

*Н. А. Федорова***Управление криволинейными структурами армирования плоских конструкций***N. A. Feodorova***Curvilinear Structures For Reinforcement of Planar Constructions**

В различных отраслях современной промышленности широко используются тонкостенные элементы из волокнистых композитных материалов, при этом материал и изделие создаются одновременно в рамках одного технологического процесса. До недавнего времени армирование проводилось преимущественно прямолинейными волокнами. Такой способ армирования не применим для конструкций с большими градиентами полей напряжений и деформаций в зоне отверстий и переходных элементов. В этом случае необходимо создавать конструкции со специальными криволинейными структурами армирования.

В статье решена задача рационального армирования семействами криволинейных волокон осесимметричной кольцевой пластины в полярной системе координат. Поиск криволинейных структур армирования выполнен на основе структурной модели в рамках плоской неоднородной линейной задачи упругости. Изучено влияние структурных параметров на предельное нагружение конструкции. Приведены примеры армирования кольцевой пластины вдоль спиралей различного вида. Многообразие спиралевидных структур достигается построением траекторий, изогональных к данным семействам спиралей.

**Ключевые слова:** армирование, структурная модель, криволинейные траектории, изогональные траектории армирования.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-29

**Введение.** Армирование конструкций по криволинейным траекториям проводится на основе трех подходов: по сетке координатных линий ортогональной системы координат, определяемой заданным конформным отображением [1–3]; по изогональным траекториям, построенным к данным кривым [4]; по спиралевидным траекториям в осесимметричной постановке задачи. В настоящей статье рассматривается армирование по спиралевидным траекториям.

**1. Постановка осесимметричной задачи в полярной системе координат.** Пусть армирование выполнено  $m^*$  семействами волокон,  $\varphi_m$  – углы армирования  $m$ -м семейством волокон ( $m = 1, \dots, m^*$ ),  $\varepsilon_m$  –

Thin-shelled elements made of fibered composites are widely used in different branches of modern industry. Thus, a composite material and a workpiece are produced simultaneously as part of one manufacturing procedure. Until recently, reinforcement was mostly provided by linear fibers. Such reinforcement method cannot be used for constructions with large gradients of stress and deformation fields in areas of holes and adapters. In this case, it is necessary to design constructions with special curvilinear structures of reinforcement. In the paper, the problem of rational reinforcement with curvilinear fibers sets is formulated in polar coordinates for an axially symmetric ring-shaped lamel. Discovery of curvilinear structures is performed by the structural model determined in terms of a non-homogeneous planar linear problem of elasticity. Effects of structural parameters for ultimate loading conditions are studied. Examples of ring-shaped lamel reinforcements with different kinds of spiral sets are presented. A family of spiral structures is obtained by plotting of trajectories isogonal to provided trajectories.

**Key words:** reinforcement, structural model, curvilinear trajectories, isogonal trajectories of reinforcement.

деформация в волокне,  $\omega_m$  – интенсивность армирования  $m$ -м семейством волокон. Деформации в волокне определим по структурной модели [5]

$$\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta} \cos \varphi_m \sin \varphi_m = \varepsilon_m. \quad (1)$$

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и компоненты вектора перемещений  $u_\rho, u_\theta$  в условиях осесимметричной деформации, имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \varepsilon_{\rho\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}. \quad (2)$$

Закон Гука для неоднородного армированного материала запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \Omega \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\rho + \nu \varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^m \sigma_m \omega_m \cos^2 \varphi_m, \\ \sigma_\theta &= \Omega \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\rho) + \sum_{m=1}^m \sigma_m \omega_m \sin^2 \varphi_m, \\ \sigma_{\rho\theta} &= \Omega \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\rho\theta} + \sum_{m=1}^m \sigma_m \omega_m \cos \varphi_m \sin \varphi_m,\end{aligned}\quad (3)$$

где  $E, \nu$  — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала;  $\Omega = 1 - \sum_{m=1}^m \omega_m$  — удельная интенсивность прослоек связующего между армирующими слоями.

В соотношения (3) входят напряжения в волокне  $\sigma_m$ , они удовлетворяют закону Гука,  $E_m$  — модули Юнга  $m$ -го семейства волокон. При наложении дополнительных условий постоянства сечений волокон [6] интенсивность армирования  $\omega_m$  удовлетворяет следующим соотношениям в полярной системе координат

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \omega_m \cos \varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega_m \sin \varphi_m) = 0. \quad (4)$$

Интенсивность  $\omega_m$  найдем из (4) после определения углов армирования при задании уравнений конкретных траекторий армирования  $\rho = \rho(\theta)$  и начальных условий выхода арматуры на внутреннем контуре кольцевой пластины [7].

Подставим (3) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\sigma_{\rho\theta}}{\rho} = 0.$$

С учетом (2) получим относительно компонент перемещений систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}a_{11} \frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + a_{13} \frac{d^2 u_\theta}{d\rho^2} + \left( \frac{da_{11}}{d\rho} + \frac{a_{11}}{\rho} \right) \frac{du_\rho}{d\rho} + \\ + \left( -\frac{a_{23}}{\rho} + \frac{da_{13}}{d\rho} \right) \frac{du_\theta}{d\rho} + \left( \frac{da_{12}}{d\rho} - \frac{a_{22}}{\rho} \right) \frac{u_\rho}{\rho} + \\ + \left( -\frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho} \right) \frac{u_\theta}{\rho} = 0, \quad a_{13} \frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \\ + a_{33} \frac{d^2 u_\theta}{d\rho^2} + \left( \frac{a_{23}}{\rho} + \frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{2}{\rho} a_{13} \right) \frac{du_\rho}{d\rho} + \\ + \left( -\frac{a_{33}}{\rho} + \frac{da_{33}}{d\rho} + \frac{2a_{33}}{\rho} \right) \frac{du_\theta}{d\rho} + \\ + \left( \frac{da_{23}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho} \right) \frac{u_\rho}{\rho} + \left( -\frac{a_{33}}{\rho} - \frac{da_{33}}{d\rho} \right) \frac{u_\theta}{\rho} = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где введены коэффициенты

$$\begin{aligned}a_{11} &= m_1 + \sum_{m=1}^m E_m \omega_m \cos^4 \varphi_m, \quad a_{12} = \nu m_1 + \\ &+ \sum_{m=1}^m E_m \omega_m \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m, \\ a_{13} &= \sum_{m=1}^m E_m \omega_m \cos^3 \varphi_m \sin \varphi_m, \quad a_{22} = m_1 + \\ &+ \sum_{m=1}^m E_m \omega_m \sin^4 \varphi_m, \\ a_{23} &= \sum_{m=1}^m E_m \omega_m \cos \varphi_m \sin^3 \varphi_m, \quad a_{33} = m_2 + \\ &+ \sum_{m=1}^m E_m \omega_m \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m, \quad m_1 = \Omega \frac{E}{1-\nu^2}, \quad m_2 = \Omega \frac{E}{1+\nu}.\end{aligned}$$

К разрешающей системе (5) относительно компонент перемещений  $u_\rho, u_\theta$  добавим четыре граничных условия на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины. Система и граничные условия представляют собой обобщенную двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты системы (5) содержат полный набор структурных характеристик: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования. Для численного решения разрешающая система сводилась к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка, затем строилась разностная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений, и аппроксимировались краевые условия со вторым порядком точности. Полученная при этом система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей решалась методом ортогональной прогонки.

**2. Условия разрушения.** Проверка условий разрушения упруго армированного материала имеет свои особенности [8]. Пусть материал изотропного связующего имеет различные пределы прочности при растяжении  $\sigma_c^+$  и сжатии  $\sigma_c^-$ . Тогда в случае плоского напряженного состояния условие прочности для неоднородного материала через напряжения  $\sigma_\rho^c, \sigma_\theta^c, \sigma_{\rho\theta}^c$  в связующем для полярной системы координат имеет вид [8]:

$$\begin{aligned}(\sigma_\rho^c)^2 + (\sigma_\theta^c)^2 + 3(\sigma_{\rho\theta}^c)^2 - (\sigma_\rho^c)(\sigma_\theta^c) - \\ - (\sigma_c^+ - \sigma_c^-)(\sigma_\rho^c + \sigma_\theta^c) < \sigma_c^+ \sigma_c^-. \quad (6)\end{aligned}$$

Для семейств армирующих волокон предполагаем, что пределы прочности  $m$ -го семейства волокон при растяжении  $\sigma_m^+$  и сжатии  $\sigma_m^-$  различны. Армирующие семейства волокон остаются упругими, если выполняются неравенства

$$-\sigma_m^- < E_m \varepsilon_m < \sigma_m^+. \quad (7)$$

Таким образом, для проверки прочности армированного материала необходимо анализировать два

условия: условие на прочность материала связующего (6) и условие на прочность армирующих волокон (7). Поэтому вводится понятие *предельного упругого состояния* в некоторой точке рассматриваемой конструкции. При достижении этого состояния хотя бы в одной точке конструкции, в связующем или в волокне, происходит выход за пределы упругости. В данной точке может возникнуть микроразрушение.

**3. Численные примеры.** Постановка исходной задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает разнообразные механические формулировки задачи. Рассмотрены примеры численного решения задачи для одного, двух и трех семейств арми-

рующих волокон, представляющих собой семейства алгебраических спиралей и им изогональных траекторий для различных материалов с разными типами нагружения. В численном эксперименте рассмотрена кольцевая пластина со следующими криволинейными структурами армирования двумя семействами волокон. Траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и логарифмических спиралей, обозначим «A + L» (рис. 1); семейства логарифмических спиралей и «спицы велоколеса», обозначим «L + V» (рис. 2); семейства спиралей Архимеда и «спицы велоколеса», обозначим «A + V». Семейство изогональных траекторий [4] к логарифмической спирали показано на рисунке 3.

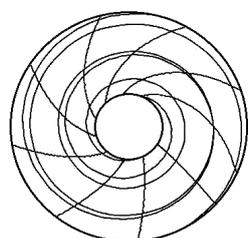


Рис. 1

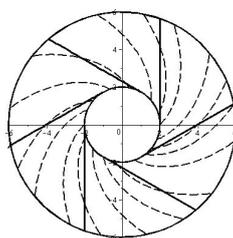


Рис. 2

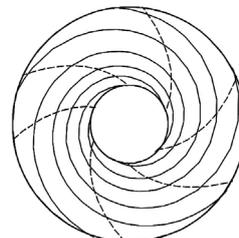


Рис. 3

Для анализа рассматриваемых структур армирования вводится характеристика  $P$  — «степень нагружения волокна», определяемая как отношение напряжений в волокне к пределу прочности соответствующего материала, выраженное в процентах. Для различных

амплитуд внешней нагрузки и начальных условий выхода арматуры  $\omega_{01}, \omega_{02}$  на внутреннем контуре кольцевой пластины получены зависимости  $P$  для рассматриваемых структур армирования, представленные в таблице.

Степень нагружения волокна  $P$ , выраженная в процентах

Структура армирования	$\omega_{01} = 0,3 ;$ $\omega_{02} = 0,3$	$\omega_{01} = 0,05 ;$ $\omega_{01} = 0,0376$	$\omega_{01} = 0,1 ;$ $\omega_{01} = 0,318$
Семейство (A+L)	6	40	6
Семейство (A+V)	9	70	10
Семейство (L+V)	14	80	22

Результаты таблицы показывают существенное влияние структурных параметров на поведение композита. Предлагаемая методика позволяет в рамках

единой схемы создавать конструкцию с заранее заданными свойствами и содержит широкий выбор возможностей криволинейного армирования.

### Библиографический список

1. Немировский Ю.В., Кургузов В.Д. Прочность и жесткость стеновых железобетонных панелей со сложными структурами армирования // Известия вузов. Строительство. — 2003. — № 2.
2. Немировский Ю.В., Федорова Н.А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волоконистых материалов. — Красноярск, 2010.

3. Немировский Ю.В., Федорова Н.А. Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2010. — № 5 (21).
4. Федорова Н.А. Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат

// Журнал Сибирского федерального университета. Сер.: Математика и физика. — 2011. — №4 (3).

5. Nemirovsky Yu. V. On the elastic behavior of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. — 1970. — Vol. 12.

6. Бушманов С. Б., Немировский Ю. В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов. — 1983. — №2.

7. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2013. — №1 (30).

8. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. — Новосибирск, 1986.