УДК 532.546+536.415

А.Г. Петрова, М.Н. Железняк, В.В. Янцен

Автомодельные режимы протаивания насыщенного мерзлого грунта при выпадении дождя

A.G. Petrova, M.N. Zhelezniak, V.V. Jancen

Self-similar Regimes for the Problem of Saturated Frozen Soil Thawing Under the Action of Rain

Работа посвящена исследованию одномерной автомодельной задачи теплового взаимодействия мерзлого насыщенного грунта и выпадающего на него дождя. Изучение влияния атмосферных осадков на промерзание и протаивание грунтов имеет большое значение как для северных территорий с зонами вечной мерзлоты, так и для сельского хозяйства на юге Западной Сибири. Формулируется математическая модель фазовых переходов в насыщенных мерзлых грунтах с учетом выпадающего дождя. Приводится автомодельная постановка задачи и строится ее решение. Исследуются режимы протаивания почвы, замерзания выпавшей воды и стационарного положения фазовой границы. Особенностью постановки задачи является возможность движения свободной границы как вниз (протаивание мерзлой почвы), так и вверх (замерзание выпавшей на мерзлую поверхность воды), а также ее стационарного положения, когда выпадающие осадки и мерзлый грунт находятся в тепловом равновесии. Это отличает нашу постановку от хорошо изученных автомодельных решений в различных задачах с фазовым переходом, в которых автомодельный фронт имеет уравнение $s(t) = \beta\sqrt{t}$ с положительным параметром β.

Ключевые слова: фазовый переход, насыщенные почвы, автомодельное решение, задача Стефана.
DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-24

The paper is devoted to the study of one-dimensional self-similar problem of heat interaction between frozen saturated soil and atmospheric precipitates. The investigation of precipitations influence on the process of the soils freezing and the frozen soils thawing is of a great importance both for the north regions with permafrost and for agriculture in the South Siberia. The mathematical model for the phase change in frozen saturated soil under the action of a rain is formulated. The self-similar case is considered and the corresponding solutions are constructed. The conditions of the frozen soil thawing, the rain water freezing and of a stationary sate are studied. The particular feature of the given statement of a problem is the possibility for the free boundary to move as dawnward (process of the frozen soil thawing), so upwards (process of the rain water freezing) and also to keep the stationary position when precipitations and frozen soil are in the heat equilibrium state. This peculiarity distinguishes our statement of a problem from the well-studied self-similar solutions for different phase-change problems where the interface has the form of $s(t) = \beta\sqrt{t}$ with the positive parameter β.

Key words: phase change, saturated soil, self-similar solution, Stefan problem.

1. Постановка задачи взаимодействия мерзлого грунта с выпадающим дождем. Математическая модель протаивания мерзлого насыщенного грунта строится при следующий предположениях [1–3]:

- промерзающие и протаивающие грунты представляют собой пористые среды, насыщенные льдом и водой, газовая компонента и влага в виде пара отсутствуют;
- поровая жидкость является слабосжимаемой и ее течение подчинено закону Дарси

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{k}{\mu_m} f \nabla P;$$

- скелет пористой среды и лед также слабосжимаемы, скоростями их движения пренебрегаем.

Будем считать процесс одномерным, ось OX направлена вниз. Предположим, что фазовый пе-

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №1.3820.2011, грантов РФФИ №13-08-01097, №13-08-98016 и программы стратегического развития Алтайского государственного университета.

реход описывается в рамках классической задачи Стефана, в жидкой фазе влажность равна единице, в твердой фазе незамерзшая влага отсутствует и влажность равна нулю. Температура фазового перехода при атмосферном давлении считается равной нулю. Давление в обеих фазах осадков (воды и льда) считаем постоянным.

В случае протаивания грунта имеет место ситуация, проиллюстрированная следующим рисунком:

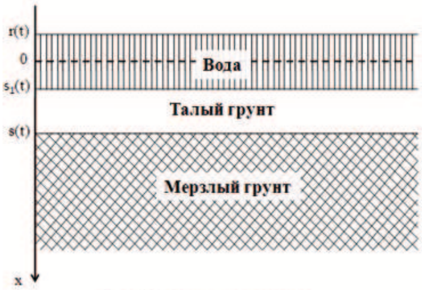

Рис. 1. Протаивание грунта

Рассмотрим процесс протаивания мерзлого грунта (рис. 1).

Твердая фаза в момент времени t занимает область $s(t) < x < \infty$ и в ней выполнены уравнения теплопроводности и пьезопроводности [3]

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_m \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad s(t) < x < \infty; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k_m \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad s(t) < x < \infty, \qquad (2)$$

где T – температура мерзлого грунта; P – давление, нижний индекс «m» означает некоторую «эффективную» величину соответсвующих коэффициентов, зависящую от пористости m. Талый грунт в момент времени t занимает область $s_1(t) < x < s(t)$ и в ней выполнены уравнения теплопроводности и пьезопроводности:

$$(\rho c)_l \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad s_1(t) < x < s(t); \qquad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k_l \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad s_1(t) < x < s(t), \qquad (4)$$

где нижний индекс «l» в талом грунте играет ту же роль, что и «m» в мерзлом.

Фазовая граница $x = s(t)$ – плоский фронт, на котором выполняются условия непрерывности температуры и давления

$$T(s-0,t) = T(s+0,t), \;\; P(s-0,t) = P(s+0,t); \; (5)$$

условие фазового равновесия

$$T = T^* = -\eta(P^* - P_a), \qquad (6)$$

а также условия массового и теплового баланса

$$m(1 - \frac{\rho_i}{\rho_w})\dot{s} - \frac{k}{\mu_m}\frac{\partial P}{\partial x}(s(t)+0,t) -$$

$$-f\frac{\partial P}{\partial x}(s(t)-0,t) = 0; \qquad (7)$$

$$mq\rho_i \dot{s} = \lambda_m \frac{\partial T}{\partial x}(s(t)+0,t) - \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}(s(t)-0,t). \; (8)$$

Здесь ρ_i – плотность льда; q – скрытая теплота фазового перехода; f – константа, отвечающая за фазовую проницаемость воды.

Дождевая вода в момент времени t занимает область в $r(t) < x < s_1(t)$, где верхняя граница представляет собой границу «лужи», считается известной и определяется скоростью выпадения осадков. В дождевой воде имеет место уравнение теплопроводности

$$(\rho c)_r \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad r(t) < x < s_1(t). \qquad (9)$$

На границе талый грунт – дождевая вода, которая не совпадает с начальным положением границы мерзлого грунта $x = 0$ вследствие усадки [4], выполнены условия непрерывности температуры, давления, а также их потоков (10),(11):

$$T(s_1(t)-0,t) = T(s_1(t)+0,t), \quad P = P_0; \qquad (10)$$

$$\lambda_r \frac{\partial T}{\partial x}(s_1(t)-0,t) = \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}(s_1(t)+0,t). \qquad (11)$$

Задача замыкается заданием температуры и давления на известных границах

$$T(r(t),t) = T_r, \; T(\infty,t) = T_\infty,$$

$$P(\infty,t) = P_\infty, \; P(r(t),t) = P_0 = const,$$

начальных условий для температуры и давления, начальных положений границ $s_0, r_0, s_1(0)$ а также «скорости дождя» $R(t)$.

Теперь выпишем постановку задачи замерзания дождевой воды на границе с мерзлым грунтом (рис. 2).

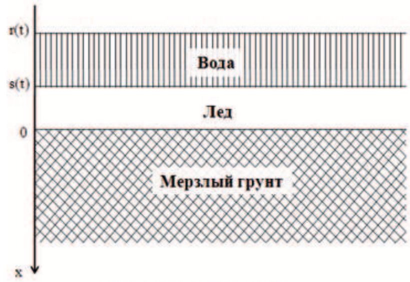

Рис. 2. Замерзание воды

Твердая почва в момент времени t занимает область $0 < x < \infty$ и в ней выполнены уравнения теплопроводности и пьезопроводности [1]

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_m \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < \infty; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k_m \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < \infty, \qquad (13)$$

где T — температура мерзлого грунта, P – давление, нижний индекс «m» означает некоторую «эффективную» величину соответсвующих коэффициентов, зависящую от пористости m.

Замерзшая вода в момент времени t занимает область $s(t) < x < 0$ и в ней выполнено уравнение теплопроводности:

$$(\rho c)_i \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, s(t) < x < 0, \qquad (14)$$

где нижний индекс «i» относится к характеристикам льда.

На границе $x = 0$ фазового перехода не происходит и на ней выполнеы условия непрерывности температуры и теплового потока:

$$T(0-0,t) = T(0+0,t), \;\; \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \lambda_m \frac{\partial T}{\partial x}(0,t). \qquad (15)$$

Дождевая вода занимает область $s(t) < x < r(t)$, в которой выполнено уравнение

$$(\rho c)_r \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, s(t) < x < r(t). \qquad (16)$$

Фазовая граница $x = s(t)$ – плоский фронт, на котором выполняются условия равенства температуры нулю и теплового баланса:

$$T = 0, \;\; mq\rho_i \dot{s} = \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x}(s+0,t) - \lambda_r \frac{\partial T}{\partial x}(s-0,t). \qquad (17)$$

Задача замыкается заданием температуры и давления на известных границах

$$T(r(t),t) = T_r, \, T(\infty,t) = T_\infty,$$

$$P(\infty,t) = P_\infty, \, P(r(t),t) = P_0 = const,$$

начальных условий для температуры и давления, начальных положений границ s_0, r_0 а также «скорости дождя» $R(t)$.

2. Автомодельный вариант задачи. Особенностью нашей постановки задачи является возможность движения свободной границы как вниз (протаивание мерзлой почвы), так и ввверх (замерзание выпавшей на мерзлую поверхность воды), а также ее стационарного положения, когда выпадающие осадки и мерзлый грунт находятся в тепловом равновесии. Это отличает нашу постановку от хорошо изученных автомодельных решений в различных задачах с фазовым переходом [3–8].

Рассмотрим процесс протаивания мерзлого грунта, при котором температура фазового перехода T^* равна постоянной величине. Будем рассматривать массу мерзлого грунта, занимающего в начальный момент область $x \geq 0$ и находящегося при температуре $T = T_\infty$ и давлении $P = P_\infty$, причем $T_\infty < -\eta(P_\infty - P_a)$.

Будем искать распределение температуры и давления во всех областях в виде

$$T = T(\xi), \quad P = P(\xi) \quad (\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}), \qquad (18)$$

закон движения фронта затвердевания – в виде

$$s(t) = \beta\sqrt{t}. \qquad (19)$$

Граница талый грунт – дождевая вода принимает вид

$$s_1(t) = k\beta\sqrt{t}, \qquad (20)$$

где $k = (1 - \rho_i/\rho_w)$ – коэффициент усадки.

Считаем также, что верхняя граница «лужи» изменяется по автомодельному закону

$$r(t) = \alpha\sqrt{t}. \qquad (21)$$

В результате подстановки (18)–(21) в (1)–(11) получаем следующие представления для искомых функций во всех расматриваемых зонах, в которых участвует неизвестный заранее параметр β:

$$\beta < \xi < \infty : \;\; T = T_\infty + (T^* - T_\infty) \frac{\int_\xi^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m^2}} d\tau}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m^2}} d\tau},$$

$$P = P_\infty + (P^* - P_\infty) \frac{\int_\xi^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}} d\tau}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}} d\tau}.$$

$$k\beta < \xi < \beta : \;\; T = A_l \int_{k\beta}^{\xi} e^{-\frac{\tau^2}{4a_l}} d\tau + B_l,$$

$$P = P^* + (P^0 - P^*) \frac{\int_\xi^\beta e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_l}} d\tau}{\int_{k\beta}^\beta e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_l}} d\tau}.$$

$$\alpha < \xi < k\beta : \;\; T = A_r \int_\alpha^\xi e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}} d\tau + T_r, P = P^0.$$

Коэффициенты A_l, A_r, B_l, входящие в формулы для температуры в растаявшей почве и в дождевой воде, находятся из следующей системы уравнений, являющейся следствием (10) и (11):

$$A_r \int_\alpha^{k\beta} e^{-\frac{\eta^2}{4a_r}} d\eta + T_r - B_t = 0, \;\; A_l \int_{k\beta}^{\beta} e^{-\frac{\eta^2}{4a_l}} d\eta + B_l = T^*;$$

$$\lambda_r A_r e^{-\frac{k^2\beta^2}{4a_r}} = \lambda_l A_l e^{-\frac{k^2\beta^2}{4a_l}}.$$

В частности,

$$A_l = \frac{T^* - T_r}{\int_{k\beta}^\beta e^{-\frac{\tau^2}{4a_l}} d\tau + \frac{\lambda_l}{\lambda_r} e^{-\frac{k^2\beta^2}{4a_l}} e^{\frac{k^2\beta^2}{4a_r}} \int_\alpha^{k\beta} e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}} d\tau}.$$

Параметр β находится как корень трансцендентного уравнения, являющегося следствием условия Стефана (8):

$$\lambda_m(T^*-T_\infty)\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4a_m}}}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau}+\lambda_l A_l e^{-\frac{\beta^2}{4a_l}}+mq\rho_i\frac{\beta}{2}=0. \quad (22)$$

Здесь вследствие фазовой диаграммы и балансового соотношения (7) имеют место равенства

$$T^*=-\eta(P^*-Pa);$$

$$P^*=\frac{P_\infty\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\chi_m}}}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}}d\tau}+fP^0\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\chi_l}}}{\int_{k\beta}^\beta e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_l}}d\tau}}{\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\chi_m}}}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}}d\tau}+f\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\chi_l}}}{\int_{k\beta}^\beta .e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_l}}d\tau}}-$$

$$-\frac{m\mu_w/k(1-\frac{\rho_i}{\rho_w})\beta/2}{\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\chi_m}}}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}}d\tau}+f\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\chi_l}}}{\int_{k\beta}^\beta .e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_l}}d\tau}}.$$

Выпишем автомодельное решение в предположении замерзания дождевой воды на границе с мерзлой почвой. Подставляя представления вида (18)–(21) в сооотношения (12)–(17), получим:

$$0<\xi<\infty: P_m=P_\infty+(P^0-P_\infty)\frac{\int_\xi^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}}d\tau}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4\chi_m}}d\tau},$$

$$T_m(\xi)=\frac{\lambda_i(T^*-T_\infty)\int_\xi^\infty e^{-\tau^2/4a_m}d\tau}{\lambda_m\int_\beta^0 e^{-\tau^2/4a_i}d\tau+\lambda_i\int_0^\infty e^{-\tau^2/4a_m}d\tau}+T_\infty;$$

$$\beta<\xi<0: P=P_0,$$

$$T_i(\xi)=\frac{\lambda_m(-T^*+T_\infty)\int_\beta^\xi e^{-\tau^2/4a_i}d\tau}{\lambda_m\int_\beta^0 e^{-\tau^2/4a_i}d\tau+\lambda_i\int_0^\infty e^{-\tau^2/4a_m}d\tau}+T^*;$$

$$\alpha<\xi<\beta: P=P_0,$$

$$T_r(\xi)=\frac{(T^*-T_r)\int_\alpha^\xi e^{-\tau^2/4a_r}d\tau}{\int_\alpha^\beta e^{-\tau^2/4a_r}d\tau}+T_r.$$

Уравнение для определения β принимает вид:

$$\frac{\lambda_i(T^*-T_\infty)e^{\frac{-\beta^2}{4a_i}}}{\int_\beta^0 e^{\frac{-\tau^2}{4a_i}}d\tau+\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\int_0^\infty e^{\frac{-\tau^2}{4a_m}}d\tau}+\frac{\lambda_r(T^*-T_r)e^{\frac{-\beta^2}{4a_r}}}{\int_\alpha^\beta e^{\frac{-\tau^2}{4a_r}}d\tau}+$$

$$+mq\rho_i\frac{\beta}{2}=0. \quad (23)$$

Отметим, что в предельном случае равновесия фаз, отвечающем значению $\beta=0$, уравнения (22) и (23) для определения β в собоих рассмотренных случаях совпадают и принимают вид

$$\frac{\lambda_m(T^*-T_\infty)}{\int_0^\infty e^{-\tau^2/4a_m}d\tau}+\frac{\lambda_r(T^*-T_r)}{\int_\alpha^0 e^{-\tau^2/4a_r}d\tau}=0. \quad (24)$$

3. Исследование автомодельных режимов. В качестве примера, илюстрирующего возможность движения автомодельной свободной границы как влево, так и вправо, а также ее фиксированного положения, в [1] была изучена задача выпадения дождя на чистый (без примесей) лед, т.е. рассмотренная выше задача при следующих условиях: $m=1, k=0, T^*=0, P\equiv P_a$, а все теплофизические характеристики дождевой воды, талой воды и льда считались одинаковыми. Были найдены условия, необходимые и достаточные для существования решения с неподвижной границей, границей, движущейся вправо и движущейся влево.

Получим соответствующие условия для задачи выпадения дождя на мерзлый насыщенный грунт.

В случае взаимодействия дождя с грунтом также найдем условия, при которых фазовая граница не движется, т.е. $\beta=0$.

Вследствие (24) необходимым и достаточным условием стационарного положения фазовой границы является выполнение равенства

$$-\frac{\lambda_r(T^*-T_r)}{\lambda_m(T^*-T_\infty)}=\frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}}d\tau}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau}, \quad (25)$$

где, вследствие (16), $T^*=-\eta(P^0-Pa)$.

Оценивая сверху числитель правой части равенства (25) через $\sqrt{a_d\pi}$ и заменяя знаменатель на его значение $\sqrt{a_m\pi}$, получим следующее неравенство, связывающее входные данные задачи, необходимое для выполнения (25):

$$0<-\frac{\lambda_r(-\eta(P^0-Pa)-T_r)}{\lambda_m(-\eta(P^0-Pa)-T_\infty)}<\frac{\sqrt{a_r}}{\sqrt{a_m}}.$$

Для выяснения условий протаивания почвы ($\beta>0$) введем функцию $F(\beta)$:

$$F=\lambda_m(T^*-T_\infty)\frac{e^{-\frac{\beta^2}{4a_m}}}{\int_\beta^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau}+$$

$$+\lambda_t A_t e^{-\frac{\beta^2}{4a_t}}+mq\rho_i\frac{\beta}{2},\ \ \beta>0;$$

$$F=\frac{\lambda_i(T^*-T_\infty)e^{\frac{-\beta^2}{4a_i}}}{\int_\beta^0 e^{\frac{-\tau^2}{4a_i}}d\tau+\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\int_0^\infty e^{\frac{-\tau^2}{4a_m}}d\tau}+$$

$$\frac{\lambda_r(T^*-T_r)e^{\frac{-\beta^2}{4a_r}}}{\int_\alpha^\beta e^{\frac{-\tau^2}{4a_r}}d\tau}+mq\rho_i\frac{\beta}{2},\ \ \beta<0;$$

$$F(0)=\frac{\lambda_m(T^*-T_\infty)}{\int_0^\infty e^{-\tau^2/4a_m}d\tau}+\frac{\lambda_r(T^*-T_r)}{\int_\alpha^0 e^{-\tau^2/4a_r}d\tau}.$$

Вследствие (24) функция $F(\beta)$ непрерывна.

Проанализируем поведение этой функции при $\infty < \beta < +\infty$. Очевидно,

$$F(0) = -\infty, \;\; F(+\infty) = +\infty,$$

что вследствие непрерывности $F(\beta)$ означает, что уравнение $F(\beta) = 0$ имеет по крайней мере один корень, т.е. автомодельное решение нашей задачи существует. Реализация рассмотренных вариантов (протаивание грунта и замерзание дождевой воды) зависит от входных данных и будет рассмотрена ниже.

Доказательство монотонного возрастания функции $F(\beta)$ при отрицательных β не представляет трудностей, при положительных β оно технически более громоздко, вследствие чего здесь опущено. Таким образом, автомодельное решение рассмотренной задачи всегда существует и единственно и определяется приведенными выше формулами.

Ответ на вопрос о том, происходит протаивание почвы или, напротив, замерзание дождевой воды, дает знак $F(\beta)$ в точке $\beta = 0$. Именно в случае $F(0) < 0$, очевидно, существует единственный корень $\beta > 0$, что соответствует протаиванию мерзлого грунта. При выполнении условия $F(0) > 0$ существует единственный корень $\beta < 0$, реализуется второй из рассмотренных сценариев, т.е. замерзание выпавшей в виде дождя воды.

Итогом наших рассуждений является следующее

Утверждение Пусть

$$T_\infty < -\eta(P^0 - Pa) < T_r, \;\; T_\infty < \eta(P_\infty).$$

Тогда, при выполнении условий

$$\frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}d\tau}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau} > \frac{\lambda_r(\eta(P^0 - Pa) + T_r)}{\lambda_m(-\eta(P^0 - Pa) - T_\infty)}$$

задача (1)–(11) имеет единственное автомодельное решение.

Если

$$\frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}d\tau}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau} < \frac{\lambda_r(\eta(P^0 - Pa) + T_r)}{\lambda_m(-\eta(P^0 - Pa) - T_\infty)},$$

то задача (12)–(17) имеет единственное автомодельное решение.

В случае, когда

$$\frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}d\tau}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau} = \frac{\lambda_r(\eta(P^0 - Pa) + T_r)}{\lambda_m(-\eta(P^0 - Pa) - T_\infty)}$$

фазового перехода в автомодельной постановке не происходит: скачок тепловых потоков со стороны мерзлого грунта и дождевой воды равен нулю.

Следствие. В случае, когда $P_0 \equiv Pa$ при выполнении неравенства

$$T_\infty < -\eta(P^0 - Pa) < T_r, \;\; T_\infty < \eta(P_\infty)$$

условия протаивания почвы, замерзания дождевой воды и равновесия фаз имеют вид

$$\frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}d\tau}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau} > \frac{\lambda_r T_r}{-\lambda_m T_\infty}, \;\; \frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}d\tau}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau} < \frac{\lambda_r T_r}{-\lambda_m T_\infty};$$

$$\frac{\int_\alpha^0 e^{-\frac{\tau^2}{4a_r}d\tau}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4a_m}}d\tau} = \frac{\lambda_r T_r}{-\lambda_m T_\infty}$$

соответственно.

Библиографический список

1. Петрова А.Г., Янцен В.В. Тепловое взаимодействие мерзлого грунта с атмосферными осадками // Сборник научных статей международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае». – Барнаул, 2013. – Ч. 1.

2. . Папин А.А., Гагарин Л.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П., Шепелев В.В. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия АлтГУ. – 2013. – Вып. 1/2. doi:10.14258/izvasu(2013)1.2-06.

3. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1996.

4. Воеводин А.Ф., Гранкина Т.Б. Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. – Т. 9, №1(25).

5. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. – Рига, 1980.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1977.

7. Бадратинова Л.Г., Кузнецов В.В., Петрова А.Г., Пухначев В.В. О задачах со свободными границами, моделирующих процесс жидкофазной эпитаксии из тройных растворов // Динамика сплошной среды. 1986. – Вып 78.

8. Петрова А.Г., Пухначев В.В. Одномерное движение эмульсии с затвердеванием // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 3.