

УДК 539.3

*Е. В. Амелина, С. К. Голушко***Вычислительные проблемы и методы расчета
напряженно-деформированного состояния
многослойных композитных пластин****E. V. Amelina, S. K. Golushko***Computational Problems and Methods of Calculating
Stress- Strain State for Laminated Composite Plates**

Рассмотрены вопросы выбора и применения классической и уточненных теорий композитных конструкций при решении задач расчета напряженно-деформированного состояния многослойных пластин, круговых и эксцентрических колец. Описаны подходы, используемые для получения численных решений. Показано значительное влияние выбора отсчетной поверхности на результаты расчета напряженно-деформированного состояния пластин. Определено, что выбор отсчетной поверхности должен учитывать способ моделирования нагружения и закрепления пластины. Найдены области геометрических параметров пластин и колец и физико-механических характеристик композиционных материалов, при которых применение уточненных теорий пластин необходимо: в частности, при наличии в конструкции геометрических «особенностей» (малого радиуса внутреннего отверстия, смещения центра отверстия) и использовании композиционных материалов с существенно отличными механическими характеристиками компонент.

Ключевые слова: композиционные материалы, композитные конструкции, теории пластин, напряженно-деформированное состояние.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-01

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) однородных изотропных конструкций в трехмерной постановке чаще всего осуществляется методом конечных элементов, однако использование данного подхода при анализе поведения неоднородных анизотропных конструкций крайне затруднительно. Понижение размерности и переход к решению двумерных задач при использовании метода гипотез приводят к появлению большого числа уточненных теорий, различающихся между собой по широте охвата учитываемых факторов, к проблеме выбора адекватной теории из этого многообразия и к необходимости разработки эффективных численных методов решения краевых задач для жестких систем дифференциальных уравнений.

Problems of selection and application of classical and refined theories of composite structures for solving problems of stress-strain state calculation for laminated plates, circular and eccentric rings are considered. Approaches used for obtaining numerical solutions are presented. It is demonstrated that selection of a reference surface has a considerable impact on plate stress-strain state numerical analysis results. It is also found that modeling techniques of plate loading and fixation have to be taken into consideration. Finally, ranges of values of mechanical properties and geometrical parameters are evaluated wherein the use of refined plate theories are required. Particularly, it is necessary when construction has geometrical «features» (small radii of inner hole, displacement of hole center), and its composite materials have markedly different mechanical properties of components.

Key words: composite materials, composite constructions, theories of plates, stress-strain state.

Постановка задачи. Рассматриваются многослойные композитные пластины и эксцентрические кольца (в частном случае, кольца с центральным отверстием), нагруженные равномерно распределенным внешним давлением P и растягивающим усилием по внешнему контуру постоянной интенсивности T_0 . Внутренний контур кольца жестко зашпелен. Требуется определить НДС при использовании различных гипотез теории пластин и выявить особенности их применения для решения поставленной задачи. Рассматривались системы гипотез: классическая гипотеза о неизменной нормали [1], гипотеза прямой линии [2], гипотеза о повороте нормали, описываемой функцией, с коэффициентами, завися-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-12032 офи_м) и Программы Президиума РАН 15.4 «Математическое моделирование, анализ и оптимизация гибридных систем».

щими от механических характеристик каждого слоя [3], и гипотеза ломаной линии [4].

Эксцентрическое кольцо рассматривалось в биполярной системе координат $\{a_1, a_2\}$ (рис. 1). Линиями $a_1 = A_0, a_1 = A_1$ задавались внутренний и внешний контуры кольца; R_0, R_1 — внутренний и внешний радиусы кольца; d — эксцентриситет отверстия; полная толщина $h = 2\delta + H$, где H, δ — толщины внутренне-го и внешних слоев.

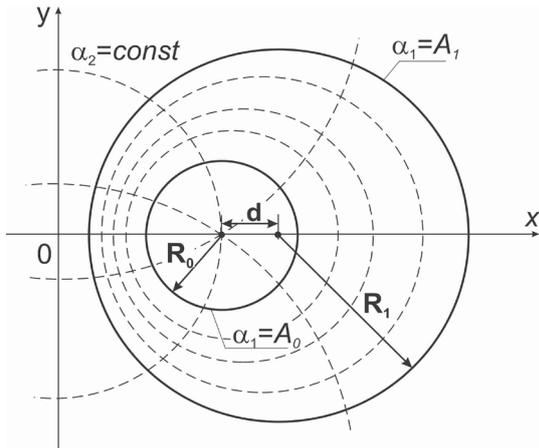


Рис. 1. Эксцентрическое кольцо в биполярной системе координат

Методы решения. Для решения задачи определения НДС эксцентрического кольца использовался метод разложения искомых функций по тригонометрическому базису. Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений решались методом дискретной ортогонализации Годунова, реализованном в пакете прикладных программ GMDO [5]. Верификация решений для колец с изотропными слоями, полученных в рамках теорий пластин, проводилась сравнением с решениями пространственной задачи, полученных с помощью пакета конечно-элементного анализа ANSYS.

Выбор отсчетной поверхности. Одним из важных аспектов корректного применения гипотез теории пластин является выбор отсчетной поверхности. В качестве примера влияния выбора отсчетной поверхности на максимальные интенсивности напряжений и перемещений рассмотрим однослойную стальную кольцевую пластину. На рисунке 2 для частного случая задачи растяжения пластины приведены зависимости уровня максимальных интенсивностей напряжений от выбора отсчетной поверхности, рассчитанные по различным теориям. Здесь $z_0 = 0$ соответствует нижней отсчетной поверхности, $z_0 = 0.5$ — срединной, $z_0 = 1$ — верхней. Уровень максимальных величин, полученных в рамках пространственной теории упругости, обозначен сплошной линией. Интенсивность напряжений вычислялась по формуле:

$$M(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)},$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ — компоненты тензора напряжений. Одной из причин существенного влияния выбора отсчетной поверхности на полученные результаты является способ моделирования нагружения и закрепления пластины. Выбор отсчетной поверхности здесь соответствует линии приложения растягивающей нагрузки. Аналогом равномерно распределенной по контуру нагрузки является нагрузка, приложенная по срединной линии.

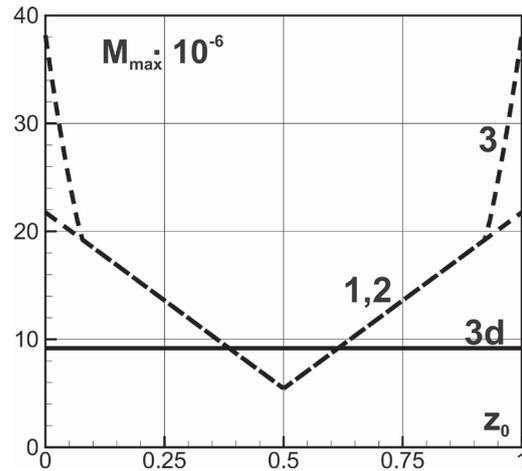


Рис. 2. Зависимость максимальных интенсивностей напряжений от выбора отсчетной поверхности (пояснения в тексте)

Параметры расчета: $R_0 = 0.03$ м, $R_1 = 0.3$ м, $d = 0$ м, $h = 0.006$ м, $T_0 = 4 \cdot 10^4$ Н/м.

Использование различных теорий пластин при решении задачи изгиба кольца показало, что результаты практически не зависят от выбора отсчетной поверхности, а характер распределения характеристик НДС достаточно точно определяется в рамках теорий пластин. Хорошее согласование результатов является следствием того, что для задачи изгиба проблема моделирования нагружения и закрепления кольца определяется однозначно.

Влияние механических характеристик композиционного материала. Исследовано влияние механических параметров композиционного материала на оценку уровня напряжений и деформаций в кольце с центральным отверстием при использовании различных теорий. В таблице 1 приведены значения механических характеристик арматуры E_a, σ_a^* и связующего E_c, σ_c^* для различных композиционных материалов.

С использованием структурной модели композиционного материала [6] проведен параметрический анализ по определению максимального уровня введенных интенсивностей напряжений в связующем $Bs_c = M_c(\sigma) / \sigma_c^*$ и арматуре $Bs_a = M_a(\sigma) / \sigma_a^*$, удлинений u и прогибов w в трехслойной кольцевой пластине с центральным отверстием. Максимальные зна-

чения величин вычислялись по толщине и радиусу кольца, а также углу армирования внешних слоев ψ , при этом арматура во внутреннем слое ψ_0 была уложена по окружностям. Относительная разность между ре-

зультатами, полученными по различным теориям, рассчитывалась по формуле: $\Delta_{ii} = \max_{r,h,\psi} |f_{к-л.} - f_i| / \max_{r,h,\psi} f_{к-л.}$ и приведена в таблице 2. Здесь индекс i обозначает теорию и $i \in \{[1], [2], [3], [4]\}$.

Таблица 1

Материал	Модуль Юнга, 10^9		Предел прочности, 10^9		Соотношение	
	E_c	E_a	σ_c^*	σ_a^*	E_d/E_c	s_a^*/σ_c^*
Углепластик	3	300	0.09	3.0	100.0	33.3
Стеклопластик	3	110	0.09	3.5	36.7	38.9
Алюминий — сталь	70	200	0.55	2.7	2.9	4.9
Никель — вольфрам	200	400	1.30	3.0	2.0	2.4

Таблица 2

Материал	$\Delta_{12}, \%$				$\Delta_{14}, \%$				$\Delta_{13}, \%$			
	Bs_a	Bs_c	u	w	Bs_a	Bs_c	u	w	Bs_a	Bs_c	u	w
Углепластик	0.0	3.2	0.0	1.7	9.5	73.1	4.9	2.2	22.5	80.7	1.2	2.1
Стеклопластик	0.0	0.7	0.0	0.8	6.5	12.7	2.3	1.0	15.8	38.7	0.6	1.0
Алюминий — сталь	0.1	0.1	0.0	0.3	4.4	4.6	1.1	0.4	12.4	13.8	1.1	0.4
Никель — вольфрам	0.1	0.1	0.0	0.3	4.2	4.2	0.0	0.4	12.3	13.0	0.0	0.4

Наименьшее уточнение результатов, полученных с использованием классической теории, дает теория Тимошенко, наибольшее — теория [3]. При этом следует отметить, что чем меньше отличие между компонентами композиционного материала, тем меньше отличие, получаемое при использовании уточненных теорий пластин.

Таким образом, применение композиционных материалов с существенно различными характеристиками обуславливает необходимость применения уточненных теорий расчета.

Параметры расчета: $R_0 = 0.03$ м, $R_1 = 0.3$ м, $H = 0.006$ м, $d = 0.002$ м; $\omega_z^{(0)} = \omega_z^{(1)} = 0.5$, $\omega_a^{(0)} = \omega_a^{(1)} = 0.5$, $P = 4 \cdot 10^4$ Н/м², $T_0 = 4 \cdot 10^4$ Н/м.

Влияние радиуса внутреннего отверстия. Для исследования влияния данного параметра использовались аналитические решения уточненной теории [3], полученные в [7]. На рисунке 3 показаны приведенные прогибы w^* . Здесь сплошными линиями обозначены результаты, полученные по трехмерной теории, штрихпунктирные — по теории [1] и пунктирные — по теории [3].

Уменьшение радиуса внутреннего отверстия приводит к существенному возрастанию сдвигов и, как следствие, увеличению разности между решениями, полученными по классической [1] и уточненной [3] теориям. Сравнение с решением, полученным в пространственной постановке, показывает хорошее совпадение результатов для уточненной теории.

Однако и в этом случае уменьшение отверстия приводит к росту отличия между ними.

Параметры расчета: $R_0 = 0.2$ м, $R_1 = 1$ м, $H = 0.03$ м, $\delta = 0.005$ м; $E_1 = 30 \cdot 10^9$ Па, $E_0 = 3 \cdot 10^9$ Па, $P = 10^5$ Н/м².

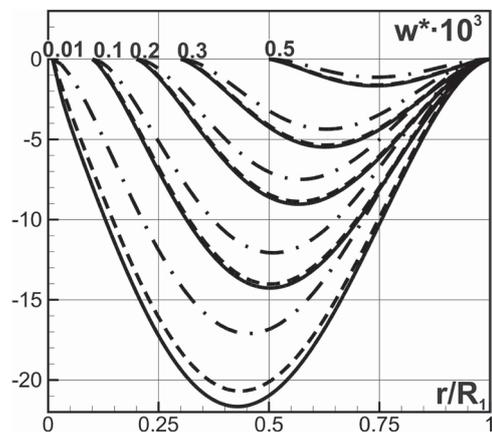


Рис. 3. Зависимость прогиба, полученного по различным теориям, от радиуса внутреннего отверстия (пояснения в тексте)

Влияние эксцентриситета. На рисунке 4 показано влияние эксцентриситета отверстия на расчетные интенсивности напряжений в связующем материале, полученные при использовании классической теории (пунктирные кривые) и уточненной [3] (сплошные). Цифрами обозначено отношение d/R_1 .

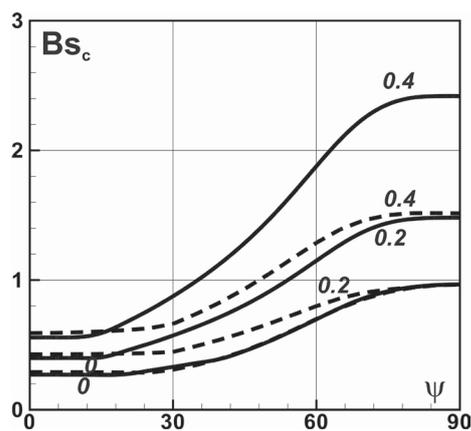


Рис. 4. Интенсивность напряжений в связующем материале (пояснения в тексте)

Увеличение эксцентриситета приводит к усилению краевых эффектов, обусловленных наличием поперечных сдвигов, о чем свидетельствует рост относительной разности между решениями по теориям, с учетом и без учета поперечных сдвигов. Однако если использовать возможности композиционного материала по изменению структуры армирования, то можно значительно снизить этот эффект. Для приведенно-

го примера использование радиального армирования ($\psi = 0^\circ$) позволяет существенно разгрузить связующее и перераспределить нагрузку на волокна, обладающие более высокой прочностью.

Параметры, отличные от предыдущего расчета:
 $\bar{n} = 3 \cdot 10$ Па, $E_a = 300 \cdot 10^9$ Па, $\omega_z^{(0)} = \omega_z^{(1)} = 0.5$,
 $\omega_a^{(0)} = \omega_a^{(1)} = 0.5$, $T_0 = 3 \cdot 10^6$ Н/м, $P = 5 \cdot 10^4$ Н/м²,
 $\psi_0 = 90^\circ$.

Заключение. Показано, что выбор отсчетной поверхности значительно влияет на результаты расчета НДС, получаемые при использовании теорий пластин (в некоторых случаях — почти на порядок). Одним из важных факторов, влияющих на выбор отсчетной поверхности, является моделирование прикладываемых нагрузок и способов закрепления.

Необходимость использования уточненных теорий обуславливается наличием в конструкции геометрических «особенностей» (в частности, малого радиуса внутреннего отверстия, смещения центра отверстия) и использованием композиционных материалов с существенно отличными механическими характеристиками компонент (в частности, композитов на полимерной основе).

Библиографический список

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Л., 1951.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. — М., 1992.
3. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. — Новосибирск, 2001.
4. Григолюк Э. И., Чулков П. П. К общей теории трехслойных оболочек большого прогиба // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 5.
5. Голушко С. К., Горшков В. В., Юрченко А. В. О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии. — 2002. — Т. 7, № 2.
6. Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров. — 1972. — № 5.
7. Голушко С. К., Морозова Е. В., Юрченко А. В. О численном решении краевых задач для жестких систем дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Сер.: Математика, механика, информатика. — 2005. — № 2.