение в день.

Решение системы уравнений (4), найденное с использованием пакетов программ, имеет вид: $\alpha=0{,}942;\ \beta=1{,}74;\ x_C(\infty)=90$. Решение показывает, что Сильвио поддерживал свою квалификацию в стрельбе на уровне 90 шагов. Из решения следует, что хороший и обученный стрелок теряет в день (и приобретает за день упражнений) — 1.74, а Сильвио теряет в день (и приобретает за день упражнений) уровень обученности в 5,22 шага [3].

При идентификации модели (3) начальное состояние Сильвио не исследовалось. Можно предположить, что оно равнялось 30, как для хорошего стрелка. Тогда модель процесса обучения Сильвио запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}&x(k+1)=0{,}942\cdot x(k)+1{,}74\cdot V(k);\\&x(1)=x_1=30;\ V(k)=3;\quad k=1,2,...\end{aligned} \quad (5)$$

2. Анализ чувствительности модели. Чувствительность математической модели можно определить как способность модели реагировать определенным образом на определенное малое воздействие, а также количественная характеристика этой способности.

Для анализа чувствительности математических моделей наиболее часто используют метод прямого моделирования, сущность которого состоит в следующем [4].

Задача решается при невозмущенных параметрах модели $\alpha_1=\alpha\in D_\alpha$, $\beta_1=\beta\in D_\beta$, $\gamma_1=\gamma\in D_\gamma$, $V_1=V\in D_V$, $Z_1=Z\in D_Z$ и возмущенных значениях, $\alpha_2=\alpha+\delta\alpha\in D_\alpha$, $\beta_2=\beta+\delta\beta\in D_\beta$, $\gamma_2=\gamma+\delta\gamma\in D_\gamma$, $V_2=V+\delta V\in D_V$, $Z_2=Z+\delta Z\in D_Z$, где D — с соответствующим индексом задает области допустимых значений параметров. В результате получаем векторы состояний. Например, для α_1 и α_2:

$$x_1(k+1)=\alpha_1 x_1(k)+\beta_1 V_1(k)+\gamma_1 Z_1(k);$$
$$x_2(k+1)=\alpha_2 x_1(k)+\beta_1 V_1(k)+\gamma_1 Z_1(k). \quad (6)$$

Искомая вариация в момент времени *(k+1)* вычисляется по формуле:

$$\delta x\alpha = x_1(k+1)-x_2(k+1). \quad (7)$$

Компьютерное исследование математической модели обучения на чувствительность выполнено на основе выборки данных по произведению А.С. Пушкина «Выстрел» [3] в среде MSExcel.

Параметры модели (5) $\alpha \in D_\alpha$, $\beta \in D_\beta$, $\gamma \in D_\gamma$, $V \in D_V$, x_1 при проведении эксперимента изменялись как в сторону увеличения на 1%, так и в сторону уменьшения на 1%. Во всех вариантах рассчитывалась динамика уровня обученности Сильвио.

На рисунке 1 приняты следующие обозначения: x_k — прямая обученности Сильвио с базовыми значениями параметров; x_k (11) — кривая его обученности с измененным параметром фактора тренировки V_k + 1%; x_k (21) — кривая обученности Сильвио с измененным параметром степени потери навыка α + 1%; x_k (31) — кривая обученности его с измененным параметром эффективности тренировки β + 1%; x_k (41) — кривая его обученности с измененным параметром стационарного уровня обученности x_1 + 1%.

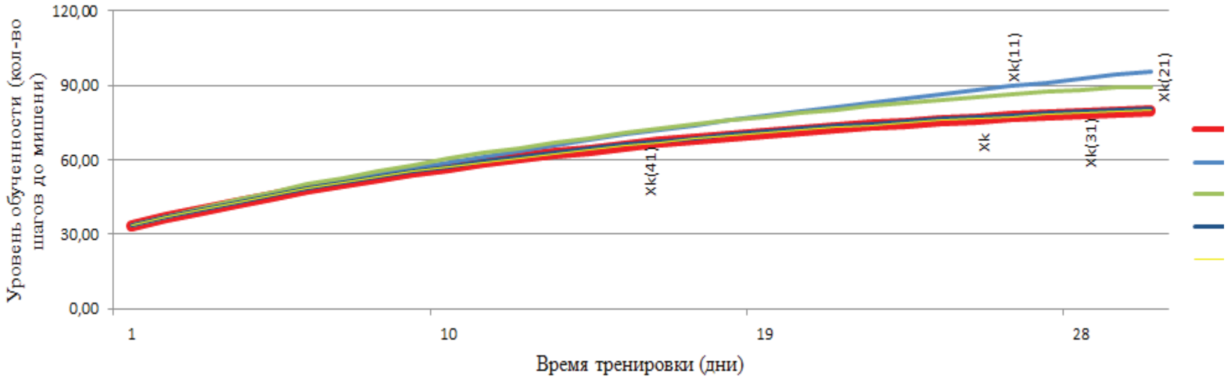

Рис. 1. Влияние вариации параметров модели на уровень обученности Сильвио при увеличении на 1% значений α, β, V_k, x_1

На рисунке 2 обозначены: x_k — прямая обученности Сильвио с базовыми значениями параметров; x_k (12) — кривая обученности с измененным параметром фактора тренировки V_k — 1%; x_k (22) — кривая обученности с измененным параметром степени потери навыка α — 1%; x_k (32) — кривая обученности с измененным параметром эффективности тренировки β — 1%; x_k (42) — кривая обученности Сильвио с измененным параметром стационарного уровня обученности x_1–1%.

В нашем примере при использовании данного метода получены следующие результаты. При увеличении фактора тренировки V_k на 1% прямая обученности стрелка x_k трансформируется в резко возрастающую кривую x_k (11) (рис. 1). При уменьшении фактора V_k на 1% прямая обученности Сильвио x_k становится резко убывающей кривой x_k (12) (рис. 2).

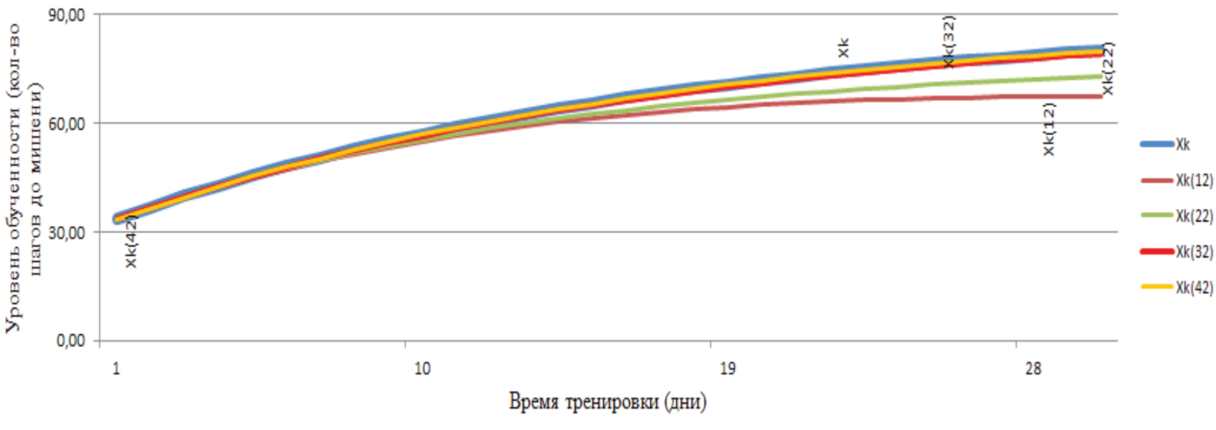

Рис. 2. Влияние вариации параметров модели на уровень обученности стрелка при уменьшении на 1% значений α, β, V_k, x_1

Аналогичная ситуация получается и при изменении параметра степени потери навыка α (рис. 1 и 2, кривые x_k (21) и x_k (22) соответственно).

При изменении параметров β и x_1 вид прямой практически не изменяется.

На основании полученных результатов можно говорить о том, что для определения фактора тренировки и расчета индивидуального коэффициента степени потери навыка должны предъявляться более высокие требования, чем к другим параметрам модели.

3. Анализ устойчивости модели. Под устойчивостью динамической системы обычно понимают свойство системы возвращаться к первоначальному состоянию после прекращения внешнего возмущающего воздействия.

Всякое решение системы (1), являющееся постоянным вектором с n компонентами, т. е. решение (1) вида

$$x(k)+x^*,\ k=1,2,... \tag{8}$$

где x^* — постоянный вектор с n компонентами, называется положением равновесия автономной системы (1).

Положение равновесия x^* автономной системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех решений $x(k)$ системы (1), для которых начальное значение $x(1)$ удовлетворяет условию

$$\left|x(k)-x^*\right| < \delta, \tag{9}$$

следует

$$\left|x(k)-x^*\right| < \varepsilon, k=1,2,... \tag{10}$$

В противном случае положение равновесия x^* системы (1) называется неустойчивым.

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия x^* автономной системы (1) называется асимптотически устойчивым [4], если

$$\lim_{k\to+\infty}\left|x(k)-x^*\right| = 0. \tag{11}$$

Анализ устойчивости полученного решения модели (5) проводился по методу Ляпунова.

Согласно определению устойчивости по Ляпунову показано, что положение равновесия x^* автономной системы (5) в точке $x^* = 90$ является устойчивым. Более того, так как выполняется условие (11), то решение уравнения (5) является асимптотически устойчивым. На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что траектория системы (5) при любом начальном условии стремится к $x^* = 90$ при $k \to +\infty$.

Заключение. Таким образом, можно сделать вывод о том, что линейная модель обучения (1) способна описывать реальные процессы динамики квалификации и уровней обученности. На численном примере показано, что модель устойчива и характеризуется уровнями чувствительности к изменениям параметров, соответствующим значениям для реальных процессов. В дальнейшем предполагается адаптировать данную модель для оценивания уровня компетентности студентов в Рубцовском институте (филиале) АлтГУ с учетом влияния межпредметных связей на итоговый уровень компетентности выпускников вуза.

Библиографический список

1. Хворова Л.А. Методы исследования чувствительности моделей продуктивности агроэкосистем // Известия Алтайского государственного университета. — 2013. — №1.

2. Оскорбин Н.М. Декомпозиционные методы и модели управления персоналом в человеко-машинных системах: дис.... д-ра техн. наук. — Новосибирск, 1991.

3. Оскорбин Н.М. Математическое моделирование социальных и экономических систем по произведениям А.С. Пушкина // Ломоносовские чтения на Алтае: сб. науч. ст. междунар. школы-семинара: в 4 ч. — Барнаул, 2012. — Ч. II.

4. Романко В.К. Разностные уравнения: учеб. пособие. — М., 2006.