УДК 514.765

Е.Д. Родионов, В.В. Славский, О.П. Хромова

О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли

E.D. Rodionov, V.V. Slavskii, O.P. Khromova

About Harmonic Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Nonunimodular Decomposable Lie Groups

В статье исследуются римановы многообразия с гармоническим тензором Вейля. Класс данных многообразий содержит: многообразия Эйнштейна, их произведения, конформно плоские римановы многообразия. В общем случае задача классификации римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля представляется достаточно сложной. Естественно поэтому рассматривать ее в классе однородных римановых пространств, и, в частности, в классе групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В размерности 3 тензор Вейля тривиален. Поэтому возникает вопрос о гармоничности тензора Вейля на метрических группах Ли размерности больше трех.

В статье исследуются вещественные четырехмерные неунимодулярные разложимые группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля. Разработаны методы, которые позволяют свести задачу к решению системы полиномиальных уравнений в алгебрах Ли. С помощью дальнейшего исследования подобных систем методами дифференциальной геометрии, математического анализа и компьютерной алгебры в работе получена полная классификация вещественных четырехмерных неунимодулярных разложимых алгебр Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с гармоническим тензором Вейля.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, гармонический тензор Вейля.

DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-27

In this paper Riemannian manifolds with a harmonic Weyl's tensor are investigated. The class of these manifolds contains: Einstein's manifolds, the results of Einstein's manifolds products, conformally flat Riemannian manifolds. Generally, the problem of a classification of Riemannian manifolds with a harmonious Weyl's tensor is considered rather difficult. Naturally therefore to consider it in a class of homogeneous Riemannian spaces, and in particular in a class of Lie groups with a left invariant Riemannian metrics. In dimension three Weyl's tensor is trivial. Therefore there is a question of a harmony of the Weyl's tensor on metric Lie groups of dimension more than three. Four-dimensional unimodular Lie algebras of Lie groups with a left invariant Riemannian metrics and a harmonious Weyl's tensor were studied by authors. This paper continues these researches in nonunimodular case.

In this paper four-dimensional nonunimodular decomposable Lie groups with a left invariant Riemannian metrics, and a harmonious Weyl's tensor are investigated. Some methods which allow to reduce this problem to the decision of the system of the polynomial equations in Lie algebras are obtained. Full classification of four-dimensional nonunimodular decomposable Lie groups with a left invariant Riemannian metrics, and harmonious Weyl's tensor is obtained with the help of the methods of differential geometry, mathematical analysis and computer algebra. As a result of this classification the Lie algebras with metric Lie groups which aren't conformally flat, i.e. have non trivial Weyl's tensor are distinguished.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, harmonic Weyl tensor.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–2263.2014.1), мегагранта РФ для поддержки ведущих ученых (соглашение № 14.B25.31.0029), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО АлтГУ (проект: 1148)

Введение. В статье исследуются римановы многообразия с гармоническим тензором Вейля, т.е. с нулевой дивергенцией тензора Вейля. Ряд примеров таких многообразий и необходимые сведения о них приведены в [1–9]. В размерности 3 тензор Вейля тривиален, а его аналогом является тензор Схоутена-Вейля (тензор Коттона). Заметим, что вопросу гармоничности тензора Схоутена-Вейля на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой посвящена работа [2]. В размерности четыре и выше тензор Вейля, вообще говоря, отличен от нуля. Поэтому возникает вопрос о гармоничности тензора Вейля на группах Ли размерности $n \geq 4$ с левоинвариантными римановыми метриками. Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля изучались в [3]. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [3], в неунимодулярном разложимом случае.

В данной работе мы будем использовать классификацию вещественных четырехмерных алгебр Ли и систему обозначений Г.М. Мубаракзянова [5]. При исследовании вещественных четырехмерных неунимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля также будут использованы результаты работы А.Г. Кремлева и Ю.Г. Никонорова [4], в которой доказано, что для каждой четырехмерной неунимодулярной вещественной алгебры Ли существует ортонормированный базис, в котором структурные константы алгебры имеют удобный для вычисления вид. Определяя компоненты тензора Вейля и его дивергенции в указанных базисах, мы решаем вопрос о гармоничности тензора Вейля на неунимодулярных разложимых группах Ли. Заметим, что в силу инвариантности римановой метрики вопрос о гармоничности тензора Вейля на группах Ли может быть сведен к вопросу о гармоничности соответствующего тензора на алгебрах Ли.

1. Обозначения и предварительные сведения. Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности $n \geq 4$; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r = \mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$. Разделив тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни-Номидзу, получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A [1]:

$$R = W + A \bigotimes g,\ A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right),$$

где

$$(A \bigotimes g)(X,Y,Z,V) = \\ A(X,Z)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,Z) \\ -A(X,V)g(Y,Z) - g(Y,Z)P(X,V).$$

Пусть далее G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [1]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ *метрической алгеброй Ли.*

Фиксируем базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ левоинвариантных векторных полей в G. Положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k,\ \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k,\ \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}, \quad (1)$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}),\ \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \quad (2)$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

Из (1) и (2) очевидно следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна s и тензор Вейля W_{ijkt} являются функциями структурных констант c_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. также [2]). Так, например,

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} - \frac{s}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}g_{it} - g_{jt}g_{ik}) \\ - \frac{1}{n-2}(r_{ik}g_{jt} + r_{jt}g_{ik} - r_{it}g_{jk} - r_{jk}g_{it}). \quad (3)$$

Дивергенцию тензора Вейля будем определять формулой из [9]

$$\mathrm{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p}, \quad (4)$$

где $W_{ijkt,p} = \Gamma_{pi}^l W_{ljkt} + \Gamma_{pj}^l W_{ilkt} + \Gamma_{pk}^l W_{ijlt} + \Gamma_{pt}^l W_{ijkl}$ — ковариантные производные тензора Вейля.

Лемма 1. (см. [3]) *Дивергенция тензора Вейля кососимметрична относительно второго и третьего индексов, т.е.*

$$\mathrm{div} W_{ijk} = -\mathrm{div} W_{ikj}$$

Замечание 1. *Чтобы компактно записать полученные результаты, воспользуемся симметриями, которыми обладают тензор Вейля и дивергенция тензора Вейля. Всюду далее из компонент тензора Вейля соответствующих групп Ли будем приводить только существенные, т.е. нетривиальные, поскольку остальные либо выражаются через них, либо равны нулю.*

Таблица 1

Четырехмерные действительные разложимые неунимодулярные алгебры Ли

Разложимая алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^2 = A$, $c_{1,2}^3 = B$	$A > 0, B \geq 0$
$2\mathbb{A}_2$	$c_{1,2}^2 = A$, $c_{1,3}^2 = B$, $c_{1,3}^4 = C$, $c_{1,4}^2 = F(A-D)$, $c_{1,4}^4 = D$, $c_{3,4}^2 = -FG$, $c_{3,4}^4 = G$	$A > 0$, $G > 0$
$\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{1,3}^4 = B$, $c_{2,3}^1 = C$, $c_{2,3}^4 = D$	$A > 0$, $C > 0$
$\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{2,3}^4 = B$	$A > 0$, $B \geq 0$
$\mathbb{A}_{3,5}^\alpha \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = A$, $c_{1,3}^4 = B$, $c_{2,3}^1 = C$, $c_{2,3}^2 = A\alpha$, $c_{2,3}^4 = D$	$A > 0$, $0 < \lvert\alpha\rvert < 1$
$\mathbb{A}_{3,7}^\alpha \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \alpha L$, $c_{1,3}^2 = -AL$, $c_{13}^4 = BL$, $c_{2,3}^1 = L/A$, $c_{23}^4 = CL$	$L > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$

Придерживаясь терминологии работ [1–7], введем следующее понятие.

Определение 1. Риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 4$ называется *C-пространством* или *пространством с гармоническим тензором Вейля*, если $\mathrm{div} W = 0$.

Определение 2. Будем называть алгебру Ли группы Ли *разложимой*, если она представима в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т.е.

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad} X) \equiv 0, \ \forall X \in \mathfrak{g},$$

где $\mathrm{ad} X(Y) = [X, Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2. Разложимые четырехмерные действительные неунимодулярные алгебры Ли с левоивариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля. В данном разделе работы мы рассмотрим все четырехмерные действительные разложимые неунимодулярные алгебры Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой и нулевой дивергенцией тензора Вейля.

Нам понадобится следующий результат работы [4].

Лемма 2. *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 1.*

Далее все результаты формулируются с учетом базиса работы [4].

Теорема 1. *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{div} W = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 2.*

Таблица 2

Разложимые четырехмерные действительные неунимодулярные алгебры Ли с левоивариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля

Разложимая алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^2 = A$	$A > 0$
$2\mathbb{A}_2$	$c_{1,2}^2 = A$, $c_{3,4}^4 = G$	$A > 0$, $G > 0$
$\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$	$A > 0$
$\mathbb{A}_{3,7}^\alpha \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \alpha L$, $-c_{1,3}^2 = c_{2,3}^1 = L$	$L > 0$, $\alpha > 0$

Доказательство. Рассмотрим последовательно каждую унимодулярную разложимую алгебру Ли из таблицы 1.

Алгебра $\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2. С помощью формул (3) определим компоненты тензора Вейля. Учитывая, что в этом базисе $-\mathrm{W}_{1212} = 2\mathrm{W}_{1313} = 2\mathrm{W}_{1414} = 2\mathrm{W}_{2323} = 2\mathrm{W}_{2424} = -\mathrm{W}_{3434}$, существенной будет следующая координата тензора Вейля:

$$\mathrm{W}_{1212} = -(1/3)(A^2 + B^2).$$

Применяя формулы (4), найдем компоненты дивергенции тензора Вейля в указанном базисе. Заметим, что $2\mathrm{divW}_{123} = -2\mathrm{divW}_{213} = \mathrm{divW}_{312}$. Поэтому существенная координата дивергенции тензора Вейля равна:

$$\mathrm{divW}_{123} = (-1/4)B(B^2 + A^2).$$

Решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B и принимая во внимание, что $A > 0$, получим единственное действительное решение:

$$A > 0,\ B = 0.$$

Таким образом, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^2_{1,2} = A$, где $A > 0$, $B = 0$.

Алгебра $\mathbf{2\mathbb{A}_2}$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю и решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F, G, получим следующие действительные решения:

1. $A, F \in \mathbb{R}, B = C = G = 0, D = A.$
2. $A, G \in \mathbb{R}, B = C = D = F = 0.$
3. $A = B = C = F = 0, D, G \in \mathbb{R}.$

При $A > 0$ и $G > 0$ только второе решение удовлетворяет ограничениям леммы 2, и поэтому для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{2\mathbb{A}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид:

$$c^2_{1,2} = A,\ c^4_{3,4} = G, \text{ где } A > 0,\ G > 0.$$

Алгебра $\mathbf{\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2. Замечаем, что в этом базисе $\mathrm{W}_{1214} = \mathrm{W}_{2334}$, $\mathrm{W}_{1414} = \mathrm{W}_{2323}$, $\mathrm{W}_{1313} = \mathrm{W}_{2424}$, $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $\mathrm{W}_{1224} = -\mathrm{W}_{1334}$ и $\mathrm{W}_{1323} = -\mathrm{W}_{1424}$. Поэтому с учетом (3) существенными будут следующие компоненты тензора Вейля:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{W}_{1212} = 1/6(C^2 + B^2 + D^2),\\
&\mathrm{W}_{1214} = 1/4(CB - AD),\\
&\mathrm{W}_{1224} = 1/4AB,\\
&\mathrm{W}_{1313} = 1/6(C^2 - 2B^2 + D^2),\\
&\mathrm{W}_{1323} = -1/2(AC + DB),\\
&\mathrm{W}_{1414} = 1/6(B^2 - 2C^2 - 2D^2).
\end{aligned}$$

При этом компоненты дивергенции тензора Вейля определяются из (4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{divW}_{113} = (A/4)(3C^2 + D^2) + (1/2)CDB - (3/8)AB^2,\\
&\mathrm{divW}_{123} = (C/2)(C^2 + D^2 - A^2) - (B/8)(5AD + CB),\\
&\mathrm{divW}_{134} = -(1/8)BC^2 - (1/8)DAC - (1/2)A^2B\\
&\quad - (1/4)B^3 - (1/4)BD^2,\\
&\mathrm{divW}_{213} = (C/4)(C^2 + D^2) - (1/2)A^2C - (5/8)BAD,\\
&\mathrm{divW}_{223} = (A/4)(B^2 - 3C^2) - (3/8)(AD^2 + CDB),\\
&\mathrm{divW}_{234} = -(1/2)A^2D + (1/8)BAC - (1/4)DB^2\\
&\quad - (1/4)DC^2 - (1/4)D^3,\\
&\mathrm{divW}_{312} = -(1/8)C(-B^2 + 2C^2 + 2D^2),\\
&\mathrm{divW}_{314} = (1/8)(3DAC + 2B^3 + 2B(D^2 + A^2 - C^2)),\\
&\mathrm{divW}_{324} = (1/8)(BAC + 2D(B^2 + A^2 + C^2 + D^2)),\\
&\mathrm{divW}_{413} = (1/2)(DAC + B^3 + BD^2) + (3/4)A^2B,\\
&\mathrm{divW}_{423} = (1/4)D(3A^2 + 2B^2 + 2C^2 + 2D^2),\\
&\mathrm{divW}_{434} = (-AB^2 - AD^2 + CDB)/8.
\end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathrm{divW}_{423} = 0$. Из того что $A > 0$ и $C > 0$ следует, что $(3A^2 + 2B^2 + 2C^2 + 2D^2) > 0$, поэтому $\mathrm{divW}_{423} = 0$ тогда и только тогда, когда $D = 0$. Так как $D = 0$, то $\mathrm{divW}_{434} = -1/8AB^2$, из чего получаем, что $B = 0$. Далее рассмотрим $\mathrm{divW}_{223} = 0$, исходя из того, что $D = 0$ и $B = 0$, получим, что $\mathrm{divW}_{223} = -3/4AC^2$, а в силу ограничений на структурные константы A и C ($A > 0$ и $C > 0$) очевидно, что divW_{223} не равна нулю, следовательно, система уравнений $\mathrm{divW} = 0$ не имеет решений при заданных в лемме 2 ограничениях на структурные константы. Таким образом, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbf{\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1}$. Аналогично решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B и принимая во внимание, что $A > 0$, получим одно действительное решение $A > 0,\ B = 0$. Таким образом, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = A$, где $A > 0, B = 0$.

Алгебра $\mathbf{\mathbb{A}^{\alpha}_{3,5} \bigoplus \mathbb{A}_1,\ 0 < |\alpha| < 1}$. Рассуждая аналогично и решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D и параметра α, получим следующие действительные решения:

1. $A \in \mathbb{R}, B = C = D = 0, \alpha = 0.$
2. $A \in \mathbb{R}, B = C = D = 0, \alpha = 1.$

Найденные решения не удовлетворяют условиям леммы 2. Следовательно, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{3,5}^{\alpha}\bigoplus\mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha}\bigoplus\mathbb{A}_1$, $\alpha > 0$. Аналогично решая систему уравнений $\mathrm{divW} = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L и параметра α, получим следующие действительные решения:

1. $A, B, C \in \mathbb{R}, L = 0, \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $A = 1, B = C = 0, L \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $A = -1, B = C = 0, L \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$.

При $L > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$ только второе решение не противоречит условиям леммы 2. Значит, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha}\bigoplus\mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если нетривиальные структурные константы имеют вид: $c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \alpha L$, $c_{1,3}^2 = -c_{2,3}^1 = -L$, где $L > 0$, $\alpha > 0$.
Теорема доказана.

Замечание 2. *Среди четырехмерных действительных неунимодулярных разложимых алгебр Ли конформно плоскими являются лишь алгебры неунимодулярных разложимых алгебр Ли, конформно плоскими являются лишь алгебры $\mathbb{A}_{3,3}\bigoplus\mathbb{A}_1$ при $A > 0$, $B = 0$; $\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha}\bigoplus\mathbb{A}_1$ – при $A = 1$, $B = C = 0$, $L > 0$, $\alpha > 0$.*

Замечание 3. *Решение систем алгебраических уравнений настоящей работы проводилось с использованием пакетов аналитических расчетов, что позволило оптимизировать вычислительную часть исследования.*

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т. / пер. с англ. – М., 1990.

2. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2008. – Т. 419, №6.

3. Гладунова О.П., Славский В.В. Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. – 2011. – Т. 14, №1.

4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, №1.

5. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Сер.: Математика. – 1963. – Т. 32, №1.

6. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. – 2006. – Т. 37.

7. Listing M. Conformal Einstein spaces in N-dimensions // Ann. Global Anal. Geom. 2001. – V. 20.

8. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – №21.

9. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces. — Oxford, 1965.