Удк 539.3

Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский

Прогнозирование жесткостных характеристик бетонов при умеренных нагрузках*

G.L. Gorynin, Ju.V. Nemirovsky

Predicting the Stiffness Characteristics of Concrete under Moderate Loads

Бетон — это композитный материал, связующим которого является цементный камень, содержащий те или иные добавки и пластификаторы, а включения образованы камнями гравия или щебня. В процессе «созревания» бетона его свойства непрерывно изменяются во времени. Прогнозирование изменения прочностных и жесткостных характеристик существенно влияет на технологический процесс возведения сооружений, и задача такого прогнозирования весьма актуальна. В работе разработан метод решения поставленной задачи. В процессе созревания бетон проявляет себя как трехпериодическая упругая среда, жесткостные характеристики которой зависят от времени. Рассмотрено применение метода ячейковых функций к задачам прогнозирования изменений макрохарактеристик бетона в период набора его прочности. Макрохарактеристики вычисляются как интегралы ячейковых функций, которые находятся путем решения семейства краевых задач на периодической ячейке. На основе проведенных расчетов показано, что для регулярной, изотропной в среднем среды изменения во времени осредненных модуля упругости и коэффициента Пуассона качественно совпадают с известными экспериментальными зависимостями.

***Ключевые слова*:** бетон, связующее, включение, макрохарактеристики упругой среды.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-32

Concrete is considered to be a composite material consisted of cement paste binder, some additives and plasticizers, and inclusions of gravel and chip. Concrete properties are changing continuously during the concrete curing process. Prediction of changes in strength and stiffness characteristics affects significantly the building construction process; thus, such prediction is very important. Concrete is treated as a three-periodic elastic medium with time-dependant stiffness characteristics. In this paper, the application of cell functions for prediction of concrete macro characteristics and their changes over the period of concrete strength development is investigated. The macro characteristics are calculated by integration of cell functions that are derived from solving a family of boundary value problems on periodic cell. It is shown that calculations of averaged modulus of elasticity and Poisson's ratio for regular isotropic medium over a time period are in good agreement with well-known experimental dependencies.

Key words: concrete, binder inclusion, elastic medium macro characteristics.

Бетон — композитный материал, связующим которого обычно является цементный камень, содержащий те или иные добавки и пластификаторы, а включения образованы камнями гравия или щебня. При изготовлении бетона цементное связующее приобретает жесткость и прочность в течение 5–6 месяцев [1]. На основе бетона изготавливаются несущие конструкции многоэтажных зданий, причем технология строительства верхних этажей основана на использовании нижних этажей в качестве опоры, т.е. предполагается, что нижние этажи набрали достаточную прочность и жесткость. Таким образом, график возведения здания полностью зависит от умения прогнозировать прочностные и жесткостные характеристики бетона во времени, и задача такого прогнозирования актуальна.

Считаем, что бетон является трехпериодичной упругой средой (рис. 1), упругие характеристики компонент которой зависят от времени

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\varphi,\phi\in\{x,y\}} E_{\alpha\beta\phi\psi}(t)\frac{\partial(u_{\varphi})}{\partial\phi}, \alpha,\beta,\phi,\psi\in\{x,y,z\}, \qquad (1)$$

где $E_{\alpha\beta\phi\psi}(t)$ — компоненты упругого тензора, внутри каждой упругой среды они могут непрерывно меняться, а на границах сред претерпевать скачки. Считаем, что если к телу, вырезанному из бетона,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №12-01-90405-Укр_а).

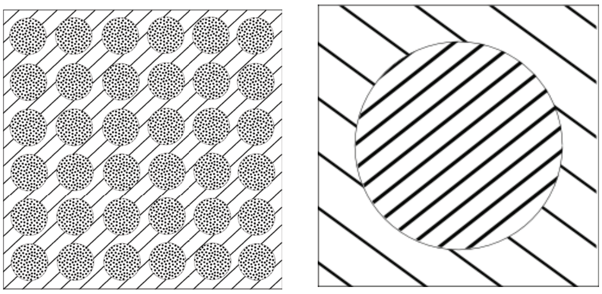
приложить некоторую нагрузку, то напряжения и перемещения, возникающие в теле, удовлетворяют пространственной задаче теории упругости. Тогда для их нахождения применим метод ячейковых функций, изложенный в работах [2, 3]. В соответствии с этим методом периодической неоднородной среде ставится в соответствие однородная макросреда, упругие характеристики которой являются усредненными характеристиками периодической среды, а на ячейках периодичности (рис. 1b) вводятся ячейковые переменные $\xi_y, \xi_y \in [0,1]$ и ячейковые перемещения $\left(U_\alpha^\eta\right)^{\bar{k}}$ и напряжения $\left(\tau_{\alpha\beta}^\eta\right)^{\bar{k}}$, тогда для напряжений и перемещений периодической среды в первом асимптотическом приближении справедливы равенства:

$$u_\alpha = v_\alpha + \sum_{\phi\in\{x,y,z\}} \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=1} \left(U_\alpha^{v_\phi}\right)^{\bar{k}} \frac{\partial v_\phi}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon \right), \qquad (2)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\phi\in\{x,y,z\}} \left(\sum_{k_x+k_y+k_z=1} \left(\tau_{\alpha\beta}^{v_\phi}\right)^{\bar{k}} \frac{\partial v_\phi}{\partial \bar{r}^{\bar{k}}} \varepsilon \right),$$

$$\alpha, \beta \in \{x,y,z\}, \in \{x,y\}, \qquad (3)$$

где v_α — перемещения макросреды.



a b

Рис. 1. a — бетон — 3-периодическая среда; b — ячейка периодичности бетона: цементное связующее и включение

Ячейковые перемещения и напряжения определяются решением девяти краевых задач, определяемых индексами $\theta, \lambda \in \{x,y,z\}$:

$$\frac{\partial (\tau_{\alpha x}^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda}}{\partial \xi_x} + \frac{\partial (\tau_{\alpha y}^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda}}{\partial \xi_y} = 0, \alpha = \{x,y,z\}; \qquad (4)$$

закон упругости на ячейке —

$$(\tau_{\alpha\beta}^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda} = E_{\alpha\beta\theta\lambda} + \sum_{\varphi,\phi\in\{x,y\}} E_{\alpha\beta\varphi\phi} \frac{\partial (U_\varphi^{v_\theta})^{\mu_\lambda}}{\partial \xi_\phi} + \sum_{\phi\in\{x,y\}} E_{\alpha\beta z\phi} \frac{\partial (U_z^{v_\theta})^{\mu_\lambda}}{\partial \xi_\phi}; \qquad (5)$$

условия непрерывности ячейковых функций внутри ячейки на границе различных сред —

$$\left[(\tau_{\alpha n}^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda} \right] = 0, \left[(U_\alpha^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda} \right] = 0; \qquad (6)$$

условие периодичности ячейковых функций —

$$(U)_\alpha^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda}(\xi)\Big|_{\xi_\beta=0} = (U)_\alpha^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\beta=1},$$

$$(\tau_{\alpha\beta}^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\beta=0} = (\tau_{\alpha\beta}^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda}(\xi_x, \xi_y)\Big|_{\xi_\beta=1}; \qquad (7)$$

условие нормировки решения —

$$\left\langle (U_\alpha^{v_\theta})^{\bar{y}_\lambda} \right\rangle = 0, \qquad (8)$$

где $\langle \_ \rangle$ — усреднение этой величины по ячейке:

$$\langle \_ \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \_ \, d\xi_x d\xi_y. \qquad (9)$$

Из решений краевых задач (4) — (8) вычисляются упругие макрохарактеристики материала $\tilde{E}_{ijkl}$ по формуле:

$$\tilde{E}_{ijkl} = \left\langle E_{ijkl} \right\rangle + \left\langle \sum_{\varphi,\phi\in\{x,y\}} E_{ij\varphi\phi} \frac{\partial (U_\varphi^{v_k})^{\bar{y}_l}}{\partial \xi_\phi} + \sum_{\phi\in\{x,y\}} E_{ijz\phi} \frac{\partial (U_z^{v_k})^{\bar{y}_l}}{\partial \xi_\phi} \right\rangle, \qquad (10)$$

$$i,j,k,l \in \{x,y,z\}.$$

Пример. В качестве примера рассмотрим бетон, образованный изотропными материалами: гравием E = 49 ГПа и цементным связующим, для которого известен закон изменения модуля упругости со временем (E = 23 ГПа через четыре недели со времени образования бетонной смеси), вычисляемым по формуле [4]

$$E(t) = 30.6(1 - 0.543e^{-0.35t}), \qquad (11)$$

где время вычисляется в сутках.

Для обоих материалов брался неизменный коэффициент Пуассона $\nu = 0.21$. Относительная объемная составляющая гравия менялась в пределах 0.024–0.738. Тогда на основе решения краевых задач (4) — (8) были найдены ячейковые функции, а с помощью равенства (10) посчитаны макрохарактеристики бетона в зависимости от времени. Для изотропного бетона знание их равносильно знанию констант Ламе для бетона. На их основе вычислены модуль Юнга бетона и его коэффициент Пуассона. Результаты представлены на рисунке 2.

Поведение модуля Юнга бетона со временем (рис. 2b) качественно совпадает с известными экспериментальными кривыми (см., например: [1]). Увеличение доли включения приводит к поднятию соответствующей кривой модуля Юнга.

Хотя у обоих компонент бетона коэффициент Пуассона не меняется со временем, значение коэффициента Пуассона для бетона существенно зависит от времени и его изменение имеет два принципиально разных режима. При относительной

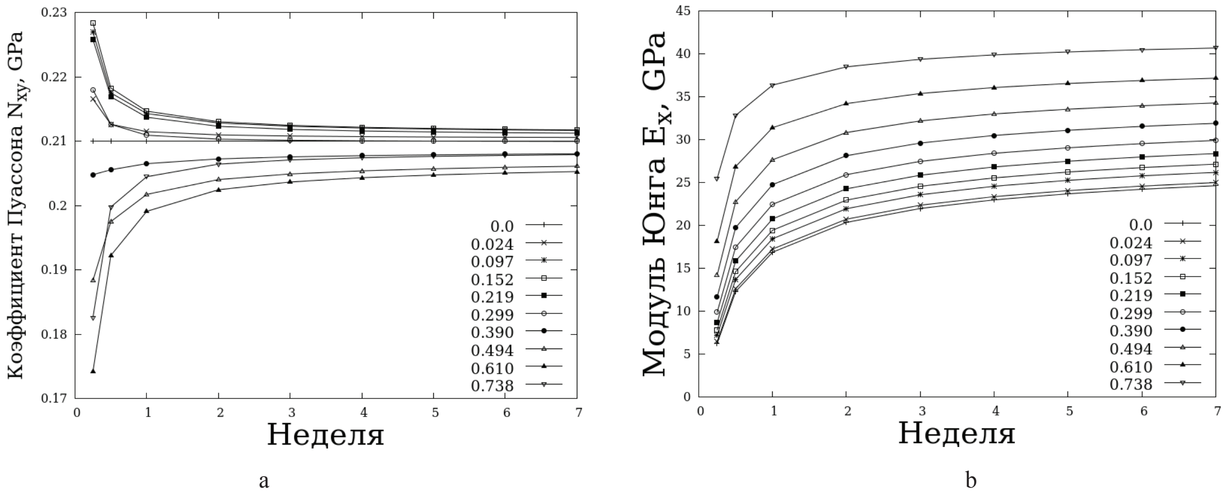


Рис. 2. Зависимость коэффициента Пуассона (a) и модуля Юнга (b) бетона от времени при различных величинах объемных составляющих включений

объемной составляющей включений меньше 0.3 коэффициент Пуассона бетона сначала резко возрастает на 10%, а затем со временем монотонно убывает до значения $\nu = 0.21$. При относительной объемной составляющей включений больше 0.3 процесс меняется на противоположный, коэффициент Пуассона бетона сначала резко убывает до 20%, а затем со временем монотонно возрастает до значения $\nu = 0.21$. Указанное свойство коэффициента Пуассона является важным при рассмотрении процессов усадки бетона и появления первичных трещин.

Библиографический список

1. Прочность и жесткость железобетонных конструкций / под ред. А. А. Гвоздева. — М., 1968.

2. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Метод асимптотического расщепления для упругой 3-периодической среды // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: мат. междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. — Новосибирск, 2011.

3. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для 1-периодических сред // Известия Алтайского государственного университета. — 2012. –№ 1.

4. Александровский С. В., Багрий Э. Я. Связь между напряжениями и деформациями бетона при длительных переменных во времени нагрузках // Прочность и жесткость железобетонных конструкций / под ред. А. А. Гвоздева. — М., 1968.