УДК 512.54

Абсолютно замкнутые группы в квазимногообразиях абелевых групп

С.А. Шахова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Absolutely Closed Groups in Quasivarieties of Abelian Groups

S.A. Shakhova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Для произвольного квазимногообразия $\mathcal{M}$ групп, группы G из $\mathcal{M}$ и ее подгруппы H определим множество $dom_G^{\mathcal{M}}(H)$, называемое доминионом подгруппы H группы G в квазимногообразии $\mathcal{M}$, как множество всех элементов группы G, каждый из которых имеет одинаковые образы на любой паре гомоморфизмов группы G в произвольную группу $M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H. Группа $H \in \mathcal{M}$ называется абсолютно замкнутой в $\mathcal{M}$, если $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$ для любой группы $G \in \mathcal{M}$, содержащей H в качестве подгруппы. Изучаются абсолютно замкнутые группы в квазимногообразиях абелевых групп. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, $\xi(\mathcal{M})$ — множество простых чисел p, для каждого из которых найдется натуральное число $k = k(p)$ такое, что $Z_{p^{k-1}} \in \mathcal{M}$, $Z_{p^k} \notin \mathcal{M}$, где $Z_{p^{k-1}}, Z_{p^k}$ — циклические группы порядков $p^{(k-1)}$, p^k соответственно. Доказано, что группа $H \in M$ абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента y бесконечного порядка из редуцированной подгруппы H_r группы H и для любого числа $p \in \mathcal{M}$ выполнено: $y^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$.

Ключевые слова: квазимногообразие, абелева группа, доминион, абсолютно замкнутая группа.

For an arbitrary quasivariety $\mathcal{M}$ of groups, a group G in $\mathcal{M}$ and a subgroup H of G we introduce a set $dom_G^{\mathcal{M}}(H)$, which is referred to as the dominion of the subgroup H of the group G in the quasivariety $\mathcal{M}$. Similarly for the set of all elements of G, each of them has equal images under any pair of homomorphisms from G into an arbitrary group $M \in \mathcal{M}$ which coincide on H. A group $H \in \mathcal{M}$ is said to be absolutely closed in $\mathcal{M}$ if $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$ for every group $G \in \mathcal{M}$ containing H as a subgroup. In this paper, the absolutely closed groups in the quasivarieties of Abelian groups are studied. Let $\mathcal{M}$ be an arbitrary quasivariety of Abelian groups, $\xi(\mathcal{M})$ be a set of prime numbers p, for which of them there exists a natural number $k = k(p)$ that the following conditions are true: $Z_{p^{k-1}} \in \mathcal{M}$, and $Z_{p^k} \notin \mathcal{M}$, where $Z_{p^{k-1}}$, Z_{p^k} are cyclic groups of orders $p^{(k-1)}$, p^k respectively. It is proved that a group $H \in \mathcal{M}$ is absolutely closed in $\mathcal{M}$ if and only if the following is true: for any element y of infinite order, belonging to reduced subgroup H_r of the group H, and for any number $p \in \mathcal{M}$ the statement $y^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$ is true.

Key words: quasivariety, Abelian group, dominion, absolutely closed group.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-34

Введение. Для произвольного квазимногообразия $\mathcal{M}$ групп, группы G из $\mathcal{M}$ и ее подгруппы H определим, следуя [1, 2], множество $dom_G^{\mathcal{M}}(H)$, называемое доминионом подгруппы H группы G в квазимногообразии $\mathcal{M}$, следующим образом:

$$dom_G^{\mathcal{M}}(H) = \{g \in G \mid \forall M \in \mathcal{M} \ \forall \varphi, \psi : G \to M,$$

$$\text{если } \varphi\mid_H = \psi\mid_H, \text{ то } \varphi(g) = \psi(g)\},$$

где $\varphi, \psi : G \to M$ — гомоморфизмы группы G в группу M; $\varphi\mid_H$, $\psi\mid_H$ — сужение гомоморфизмов φ, ψ на подгруппу H; $\varphi(g)$, $\psi(g)$ — образы элемента g при гомоморфизмах φ, ψ.

Существует тесная связь понятия доминиона со свободными произведениями и амальгамами [2, 3], а именно: $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = G^\lambda \cap G^\rho$, где $\lambda, \rho : G \to G *_H^{\mathcal{M}} G$ — естественные вложения группы G в свободное в квазимногообразии $\mathcal{M}$ произведение изоморфных копий группы G с объединенной подгруппой H.

Строение доминионов групп изучалось в различных классах групп: абелевых [4–6], нильпотентных [7–9], метабелевых [10, 11].

Группа $H \in \mathcal{M}$ называется абсолютно замкнутой в $\mathcal{M}$, если $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$ для любой группы G из $\mathcal{M}$, содержащей H в качестве подгруппы.

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел. Группа G называется полной, если для любых $g \in G$ и $n \in \mathbf{N}$ уравнение $x^n = g$ имеет в G хотя бы одно решение.

В [7] доказано, что полные группы, и только они, абсолютно замкнуты в квазимногообразии 2-ступенно нильпотентных групп без кручения. Абсолютная замкнутость абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп изучалась в [11]. В данной работе найдено необходимое и достаточное условие абсолютной замкнутости группы в произвольном квазимногообразии абелевых групп.

Группа, не содержащая ненулевых полных подгрупп, называется редуцированной. Как следует из [12], произвольная абелева группа разлагается в прямое произведение полной и редуцированной подгрупп.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, $\xi(\mathcal{M})$ — множество всех простых чисел p, для каждого из которых найдется число $k = k(p) \in \mathbf{N}$ такое, что $Z_{p^{k-1}} \in \mathcal{M}$, $Z_{p^k} \notin \mathcal{M}$, где $Z_{p^{k-1}}$, Z_{p^k} — циклические группы порядков p^{k-1}, p^k соответственно. В работе доказано, что группа $H \in \mathcal{M}$ абсолютно замкнута в квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента y бесконечного порядка из редуцированной подгруппы H_r группы H и для любого числа $p \in \xi(\mathcal{M})$ выполнено: $y^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$.

Из данного признака абсолютной замкнутости абелевой группы, в частности, вытекает, что периодическая абелева группа абсолютно замкнута в любом содержащем ее квазимногообразии абелевых групп. Кроме того, из данного признака следует, что конечно порожденная абелева группа абсолютно замкнута в произвольном квазимногообразии $\mathcal{M}$ абелевых групп, отличном от класса $\mathcal{A}$ всех абелевых групп, тогда и только тогда, когда она конечна.

Используемые в работе обозначения и сведения из теории групп можно найти в [12], а из теории квазимногообразий групп — в [13–15].

1. Предварительные замечания. Приведем список обозначений, применяемых в работе.

$H \leq G$ — H является подгруппой группы G.

$H \lhd G$ — H является нормальной подгруппой группы G.

G/H — фактор-группа группы G по нормальной подгруппе H.

$gr(H)$ — подгруппа группы G, порожденная элементами множества H. Если H состоит из одного элемента a, то вместо $gr(a)$ пишут просто (a).

$\mid g \mid$ — порядок элемента g.

$\tau(G) = \{g \in G \mid \ \mid g \mid \neq \infty\}$ — периодическая часть абелевой группы G. Очевидно, $\tau(G) \leq G$.

$G^n = gr(g^n \mid g \in G)$.

(n, r) — наибольший общий делитель чисел $n, r \in \mathbf{N}$.

В работе используются следующие определения и теоретические факты.

Теорема 1 [4]. *Доминион подгруппы H группы G в произвольном квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$ совпадает с наименьшей нормальной подгруппой группы G, содержащей H, фактор-группа по которой из $\mathcal{M}$.*

Из этой теоремы вытекает, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие абелевых групп, $G \in \mathcal{M}$, $H \leq G$, то $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$ в том, и только в том случае, когда $G/H \in \mathcal{M}$. Таким образом, произвольная абелева группа абсолютно замкнута в классе $\mathcal{A}$ всех абелевых групп.

Лемма 1 [7]. *Пусть $G \in \mathcal{M}$, $H \leq G$, H — полная группа, $H \cap G' = (1)$, где G' — коммутант группы G. Тогда $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$.*

Из леммы 1 [7] сразу же получаем, что любая полная абелева группа абсолютно замкнута в произвольном квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$.

Лемма 2 [7]. *Если $G \in \mathcal{M}$, $K \leq H \leq G$, $K \lhd G$, $G/K \in \mathcal{M}$, $dom_{G/K}^{\mathcal{M}}(H/K) = H/K$, то $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$.*

Далее потребуется описание квазимногообразий абелевых групп, данное в [16]. Согласно [16], два квазимногообразия абелевых групп совпадают тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые пересечения с множеством групп $\mathcal{Q}$, состоящим из бесконечной циклической группы Z, единичной группы $E = \{e\}$ и циклических p-групп Z_{p^n}, где p пробегает множество всех простых чисел $\mathbf{P}$, а n пробегает множество $\mathbf{N}$.

Из [16] вытекает, что произвольное квазимногообразие $\mathcal{M}$ абелевых групп порождается некоторым множеством групп $S \subseteq \mathcal{Q}$. Будем обозначать этот факт записью $\mathcal{M} = q(S)$ либо $\mathcal{M} = qS$, если S состоит из одной группы. Циклическая p-группа принадлежит квазимногообразию $q(S)$ в том и только в том случае, когда она изоморфна подходящей подгруппе некоторой группы из S.

Отметим также, что если группа Z не принадлежит квазимногообразию $\mathcal{M} = q(S)$, то множество S состоит из конечного числа неизоморфных циклических p-групп, а квазимногообразие $\mathcal{M}$ является многообразием. В этом случае для произвольной группы $G \in \mathcal{M}$ и $H \leq G$ выполнено $G/H \in \mathcal{M}$. По теореме 1 [4] это означает, что $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$. Следовательно, любая группа из произвольного многообразия $\mathcal{M}$ абелевых групп абсолютно замкнута в нем.

Принимая во внимание замечания, сделанные выше, необходимо рассмотреть вопрос об абсолютной замкнутости групп в квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$, когда $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$ и $Z \in \mathcal{M}$.

2. Основной результат. Прежде всего заметим, что если $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$ и $Z \in \mathcal{M}$, то Z не является абсолютно замкнутой в $\mathcal{M}$. Действительно, поскольку $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$, то найдутся $p \in \mathbf{P}$ и $k \in \mathbf{N}$ такие, что $Z_{p^k} \notin \mathcal{M}$. Обозначим $G = Z = (a)$, $H = (a^{p^k})$. Ясно, что $H \cong G$. Рассмотрим произвольные гомоморфизмы $\varphi, \psi : G \to M$ группы G в произвольную группу $M \in \mathcal{M}$ такие, что $\varphi\mid_H = \psi\mid_H$. Тогда $\varphi(a^{p^k}) = \psi(a^{p^k})$. Перепишем данное равенство в виде $(\varphi(a)\psi(a)^{-1})^{p^k} = 1$. Поскольку $Z_{p^k} \notin \mathcal{M}$, то $(\varphi(a)\psi(a)^{-1})^{p^{k-1}} = 1$, $\varphi(a^{p^{k-1}}) = \psi(a^{p^{k-1}})$. По определению доминиона получаем, что $a^{p^{k-1}} \in dom_G^{\mathcal{M}}(H)$, $dom_G^{\mathcal{M}}(H) \neq H$.

Лемма 3. *Полные абелевы группы, и только они, абсолютно замкнуты в $\mathcal{M} = qZ$.*

Доказательство. Предположим, что группа H абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Согласно теореме 9.1.3 [12] произвольная абелева группа изоморфна подгруппе некоторой полной абелевой группы G. По теореме 9.1.6 [12] можно считать, что G есть прямое произведение подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, и $G \in \mathcal{M}$.

Если H не является полной, то для некоторого $n \in \mathbf{N}$ найдется уравнение $x^n = h \in H$, не имеющее решений в H. Пусть $g \in G$ — корень этого уравнения. Рассмотрим произвольные гомоморфизмы $\varphi, \psi : G \to M$ группы G в произвольную группу $M \in \mathcal{M}$ такие, что $\varphi\mid_H = \psi\mid_H$. Тогда $\varphi(h) = \psi(h)$, $\varphi(g^n) = \psi(g^n)$. Перепишем данное равенство в виде $(\varphi(g)\psi(g)^{-1})^n = 1$. Поскольку G — группа без кручения, то $\varphi(g) = \psi(g)$. Значит, $g \in dom_G^{\mathcal{M}}(H)$ и $dom_G^{\mathcal{M}}(H) \neq H$. Это противоречит абсолютной замкнутости H. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, $G \in \mathcal{M}$, $H \leq \tau(G)$. Тогда $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$. В частности, любая периодическая группа $H \in \mathcal{M}$ является абсолютно замкнутой в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}$, $H \leq \tau(G)$. Покажем, что $G/H \in \mathcal{M}$. Достаточно убедиться в том, что каждая конечно порожденная подгруппа группы G/H принадлежит $\mathcal{M}$. Как следует из теоремы 8.1.2 [12], произвольная конечно порожденная абелева группа разлагается в прямое произведение циклических p-групп и бесконечных циклических групп.

Пусть $\overline{g} \in G/H$ — произвольный элемент, и $(\overline{g}) \cong Z_{p^m}$ для некоторых $m \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{P}$. Докажем, что $Z_{p^m} \in \mathcal{M}$. Так как $g^{p^m} \in H \leq \tau(G)$, то g — элемент конечного порядка n. Обозначим $d = (n, p^m)$. Хорошо известно, что существуют целые числа u, v такие, что выполнено равенство $nu + p^m v = d$. Отсюда получаем, что $g^d = g^{nu} g^{p^m v} \in H$, p^m делит d, $d = p^m$. Значит, p^m делит n, и $Z_{p^m} \in \mathcal{M}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если группа H абсолютно замкнута в квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$ и подгруппа A выделяется в группе H прямым сомножителем, то A абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть теперь H абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Предположим, что A не является абсолютно замкнутой в $\mathcal{M}$. Тогда найдется группа $G \in \mathcal{M}$, содержащая A в качестве подгруппы, причем $G/A \notin \mathcal{M}$. Поскольку $H = A \times B \leq G \times B$, и $G \times B/H \cong G \times B/A \times B \cong G/A \notin \mathcal{M}$, то получаем противоречие тому, что H абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Группа H абсолютно замкнута в произвольном квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда ее редуцированная подгруппа абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть H_d — полная, H_r — редуцированная подгруппы группы H такие, что $H = H_d \times H_r$. Если группа H абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$, то по лемме 5 H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$.

Предположим теперь, что H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Пусть G — произвольная группа, $G \in \mathcal{M}$, $H \leq G$. По теореме 9.1.4 [12] полная подгруппа абелевой группы выделяется в ней прямым сомножителем. Значит, $G = H_d \times \widetilde{G}$. Отсюда имеем изоморфизмы $H/H_d \cong H_r$, $G/H_d \cong \widetilde{G}$. Следовательно, $G/H_d \in \mathcal{M}$. По условию H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Значит, $dom_{G/H_d}^{\mathcal{M}}(H/H_d) = H/H_d$. По лемме 2 $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что при $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ множество $\xi(\mathcal{M}) = \{p \in \mathbf{P} \mid \exists k = k(p) : Z_{p^{k-1}} \in \mathcal{M}, Z_{p^k} \notin \mathcal{M}\}$ пусто. Если же $\mathcal{M} = qZ$, то $\xi(\mathcal{M}) = \mathbf{P}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп. Группа $H \in \mathcal{M}$ абсолютно замкнута в квазимногообразии $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента y бесконечного порядка из ее редуцированной подгруппы H_r и для любого $p \in \xi(\mathcal{M})$ выполнено: $y^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$, где $k = k(p)$.*

Доказательство. Если $\mathcal{M} = qZ$, и H абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$, то по лемме 3 H — полная группа. Тогда $H_r = (1)$, и теорема верна. Предположим теперь, что для любого элемента y бесконечного порядка из ее редуцированной подгруппы H_r и для любого $p \in \xi(\mathcal{M})$ выполнено: $y^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$, где $k = k(p)$. Если $H_r \neq (1)$, то она является неединичной полной подгруппой, так как $\xi(\mathcal{M}) = \mathbf{P}$. Это противоречит определению H_r. Следовательно, $H = H_d$.

Можно считать, что $\mathcal{M} \neq qZ$, $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$, $Z \in \mathcal{M}$. По лемме 6 группа H абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда ее редуцированная подгруппа абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Если H_r — периодическая группа, то по лемме 4 H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Предположим, что для любого элемента y бесконечного порядка из H_r и для любого числа $p \in \xi(\mathcal{M})$ выполнено: $y^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$. Докажем, что H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$.

Для этого достаточно показать, что для любой группы $G \in \mathcal{M}$, содержащей H_r в качестве подгруппы, выполнено $G/H_r \in \mathcal{M}$. Проведем рассуждения, как в лемме 4. Рассмотрим произвольный элемент $\overline{g} \in G/H_r$. Если $(\overline{g}) \cong Z$, то $(\overline{g}) \in \mathcal{M}$.

Пусть $(\overline{g}) \cong Z_{p^m}$ для некоторого простого числа p. Докажем, что $Z_{p^m} \in \mathcal{M}$. Если $p \notin \xi(\mathcal{M})$, то $Z_{p^m} \in \mathcal{M}$. Предположим, что $p \in \xi(\mathcal{M})$. Докажем, что тогда $m \leq k-1$, т.е. $Z_{p^m} \in \in \mathcal{M}$. В случае, когда g — элемент конечного порядка, получаем требуемое, рассуждая, как в лемме 4. Пусть теперь g — элемент бесконечного порядка. Имеем: $g^{p^m} \in H_r$. По условию теоремы $(g^{p^m})^{p^{k-1}} = h_1^{p^k}$ для некоторого элемента $h_1 \in H_r$. Тогда имеем равенство $(g^{p^{m-1}})^{p^k} = h_1^{p^k}$, и $(g^{p^{m-1}}h_1^{-1})^{p^k} = 1$. В силу того, что $Z_{p^k} \notin \mathcal{M}$, получаем $(g^{p^{m-1}}h_1^{-1})^{p^{k-1}} = 1$, $(g^{p^{m-1}})^{p^{k-1}} = h_1^{p^{k-1}}$. Снова применяем условие теоремы, по которому найдется элемент $h_2 \in H_r$ такой, что $h_1^{p^{k-1}} = h_2^{p^k}$, и $(g^{p^{m-1}})^{p^{k-1}} = h_2^{p^k}$. Отсюда $(g^{p^{m-2}})^{p^k} = h_2^{p^k}$, и, как на предыдущем шаге, получаем $(g^{p^{m-2}})^{p^{k-1}} = h_2^{p^{k-1}}$. Продолжая процесс, на m-ом шаге будем иметь равенство $g^{p^{k-1}} = h_m^{p^{k-1}}$ для некоторого элемента $h_m \in H_r$. Значит, $(\overline{g}) \cong Z_{p^m}$, где $m \leq k-1$, т.е. $Z_{p^m} \in \mathcal{M}$. Таким образом, H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть теперь H_r абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Предположим, что существуют элемент $y \in H_r$ бесконечного порядка и простое число $p \in \xi(\mathcal{M})$ такие, что $y^{p^{k-1}} \notin H_r^{p^k}$.

Обозначим через H_p совокупность всех элементов подгруппы H_r, порядки которых есть степени числа p. Легко видеть, что $H_p \leq H_r$, H_p сервантна в H_r и имеет конечный период. По теореме 10.1.12 [12] H_p выделяется в H_r прямым сомножителем: $H_r = H_p \times \widetilde{H}$.

По лемме 5 $\widetilde{H}$ абсолютно замкнута в $\mathcal{M}$. Тогда $y = g\widetilde{y}$, где $g \in H_p$, $\widetilde{y} \in \widetilde{H}$. Имеем равенства $y^{p^{k-1}} = \widetilde{y}^{p^{k-1}}$, $H_r^{p^k} = \widetilde{H}^{p^k}$. По предположению $\widetilde{y}^{p^{k-1}} \notin \widetilde{H}^{p^k}$. Ясно, что отображение $\phi : \widetilde{H} \to \widetilde{H}^{p^k}$, при котором $\phi(h) = h^{p^k}$ для любого элемента $h \in \widetilde{H}$, является изоморфизмом. Так как $\widetilde{y}^{p^{k-1}} \notin \widetilde{H}^{p^k}$, то $\widetilde{H}/\widetilde{H}^{p^k} \notin \mathcal{M}$. Это противоречит абсолютной замкнутости $\widetilde{H}$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору А.И. Будкину за ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Isbell J.R. Epimorphisms and Dominions // Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. — New York 1966.

2. Budkin A. Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras // Studia Logica. — 2004. — T. 78, № 1–2.

3. Higgins P.M. Epimorphisms and Amalgams // Colloq. Math. — 1988. — T. 56.

4. Шахова С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 2.

5. Шахова С.А. Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, № 4.

6. Шахова С.А. О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2011. — Т. 69, № 1.

7. Шахова С.А. Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения // Математические заметки. — 2015. — Т. 97, № 6.

8. Magidin A. Dominions in Varieties of Nilpotent Groups // Comm. Algebra. — 2000. — T. 28, № 3.

9. Magidin A. Absolutely Closed Nil-2 Groups // Algebra Univers. — 1999. — T. 42, № 1-2.

10. Будкин А.И. О замкнутости локально циклической подгруппы в метабелевой группе // Сиб. матем. журнал. — 2014. — Т. 55, № 6.

11. Будкин А.И. Об абсолютной замкнутости абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53, № 1.

12. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М., 1977.

13. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М., 1970.

14. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. — Барнаул, 2002.

15. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий групп. — Новосибирск, 1999.

16. Виноградов А.А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. — 1965. — Т. 4, № 6.