

А.А. Папин

Взаимопроникающее движение двух жидкостей с малой вязкостью*

A.A. Papin

Interpenetrating motion of two fluids with low viscosity

Рассматривается одномерное изотермическое движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей в отсутствие фазовых переходов. Для тензора напряжений и вектора межфазного взаимодействия фаз используется схема Х.А. Рахматулина силового взаимодействия и совместного деформирования фаз. Давления в фазах отличаются на величину капиллярного скачка. Числа Рейнольдса для каждой из фаз предполагаются малыми. Используется разложение по малому параметру и выводится система уравнений первого порядка, соответствующая нулевому приближению. Полученная система имеет переменный тип. Сформулированы условия на функциональные параметры уравнений, при которых система имеет эллиптический вид и сводится к системе уравнений Бельтрами. Для случая равных давлений фаз и специальным образом подобранных коэффициентов уравнений системы построено точное решение одной задачи в неограниченной области. В общем случае численный расчет задачи проводился методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для случая разных давлений и малых ускорений фаз рассмотрена квазистационарная система уравнений, которая сводится к одному нелинейному уравнению второго порядка параболического типа. Особенностью полученного уравнения является его возможное вырождение на решении. Наличие малого параметра при старшей производной существенно затрудняет исследование начально-краевых задач. Численные расчеты проводились с использованием неявной конечно-разностной схемы.

Ключевые слова: двухфазная смесь, изотермическое движение, число Рейнольдса, характеристическое уравнение, вырождение, численный расчет.
DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-23

Введение. В работе рассматривается одномерное изотермическое движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей в отсутствие фазовых переходов. Уравнения неразрыв-

In this paper we consider the one-dimensional isothermal motion of two-phase mixture of viscous incompressible fluids in the absence of phase transitions. H.A. Rahmatulin's scheme of force interaction and joint deformation phases is used for the stress tensor and vector interfacial phase. Pressure in phases differs by the amount of capillary jump. Reynolds numbers for each of the phases are assumed to be small. We used the expansion in the small parameter and deduced the system of first order equations corresponding to a zero approximation. The resulting system has a variable type. The conditions on the functional parameters of the equations for which the system has an elliptical form and is reduced to a system of Beltrami were formulated. The exact solution of a problem in an unbounded domain was obtained for the case of equal pressure phases and specially selected coefficients of the system. In general case, the numerical calculation of the problem was performed by the Runge -Kutta fourth-order accuracy. For the case of different pressures and small accelerations of phases we considered the quasi-stationary system of equations, which is reduced to a nonlinear second-order equation of parabolic type. The peculiarity of this equation is its possible degeneracy on the solution. The small parameter at the highest derivative greatly complicates the study of initial-boundary problems. Numerical calculations were performed using the implicit finite-difference scheme.

Key words: two-phase mixture, isothermal motion, Reynolds number, characteristic equation, degeneracy, numerical calculation.

ности и импульса для каждой из фаз ($i = 1, 2$) имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i v_i) = 0,$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial s_i \sigma_i}{\partial x} + F_i.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства (№1.3820.2011), грантов РФФИ (№ 13-01-98016 и № 13-08-01097).

Здесь v_i – скорость соответствующей фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией s_i соотношением $\rho_i = s_i \rho_i^0$. Условие $s_1 + s_2 = 1$ является следствием определения ρ_i . Для тензора напряжений фазы σ_i принимается аналог гипотезы Стокса [2]: $\sigma_i = -p_i + \mu_i \frac{\partial v_i}{\partial x}$, где p_i – давление, $\mu_i > 0$ – коэффициент динамической вязкости. Постулируется, что силы F_i имеют вид [1,2]: $F_i = p_i \frac{\partial s_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g$, где $\varphi_1 = K(v_2 - v_1)$, $\varphi_2 = -\varphi_1$, K – коэффициент взаимодействия фаз (заданная функция концентраций [1]), g – ускорение силы тяжести. Условия $\rho_i^0 = const > 0$, $p_2 - p_1 = p_c(s_1)$ приводят к замкнутой системе уравнений для $s_i(x, t)$, $v_i(x, t)$ и $p_i(x, t)$ вида:

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i s_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = -s_i \frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_i^0 s_i, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \\ s_1 + s_2 &= 1, \\ \varphi_1 &= K(v_2 - v_1) = -\varphi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Данная система уравнений является частным примером многочисленных моделей взаимопроникающего движения жидкостей (см. обзоры: [3–5]). Вопросы корректности начально-краевых задач для системы (1)–(3) рассматривались в работах [6–8]. В настоящей работе для линеаризованной системы (1)–(3) рассматриваются точные и численные решения ряда задач.

1. Преобразование уравнений В (1)–(3) перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad v'_i = \frac{v_i}{V}, \quad p'_i = \frac{p_i}{P}, \quad p'_c = \frac{p_c}{P}, \\ \rho_i^{0'} &= \frac{\rho_i^0}{\rho}, \quad K' = K \frac{T}{\rho}, \quad g' = g \frac{T}{V}, \end{aligned}$$

где T , L , ρ – соответственно характерные время, длина и плотность, $V = L/T$, $P = VL\rho/T$. Тогда система

принимает вид (штрихи опускаются):

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) &= 0, \\ \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \frac{1}{Re^i} \frac{\partial}{\partial x} \left(s_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) &= \\ &= -s_i \frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g, \\ \rho_i &= \rho_i^0 s_i, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad s_1 + s_2 = 1, \\ \varphi_1 &= K(v_2 - v_1) = -\varphi_2. \end{aligned}$$

Здесь $Re^i = \mu_i/\rho VL$, $i = 1, 2$. Предполагается, что эти параметры малы и имеют один порядок ε . Также предполагается, что решение (s_i, v_i, p_i) есть функции $(x, t) \in R^1 \times (0, T)$ и параметра ε . Используя разложение (s_i, v_i, p_i) в ряды по малому параметру, стандартным образом приходим к системе уравнений, соответствующей нулевому приближению (обозначения формально сохранены):

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\rho_i^0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\varphi_i}{s_i} + \rho_i^0 g, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_i^0 s_i, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \\ s_1 + s_2 &= 1, \\ \varphi_1 &= K(v_2 - v_1) = -\varphi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений (4) и (6) следует $sv_1 + (1-s)v_2 = Q(t)$, где $Q(t)$ – произвольная функция времени, $s(x, t) \equiv s_1(x, t)$. Исключая из уравнений (5), (6) давления, приходим к системе для $s(x, t)$, $v_1(x, t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_1 \frac{\partial s}{\partial x} + s \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(s, v_1) \frac{\partial s}{\partial t} + \alpha_2(s, v_1) \frac{\partial v_1}{\partial t} + \\ + \beta_1(s, v_1) \frac{\partial s}{\partial x} + \beta_2(s, v_1) \frac{\partial v_1}{\partial x} &= f, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(s, v_1) &= \rho_2^0 \frac{v_1 - Q(t)}{(1-s)^2}, \\ \alpha_2(s, v_1) &= \rho_1^0 + \rho_2^0 \frac{s}{(1-s)}, \\ \beta_1(s, v_1) &= \rho_2^0 \frac{v_1 - Q(t)}{(1-s)^2} v_2 - p_c', \\ \beta_2(s, v_1) &= \rho_1^0 v_1 + \rho_2^0 v_2 \frac{s}{(1-s)}, \\ f &= K \frac{Q(t) - v_1}{s(1-s)^2} + g(\rho_1^0 - \rho_2^0) + \rho_2^0 \frac{Q'}{1-s}, \\ p_c' &\equiv \frac{dp_c}{ds}, \quad Q' \equiv \frac{dQ(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение системы (7), (8) имеет вид [9]

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{dt}{dx}, \quad a = \rho_1^0(1-s)v_1^2 + \rho_2^0 s v_2^2, \\ b &= -2(\rho_1^0 v_1(1-s) + \rho_2^0 s v_2), \quad c = \rho_1^0(1-s) + \rho_2^0 s. \end{aligned}$$

Дискриминант этого уравнения $D = -4s(1-s)[\rho_1^0 \rho_2^0 (v_1 - v_2)^2 + cp_c']$ может принимать любые

значения и, следовательно, система (7), (8) имеет переменный тип. В частности, при $D < 0$ она является эллиптической. Задача Коши для такой системы является некорректной [9]. Важную роль играет капиллярное давление p_c : условие $s(1-s)cp_c' > 0$, $s(1-s) > 0$ является достаточным для эллиптичности (7), (8) (в этом случае (7), (8) сводится к системе уравнений Бельтрами [10]).

2. Пример точного решения Построим точное решение следующей модели двухфазного течения

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i) &= 0, \\ \rho_i^0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varphi_i}{s_i}, \quad ct \leq x < \infty, \\ p_2 = p_1 = p, \quad s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1) = -\varphi_2. \\ s_1|_{x=ct} = s^0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} s(x, t) &= s^+ \\ v_1|_{x=ct} = v_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v_i(x, t) &= u^+, \quad i = 1, 2, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial s_i}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial v_i}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что заданные постоянные s^0, s^+, u^+, v_1^0 удовлетворяют условиям

$$s^0 \neq s^+, \quad 0 < s^0 < 1, \quad 0 < s^+ < 1,$$

а c – неизвестная, подлежащая определению постоянная. Полагая

$$v_i = v_i(\xi), \quad s_i = s_i(\xi), \quad p = p(\xi), \quad \xi = x - ct,$$

получим для s_i, v_i, p систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(s_i v_i - c s_i)' = 0, \quad (9)$$

$$\rho_i^0 (v_i v_i' - c v_i') = -p' + \frac{\varphi_i}{s_i}, \quad (10)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . Граничные условия для искомых функций имеют вид

$$\begin{aligned} s(0) = s^0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} s(\xi) &= s^+, \\ v_1(0) = v_1^0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} v_i(\xi) &= u^+, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} s_i'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} v_i'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} p'(\xi) = 0. \quad (12)$$

Так как из (9) следует

$$s_i(v_i - c) = A_i, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

то привлекая (11), (12), получаем следующую систему для неизвестных постоянных A_i и c

$$\begin{aligned} s^+(u^+ - c) &= A_1, \\ (1 - s^+)(u^+ - c) &= A_2, \end{aligned}$$

$$s^0(v_1^0 - c) = A_1.$$

Пусть $s^0 \neq s^+, s^+ \neq 0$, тогда решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} c = \frac{s^+ u^+ - s^0 v_1^0}{s^+ - s^0}, \quad A_1 = \frac{s^+ s^0 (v_1^0 - u^+)}{s^+ - s^0}, \\ A_2 = \frac{1 - s^+}{s^+} A_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая давления из (10) при $i = 1$ и $i = 2$, получим

$$\rho_1^0 (v_1 v_1' - c v_1') - \rho_2^0 (v_2 v_2' - c v_2') = \frac{\varphi_1}{s_1} - \frac{\varphi_2}{s_2}.$$

Подставляя в это равенство представления для v_i и v_i' из (13), приходим к уравнению для $s(\xi)$

$$\begin{aligned} \left(\rho_1^0 (1 - s)^3 + \rho_2^0 \left(\frac{1 - s^+}{s^+} \right)^2 s^3 \right) \frac{\partial s}{\partial \xi} + \\ + \frac{1}{A_1} K s (1 - s) \frac{s - s^+}{s^+} = 0, \quad (15) \\ s(0) = s^0. \end{aligned}$$

Пусть $s(\xi)$ есть решение задачи (15). Тогда скорости v_i находятся по формулам (13), (14) а давление p из уравнения (10) при $i = 1$ или $i = 2$.

Поскольку все функции, входящие в уравнение (14) заданы, то можно получать точные решения, используя разные модельные зависимости для $K(s)$.

При постоянном коэффициенте K решение задачи (15) можно представить в виде:

$$\xi = w(s - s^0) + \ln \left| \frac{(s^+ - s)^\gamma s^\alpha (1 - s)^\beta}{(s^+ - s^0)^\gamma (s^0)^\alpha (1 - s^0)^\beta} \right|,$$

где

$$\alpha = \frac{\rho_1^0}{K} \frac{s^0 s^+ (v_1^0 - u^+)}{s^+ - s^0},$$

$$\beta = -\frac{\rho_2^0 s^0 (1 - s^+) (v_1^0 - u^+)}{K (s^+ - s^0)},$$

$$\gamma = \frac{s^+ s^0 (1 - s^+) (v_1^0 - u^+)}{s^+ - s^0} \left(\frac{\rho_1^0}{K} (1 - s^+) + \frac{\rho_2^0}{K} s^+ \right),$$

$$\omega = \frac{s^0 (v_1^0 - u^+)}{s^+ - s^0} \left(\frac{\rho_2^0}{K} (1 - s^+)^2 - \frac{\rho_1^0}{K} (s^+)^2 \right).$$

Численный расчет задачи (15) с условиями: $s^0 = 1/2, s^+ = 3/4, v_1^0 = 10, u^+ = 0, \rho_1^0 = 1260, \rho_2^0 = 998$ проводился методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности. На рисунке 1 приведены значения концентрации $s(\xi)$ при $K = 1000$ – сплошная линия, $K = \alpha s(1 - s), \alpha = 1000$ – точечная, $K = \alpha/s^3, \alpha = 1000$ – пунктирная.

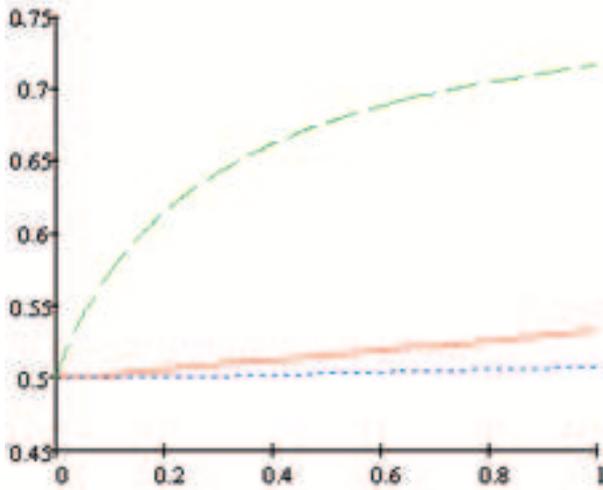


Рис. 1. Распределение концентрации $s(\xi)$ при $K = 1000$ – сплошная линия, $K = \alpha s(1 - s)$, $\alpha = 1000$ – точечная, $K = \alpha/s^3$, $\alpha = 1000$ – пунктирная

3. Квазистационарная задача (случай $p_1=p_2=p$). Рассматривается движение двухфазной смеси со свободной границей. В начальный момент времени $t = 0$ смесь двух вязких несжимаемых жидкостей заполняет отрезок $[0, h_0]$ оси Ox . Известно начальное распределение насыщенности и давление на границе контакта смеси и атмосферы. Требуется определить движение при $t > 0$.

Положение $x_i(t)$ частиц первой и второй фаз, которые при $t = 0$ находились на свободной границе, т.е. $x_1(0) = x_2(0) = h_0$, определяется из решения задачи Коши

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(x_i(t), t), \quad x_i(0) = h_0. \quad (16)$$

При $x = 0$ будем рассматривать либо условие

$$sv_1 + (1 - s)v_2 = Q(t),$$

либо условия

$$\begin{aligned} sv_1 = Q_1(t), \quad (1 - s)v_2 = Q_2(t), \\ Q_1(t) + Q_2(t) = Q(t). \end{aligned}$$

В обоих случаях $Q(t)$ считается заданной функцией времени.

Далее рассматривается квазистационарный случай системы (4), (5) и принимается, что $p_1=p_2=p$. В предположении о том, что область течения разбивается на две области, система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 < x < x_1(t) : \quad \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_1 v_1) = 0, \\ s_1 \frac{\partial p}{\partial x} = \varphi_1 - \rho_1^0 s_1 g, \\ 0 < x < x_2(t) : \quad \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_2 v_2) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$s_2 \frac{\partial p}{\partial x} = \varphi_2 - \rho_2^0 s_2 g, \quad (18)$$

$$\varphi_1 = K(v_2 - v_1) = -\varphi_2, \quad s_1 \equiv s, \quad s_2 \equiv (1 - s).$$

В дальнейшем без ограничения общности считается, что $\rho_1^0 > \rho_2^0$ и сила тяжести g направлена вниз.

В области общего течения $0 < x < H(t) = \min(x_1(t), x_2(t))$ из уравнений (17), (18) получаем равенства

$$sv_1 + (1 - s)v_2 = Q(t), \quad (19)$$

$$p_x = -g(\rho_1^0 s + \rho_2^0(1 - s)), \quad (20)$$

$$\varphi_1 = gs(1 - s)(\rho_1^0 - \rho_2^0). \quad (21)$$

Из соотношения (19) и (21) получаем представления для скоростей фаз

$$v_1 = Q(t) - \frac{s(1 - s)^2}{K}g(\rho_1^0 - \rho_2^0), \quad (22)$$

$$v_2 = Q(t) + \frac{s^2(1 - s)}{K}g(\rho_1^0 - \rho_2^0). \quad (23)$$

Тогда подставляя (22) или (23) в соответствующее уравнение неразрывности, получим уравнение для $s(x, t)$ в области $0 < x < H(t)$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(sQ(t) - g(\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{s^2(1 - s)^2}{K}) = 0. \quad (24)$$

Это уравнение рассматривается при начальном условии $s(x, 0) = s^0(x)$. Пусть $s(x, t)$ есть решение уравнения (24). Тогда скорости v_i находятся по формулам (22), (23), затем решается задача Коши (16) и из уравнения (20) определяется давление p (на свободной границе давление считается известным).

При условиях: $Q(t) = 1$, $K(s) = \alpha s(1 - s)$, $s^0 = x/h_0$ точное решение задачи (24), (23), (22), (16) имеет вид:

$$s(x, t) = \frac{x}{h_0 + \beta t}, \quad v_1(x, t) = \frac{\beta x}{2(h_0 + \beta t)},$$

$$v_2(x, t) = \frac{\beta(h_0 + \beta t + x)}{2(h_0 + \beta t)},$$

$$x_1(t) = \sqrt{h_0} \sqrt{h_0 + \beta t}, \quad x_2(t) = h_0 + \beta t,$$

$$\beta = \frac{2g(\rho_1^0 - \rho_2^0)}{\alpha}.$$

На рисунке 2 приведены графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, определяющие положение свободных границ фаз при условиях: $Q(t) = 1$, $K(s) = \alpha s(1 - s)$, $s^0 = x/h_0$, $\rho_1^0 = 1260$, $\rho_2^0 = 998$, $g = 9.807$. Физически очевиден тот факт, что тяжелая фаза должна опускаться, а легкая – подниматься. Действительно, при $\rho_1^0 > \rho_2^0$ график функции $x_1(t)$ лежит ниже графика функции $x_2(t)$.

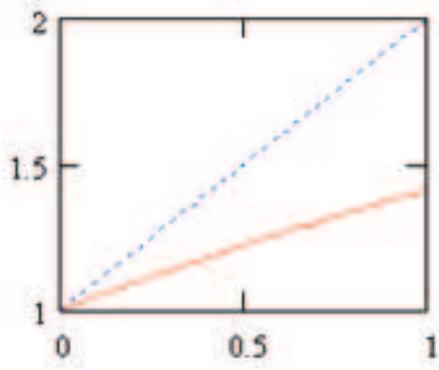


Рис. 2. Графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $Q(t) = 1$

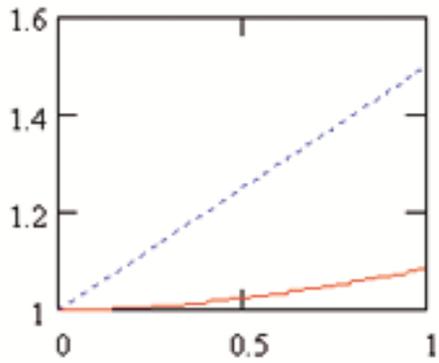


Рис. 3. Графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $Q(t) = 0$

На рисунке 3 приведены графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ при тех же условиях, что и на рисунке 2, но $Q(t) = 0$.

3. Квазистационарная задача (случай $p_1 \neq p_2$). В случае $p_2 - p_1 = p_c(s_1)$ уравнение (16) и условие при $x = 0$ остаются неизменными, а уравнения (17), (18) принимают следующий вид

$$0 < x < x_1(t) : \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_1 v_1) = 0,$$

$$s_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} = \varphi_1 - \rho_1^0 s_1 g,$$

$$0 < x < x_2(t) : \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(s_2 v_2) = 0,$$

$$s_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} = \varphi_2 - \rho_2^0 s_2 g,$$

$$\varphi_1 = K(v_2 - v_1) = -\varphi_2, \quad s_1 \equiv s, \quad s_2 \equiv (1 - s).$$

В области общего течения $0 < x < H(t) = \min(x_1(t), x_2(t))$ из уравнений неразрывности и импульса соответственно выводится

$$s v_1 + (1 - s) v_2 = Q(t), \quad (25)$$

$$(p_c)_x = \frac{\varphi_1}{s(1 - s)} - g(\rho_1^0 - \rho_2^0). \quad (26)$$

Из соотношений (25) и (26) имеем представления для скоростей

$$v_1 = Q(t) - \frac{s(1 - s)^2}{K} (g(\rho_1^0 - \rho_2^0) + (p_c)_x), \quad (27)$$

$$v_2 = Q(t) + \frac{s^2(1 - s)}{K} (g(\rho_1^0 - \rho_2^0) + (p_c)_x). \quad (28)$$

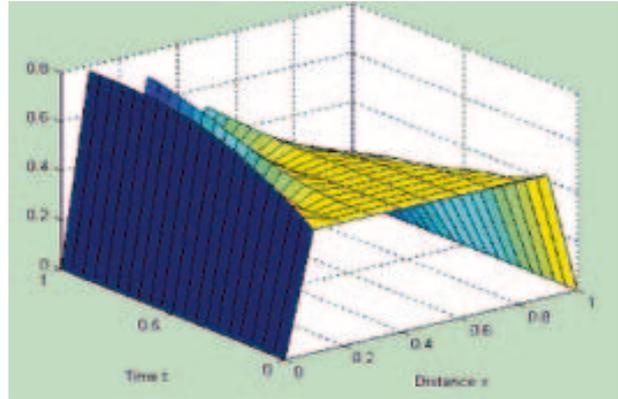


Рис. 4. Распределение $s(x, t)$ (пример 1)

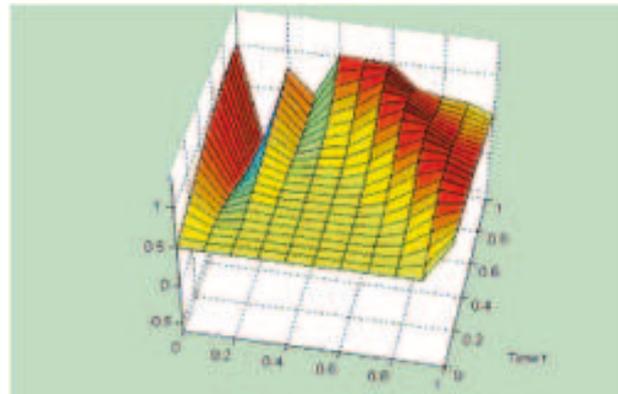


Рис. 5. Распределение $s(x, t)$ с ненулевыми граничными условиями

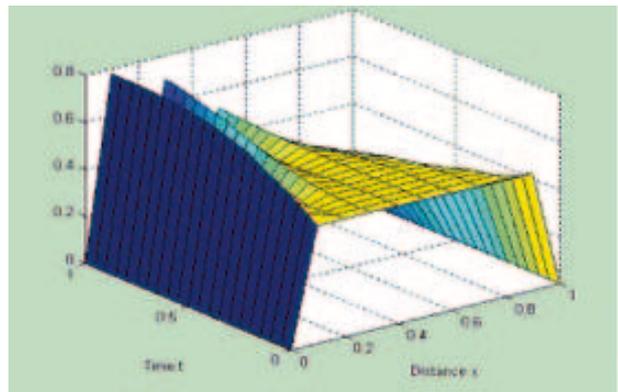


Рис. 6. Распределение $s(x, t)$ (пример 2)

Тогда подставляя (27) или (28) в соответствующее уравнение неразрывности, получим уравнение для $s(x, t)$ в области $0 < x < H(t)$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(s Q(t) - \frac{s^2(1 - s)^2}{K} \left(p_c' \frac{\partial s}{\partial x} + g(\rho_1^0 - \rho_2^0) \right) \right) = 0. \quad (29)$$

Для численной реализации уравнения (29) используется неявная схема. Уравнение представим в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(s) \frac{\partial s}{\partial x} + b(s) \right), \quad (30)$$

где

$$a(s) = \frac{p'_c s^2 (1-s)^2}{K},$$

$$b(s) = g(\rho_1^0 - \rho_2^0) \frac{s^2 (1-s)^2}{K} - sQ(t).$$

Численные расчеты уравнения (30) осуществлялись с использованием неявной конечно-разностной схемы [12].

Пример 1: $Q(t) = 1$, $K(s) = \alpha s(1-s)$, $p'_c = 1$. Область моделирования $T = 1$, $h_0 = 1$ разбивается сеткой по t и по x с числом узлов 10, и со следующими начальными и граничными условиями:

$$s(x, 0) = \frac{1}{2}, \quad s(0, t) = 0, \quad s(1, t) = 0.$$

На рисунке 4 приведен график распределения s с параметрами $\beta = 1$, $\alpha = 1000$. Здесь наблюдаются

численные осцилляции (в случае когда на границе $s = 1$, также наблюдаются численные осцилляции). Это объясняется тем, что при s_{xx} стоит относительно малый коэффициент $1/\alpha$.

На рисунке 5 приведен график распределения s при условиях:

$$Q(t) = 1, \quad K(s) = \alpha s(1-s), \quad p'_c = 1, \quad \beta = 1,$$

$$\alpha = 1000, \quad T = 1, \quad h_0 = 1,$$

$$s(0, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right),$$

$$s(1, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right).$$

Здесь, как и на рисунке 4 наблюдаются численные осцилляции функций приблизительно до $x = 0.4$.

Пример 2: $Q(t) = 0$, $K(s) = \alpha s(1-s)$, $p'_c = 1$, остальные параметры как и в первом примере.

На рисунке 6 концентрация s ведет себя относительно гладко и при нулевом расходе смеси остается постоянной во всей области течения.

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М., 1987. – Т. 1–2.
2. Файзуллаев Д.Ф., Умаров А.И., Шакиров А.А. Гидродинамика одно- и двухфазных сред и ее практическое приложение. – Ташкент, 1980.
3. Soo S.L. Development of Dynamics of Multiphase Flows // Int. J. Sci. Eng. – 1984. – V. 1.
4. Оран Э., Борис Д.Ж. Численное моделирование реагирующих потоков. – М., 1990.
5. Rajagopal K. L., Tao L. Mechanics of mixtures. – Word Scientific Publishing, 1995.
6. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по времени уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1999. – Вып. 114.
7. Папин А.А. Разрешимость «в малом» по начальным данным уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 2000. Вып. 116.
8. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009.
9. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М., 1979.
10. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М., 1988.
11. Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. – Алматы, 1996.
12. Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. – Алматы, 2001.