УДК 532.5

О достаточных условиях устойчивости конвективного дисперсного течения

Д.И. Попов, Р.М. Утемесов, А.Ю. Юдинцев, Г.Н. Трошкина, О.В. Махныткина

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Sufficient Conditions of Stability of Convective Dispersed Flows

D.I. Popov, R.M. Utemesov, A.Yu. Yudintsev, G.N. Troshkina, O.V. Mahnitkina

Altai State University (Barnaul, Russia)

Представлен анализ достаточных условий гидродинамической устойчивости конвективных дисперсных течений. Актуальность подобного рода исследований обусловлена необходимостью проанализировать влияние неоднородностей, добавок или осложняющих факторов на характеристики тепломассопереноса. В частности, широко распространены в природе и технических приложениях течения двухфазных систем. Установлены достаточные условия устойчивости дисперсного течения в аналитической форме. Приведено качественное теоретическое объяснение эффекта, проявляющегося в повышении порога устойчивости для определенных значений степени дисперсности примеси. Данный эффект наблюдался ранее другими авторами с помощью численного эксперимента. Установлена явная форма зависимости критического числа Грасгофа от величины степени дисперсности примеси. Достаточные условия сформулированы в виде вариационного неравенства, свойства которого также детально обсуждаются. Установлено, что зависимость характеристик устойчивости (число Грасгофа) имеет выраженный резонансный характер, а в резонансной области порог устойчивости может повышаться в несколько раз.

Ключевые слова: дисперсное течение, конвективное течение, число Грасгофа, достаточные условия устойчивости, гидродинамическая устойчивость.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-09

This paper is concerned with an analysis of sufficient conditions of hydrodynamic stability of convective disperse flows. The applicability of this kind of researches is raised with an obvious need to consider the influence of nonhomogeneous effects or flow complications on heat-mass transfer characteristics. In particular, flows of two-phase systems are common in nature and technical applications. The sufficient conditions of disperse flow stability are analytically defined. The qualitative theoretical explanation of an effect dealing with sufficient flow stabilization at certain values of dispersion degree is presented. This effect was observed earlier in numerical experiments. The analytical form of dependency of the critical Grashof number versus dispersion degree value is obtained. The sufficient conditions are formulated as a variational inequality, properties of which are thoroughly discussed. It is found that the form of dependency of stability characteristics (Grashof number) has regions corresponding to resonant behavior of fluctuation energy dissipation, and the sufficient stabilization is observed.

Key words: dispersed flow, convective flow, Grashof number, sufficient conditions of stability, hydrodynamic stability.

Введение. Концепция устойчивости общепризнанно играет ключевую роль при исследовании перехода от ламинарного движения жидкости к турбулентному [1, 2]. Например, в метеорологии и гидродинамике окружающей среды неустойчивости влияют на формирование погодных условий или эффективность процессов перемешивания. Поэтому ввиду широты диапазона применимости и согласованности предсказаний для многих процессов переноса в сплошных средах теория гидродинамической устойчивости будет по-прежнему занимать центральное место в исследованиях динамики жидкости и неотъемлемой частью многих научных приложений. Одной из основных задач устойчивости можно считать задачу определения границы устойчивости к малым возмущениям [1, 2], когда могут появляться вторичные режимы и запускается развитие ламинарно-турбулентного перехода. Традиционным подходом является исследование спектра линеаризованного оператора. Другой подход основан на анализе чувствительности динамической системы [2]. В обоих случаях качественные выводы можно получить, основываясь на соответствующей вариационной постановке задачи.

В работе [3] обсуждаются современные подходы и результаты для дисперсных течений. В частности, остается актуальным рассмотрение двухфазного движения на основе двухжидкостной (двухскоростной) модели. Исследование ламинарно-турбулентного перехода в двухфазных средах осложнено рядом обстоятельств, таких как наличие многих масштабов, характеризующих задачу, тепломассообмен на границе раздела фаз, влияние параметров примеси на коэффициенты переноса. В обзорной работе [4] обсуждается актуальное состояние исследований турбулентности многофазных дисперсных течений. Авторы среди перспективных направлений для фундаментальных исследований выделяют изучение механизмов модуляции турбулентности [5] частицами примеси. В работе [6] рассмотрена линейная устойчивость течения Куэтта для неоднородного распределения объемной концентрации примеси. Обнаружено, что течение может быть неустойчивым в широком диапазоне значений числе Рейнольдса. В работе [7] численно обнаружен выраженный резонансный характер зависимости параметров неустойчивости от степени дисперсности твердой примеси. В резонансной области достигается повышение устойчивости в 2–2,5 раза. Аналогичные эффекты наблюдались в случае изотермического дисперсного течения [8]. В работе [9] была предпринята попытка качественного разъяснения данного эффекта при анализе вариационной формулировки краевой задачи. Необходимо отметить результаты работы [10], в которой численно обнаружено неустойчивое стохастическое многообразие в областях метастабильности стационарного конвективного дисперсного течения.

1. Уравнения модели. В качестве основных уравнений неизотермического движения двух взаимопроникающих сред были положены уравнения, приведенные в работе [7]. Предполагается, что взаимодействие частиц с жидкостью описывается законом Стокса, а теплообмен — законом Фурье. Из уравнений малых возмущений, записанных в приближении Буссинеска-Обербека, следует спектральная задача вида

$$\lambda \boldsymbol{u} = -\mathrm{Gr}\cdot K(\boldsymbol{u}) - \nabla p + \nabla^2 \boldsymbol{u} + T\boldsymbol{\gamma} + \rho/\tau_v \cdot (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}),$$

$$\lambda \boldsymbol{v} = -\mathrm{Gr}\cdot K(\boldsymbol{v}) + \mathrm{Ga}\cdot\tau_v(\boldsymbol{\gamma}\nabla)\boldsymbol{v} - 1/\tau_v\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}),$$

$$\begin{aligned}\lambda T = -\mathrm{Gr}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla T_0 + \boldsymbol{U}\nabla T) + \\ +1/\mathrm{Pr}\cdot\nabla^2 T + \rho b/\tau_T\cdot(T_p - T),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lambda T_p = -\mathrm{Gr}\cdot(\boldsymbol{v}\nabla T_0 + \boldsymbol{U}\nabla T_p) + \\ +\mathrm{Ga}\cdot\tau_v(\boldsymbol{\gamma}\nabla)T_p - 1/\tau_T\cdot(T_p - T),\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0,\quad K(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\nabla\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = 0,$$

$$\boldsymbol{v}\big|_\Gamma = 0,\quad T\big|_\Gamma = 0,\quad T_p\big|_\Gamma = 0.$$

Система содержит следующие безразмерные параметры: числа Грасгофа Gr, Прандтля Pr, Галилея Ga (параметр, учитывающий оседание частиц); безразмерные вязкое и тепловое времена релаксации $\tau_v = 2/9(r/h)^2(\rho_p/\rho_f)$, $\tau_T = (b\mathrm{Pr}/3)(r/h)^2(\rho_p/\rho_f)$ (здесь ρ_p, ρ_f — плотности материала частиц и жидкости); ρ — относительная массовая концентрация частиц, b — отношение теплоемкостей, $S=(r/h)^2$ — степень дисперсности примеси. Равновесные поле температур T_0 и поле скоростей являются гладкими функциями. В частности, могут зависеть от одной переменной в случае параллельных течений.

2. Условия устойчивости. Здесь будем опираться на результаты работы [11]. Пусть Ω — ограниченная связная открытая область эвклидова пространства с регулярной границей Γ. Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)$ и $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega)$ множество всех финитных в Ω скалярных функций и вектор-функций. Пусть $\mathcal{V}(\Omega) = \{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega), \mathrm{div}\boldsymbol{u}=0\}$. Рассмотрим следующие функциональные пространства:

$V(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ в норме, соответствующей скалярному произведению

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}_{x_k}\cdot\boldsymbol{v}_{x_k}\,dx.$$

$H(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ в норме $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$, соответствующей скалярному произведению

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,d\Omega.$$

Тогда обобщенное решение задачи (1) определено для элементов вида

$$\begin{aligned}W = \{w = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},T,T_p) : \boldsymbol{u}\in V(\Omega)\cap\boldsymbol{H}^2(\Omega), \\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega), T, T_p\in H_0^1(\Omega)\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Нетрудно показать, что множество W, наделенное нормой

$$\|w\|_W^2 = \|\boldsymbol{u}\|_V^2 + \rho\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}_0^1}^2 + \|T\|_{H_0^1}^2 + \rho b\|T_p\|_{H_0^1}^2,$$

является полным гильбертовым пространством. Рассмотрим функциональное пространство $X(\Omega) = H(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ с нормой, заданной следующим образом:

$$\|w\|_X^2 = \|\boldsymbol{u}\|_H^2 + \rho\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L}^2}^2 + \|T\|_{L^2}^2 + \rho b\|T_p\|_{L^2}^2.$$

Очевидно, что множество функций (2) всюду плотно в $X(\Omega)$. Напомним, что числовой образ некоторого оператора A — это множество чисел $\xi=(Aw,w)$, $w_X=1$. Нас будет интересовать действительная часть числового образа оператора для уравнения (1), заданного на элементах (2). Из уравнений (1) несложно получить следующее отношение:

$$\begin{gathered}\xi_r \le -\|\boldsymbol{u}\|_V^2+\left(T\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{u}\right)_H- \\ -1/\mathrm{Pr}\cdot\|T\|_{H_0^1}^2-\rho/\tau_v\cdot\left(\|\boldsymbol{u}\|_H-\|\boldsymbol{v}\|_{L^2}\right)^2- \\ -\rho b/\tau_T\cdot\left(\|T\|_{L^2}-\|T_p\|_{L^2}\right)^2- \\ -\rho\tau_v\mathrm{Ga}\cdot\Phi_1(\boldsymbol{v},T_p)-\mathrm{Gr}\cdot\Phi(w,\boldsymbol{U},T_0),\end{gathered}\tag{3}$$

$$\Phi_1\left(\boldsymbol{v},T_p\right)=-\mathrm{Re}\left\{\left([\boldsymbol{\gamma}\nabla]\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right)+b\cdot\left([\boldsymbol{\gamma}\nabla]T_p,T_p\right)\right\},$$

$$\begin{gathered}\Phi\left(w,\boldsymbol{U},T_0\right)=\mathrm{Re}\left\{\left(K(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\right)_H+\rho\left(K(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\right)_{L^2}\right\}+ \\ +\left(\boldsymbol{U}\cdot\nabla T,T\right)+\rho b\left(\boldsymbol{U}\cdot\nabla T_p,T_p\right)+ \\ +\mathrm{Re}\left\{\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0,T\right)+\rho b\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla T_0,T_p\right)\right\},\end{gathered}$$

Здесь $\beta_T=\max\limits_{\Omega}\left|\nabla T_0\right|$. Используя обозначения $\tau_v=\mu_v S$, $\tau_T=\mu_T S$, отношение (3) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\xi\ \le -\Phi_0\left(\ ,T\right)-\rho/S\cdot\Phi\ \ _1\left(w\right)- \\ -\rho S\mu_v\mathrm{Ga}\cdot\Phi_1(\boldsymbol{v},T_p)-\mathrm{Gr}\cdot\Phi(w,\boldsymbol{U},T_0).\end{gathered}$$

Тогда достаточное условие устойчивости для $\forall w\in W$, $\|w_X\|=1$ можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{gathered}-\left[\Phi_0\left(\boldsymbol{u},T\right)+\rho/S\cdot\Phi_{-1}(w)+\right. \\ \left.+\rho S\mu_v\mathrm{Ga}\cdot\Phi_1(\boldsymbol{v},T_p)\right]\cdot\mathrm{Gr}^{-1}\le\Phi(w,\boldsymbol{U},T_0).\end{gathered}\tag{4}$$

Видно, что исходная задача сведена к исследованию свойств квадратичного функционала. Остается разрешить следующие вопросы: существование конечной точной нижней грани на множестве функций (2) и достигается ли эта нижняя граница на какой-либо функции из области определения оператора (1).

Функционал $\Phi(w,\boldsymbol{U},T_0)$ является ограниченным и непрерывным на функциях класса (2). Оценки слагаемых вида $\left(K(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\right)_H$ могут быть найдены в работах [9, 12]. Слагаемые

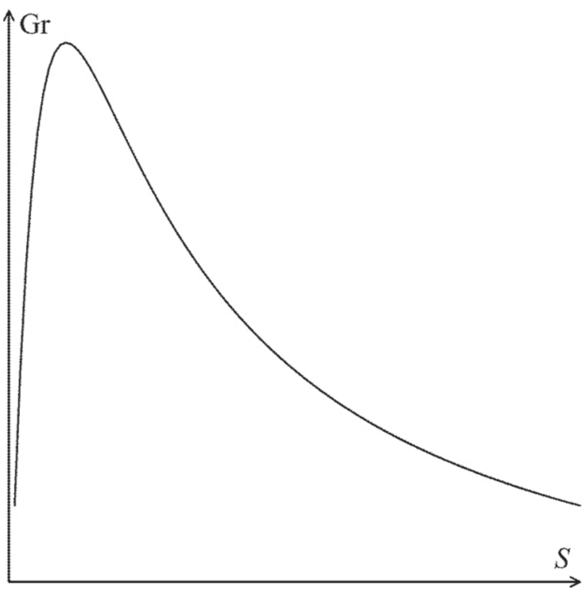
$$\left|\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0,T\right)\right| \text{ и } \left|\boldsymbol{v}\cdot\nabla T_0,T_p\right|$$

не превосходят величины

$$\beta_T/2\cdot\left[\|\boldsymbol{u}\|_H^2+\|T\|_{L^2}^2\right] \text{ и } \beta_T/2\cdot\left(\|\boldsymbol{v}\|_H^2+\|T_p\|_{L^2}^2\right),$$

соответственно. Таким образом, функционалы в (4) непрерывны относительно сходимости в W, что является простым следствием результатов, изложенных в работах [13, 14]. Операторы для задачи (1) являются непрерывными отображениями W в X. Отсюда, вследствие известной теоремы, существует единственная функция $w_0\in W$, на которой достигается точная нижняя граница функционала (4), т. е. существует последовательность элементов $w_k\in W$, которые минимизируют функционал $\Phi(w,\boldsymbol{U},T_0)$.

Заключение. На рисунке изображена зависимость числа Gr от величины степени дисперсности примеси S, вычисляемая с помощью отношения (4). Обращает на себя внимание выраженный резонансный характер зависимости. Результаты работ [7–9], в которых численно решалась задача на собственные значения, указывают на явную аналогию с классическим случаем резонанса в нелинейных колебаниях. С физической точки зрения отношением (4) описывается баланс энергии малого возмущения, достаточного для возникновения неустойчивости. Функционал правой части (4) соответствует энергии конвективного движения, а в левой — вязкой диссипации, трение и теплообмен на межфазной границе и эффекты, обусловленные конвективным теплообменом. При определенных параметрах примеси наблюдаются эффекты резонансной диссипации энергии возмущений за счет трения и теплообмена на межфазной границе.



Зависимость числа Gr от величины S

Библиографический список

1. Peter J. Schmid Nonmodal Stability Theory // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 39. DOI: 10.1146/annurev. fluid. 38.050304.092139

2. Luchini P., Bottaro A. Adjoint Equations in Stability Analysis // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 46. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010313–141253

3. Crowe C.C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M. Multiphase Flows with Droplets and Particles. CRC Press, Boca Raton, 2011. DOI: 10.1201/b11103

4. Balachandar S., John K. Eaton Turbulent Dispersed Multiphase Flow // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2010. — Vol. 42.

5. Saber A., Lundström T.S. and Hellström J.G.I. Turbulent Modulation in Particulate Flow: A Review of Critical Variables. — Engineering. — 2015. — Vol. 7.

6. Боронин С.А. Устойчивость плоского течения Куэтта дисперсной среды с конечной объемной долей частиц // Известия РАН. МЖГ. — 2011. — №1.

7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. — М., 1989.

8. Никитенко Н.Г., Сагалаков А.М., Попов Д.И. О достаточных условиях устойчивости течения Куэтта — Пуазейля монодисперсной смеси // Теплофизика и аэромеханика. — 2011. — №2.

9. Попов Д.И., Утемесов Р.М. Оценка правой границы спектра в задаче об устойчивости параллельного течения двухфазной жидкости // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — №1–2 (73).

10. Попов Д.И., Утемесов Р.М. Моделирование конвекции Бенара — Рэлея дисперсной смеси // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования : сб. науч. ст. Междунар. конф., Барнаул, 20–24 октября, 2015. — Барнаул, 2015.

11. Foias C., Manley O., Rosa R., Temam R. Navier — Stokes Equations and Turbulence. — Cambridge, 2004.

12. Попов Д.И., Сагалаков А.М. Спектр одной граничной задачи для модели двухскоростной жидкости // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2011. — №1–1 (69).

13. Гловински Р., Лионс Ж-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. — М., 1979.

14. Лионс Ж-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М., 1971.