УДК 519.8:53

Однозначная разрешимость задачи об упругих колебаниях ледового покрова в канале*

А.А. Папин, К.А. Шишмарев

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

One-Valued Solvability of a Problem of Elastic Vibrations of Ice in a Channel

A.A. Papin, K.A. Shishmarev

Altai State University (Barnaul, Russia)

Рассматривается начально-краевая задача об упругих колебаниях ледового покрова в канале, вызванных движением внешней нагрузки. В основе математической модели лежит связанная система дифференциальных уравнений, описывающая колебания ледового покрова и движение жидкости в канале. Ледовый покров моделируется уравнением тонкой упругой пластины. Функция прогиба ледовой пластины удовлетворяет условиям жесткого закрепления на стенках канала. Жидкость невязкая и несжимаемая. Потенциал течения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа, условиям непротекания на стенках и дне канала и линеаризованным динамическому и кинематическому условиям на границе лед — жидкость. Принципиальным моментом является вопрос существования и единственности решения для рассматриваемой связанной системы уравнений. Исследования в данной работе посвящены проблемам разрешимости совместных уравнений динамики упругой пластины и жидкости. В пункте 1 приведена схема решения задачи и доказательства существования классического решения. Исходная задача с помощью преобразования Фурье сводится к задаче относительно профиля колебаний поперек канала, которая решается методом нормальных мод. В результате возникает система линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения прогиба льда на нормальные моды. В пункте 2 доказана единственность классического решения рассмотренной начально-краевой задачи.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, идеальная жидкость, упругие колебания, ледовый покров, внешняя нагрузка, граничные задачи, разрешимость.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-28

An initial boundary value problem of elastic vibrations of ice in a channel caused by an external load motion is considered. The mathematical model is based on a system of differential equations that describes the oscillations of the ice cover and motion of liquids in the channel. The ice cover is modeled by an equation of a thin elastic plate. The function of the ice plate deflection satisfies fixed conditions on walls of the channel. The liquid is inviscid and incompressible. The fluid flow potential satisfies the Laplace equation, conditions of impermeability on the walls and channel bottom, and linearized dynamic and kinematic conditions on the ice-liquid interface. One of the fundamental points of the problem is the existence and uniqueness of solutions for the taken coupled system of equations. The paper investigates the problems of the solvability for the coupled dynamic equations for the fluid and the elastic plate. Algorithm for solving the problem and proving the existence of classical solutions is presented in paragraph 1. The initial problem is reduced by applying the Fourier transformation to the problem of oscillation profile across the channel which is solved by the normal mode method. The result is a system of linear differential equations for normal decomposition coefficients of ice deflection in normal modes. The classical solution uniqueness of the considered initial boundary value problem is proved in paragraph 2.

Key words: Euler equations, ideal incompressible fluid, elastic oscillations, ice sheet, external load, boundary value problems, solvability.

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства № 2014/2.

Введение. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\Delta\varphi(x,y,z,t) = 0, \quad (x,y,z,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w + M w_{tt} = \\ = P(x,y,t) - \rho_l \varphi_t(x,y,0,t) - \\ -\rho_l g w(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Pi_T, \end{aligned} \tag{2}$$

решаемую в областях $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Pi_T = \Pi \times \times (0,T)$, $\Omega = \{-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < < z < 0\}$, $\Pi = \{-\infty < x < \infty, -L < y < L\}$ при смешанных граничных условиях

$$\varphi_y = 0, \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0, \quad (z = -H),$$

$$\varphi(x,y,0,t) = w(x,y,t), \quad w = w_y = 0, \quad (y = \pm L),$$

$$w(x,y,0) = w^1(x,y), \quad w_t(x,y,0) = w^2(x,y),$$

$$w \to 0, \quad w_x \to 0, \quad \varphi \to 0, \quad (|x| \to \infty). \tag{3}$$

Данная начально-краевая задача описывает колебания ледового покрова, «примороженного» к стенкам бесконечного канала [1, 2]. Здесь (x,y,z,t) — эйлеровы координаты; $\varphi(x,y,z,t)$, $w(x,y,t)$ — соответственно потенциал скорости течения идеальной жидкости и прогиб ледового покрова; $P(x,y,t)$ — внешняя нагрузка (заданная функция своих аргументов); постоянные $D > 0$, $M > 0$, $\rho_l > 0$, $g > 0$ — соответственно изгибная жесткость, масса льда на единицу площади, плотность жидкости, ускорение силы тяжести; $\nabla^4 = \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}$. Искомыми являются функциями $\varphi(x,y,z,t)$, $w(x,y,t)$.

В данной работе под решением задачи (1)–(3) понимается решение в классическом смысле в виде пары функций (φ, w), удовлетворяющих уравнениям (1)–(2) в областях Ω_T и Π_T соответственно. Рассматриваемая задача была исследована численно в случае примороженного ледового покрова к двум стенкам [2, 3], к одной стенке [4] и в случае незакрепленного ледового покрова в канале [5]. Обзор близких задач для вязкоупругой пластины приведен в [6]. Колебания вязкоупругих пластин исследованы численно в работах [7–9]. Условия разрешимости различных начально-краевых задач для классических уравнений упругих тонких пластин рассмотрены в работах [10–12]. В [13] рассмотрены вопросы однозначной разрешимости для уравнений Эйлера идеальной жидкости. Задачи совместного движения льда и жидкости рассмотрены в [14, 15].

Теорема 1 *Решение в классическом смысле задачи* (1)–(3) *единственно.*

1. Разрешимость. Рассмотрим начально-краевую задачу (1)–(3). Решение этой системы строится с помощью преобразования Фурье по координате x. Уравнения (1) и (2) представим в следующем виде:

$$\varphi^F_{yy} + \varphi^F_{zz} = \xi^2 \varphi^F, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} L_1(w,\varphi) = M w^F_{tt} + D(w^F_{yyyy} - 2\xi^2 w^F_{yy} + \\ + \xi^4 w^F) + \rho_l g w^F - \rho_l \varphi^F_t + \\ + P^F(\xi,y,t) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$w^F(\xi,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x,y,t) e^{-i\xi x} dx,$$

$$\varphi^F(\xi,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y,z,t) e^{-i\xi x} dx.$$

Начально-краевые условия восстанавливаются из уравнений (3) с помощью преобразования Фурье. Решение (w^F, φ^F) системы (4)–(5) построим как предел приближенных решений $(w^{F,N}, \varphi^{F,N})$, которые представляются в виде следующих конечных сумм:

$$w^{F,N}(\xi,y,t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(\xi,t)\psi_j(y), \tag{6}$$

$$\varphi^{F,N}(\xi,y,z,t) = \sum_{j=1}^{N} a_{j,t}(\xi,t)\phi_j(y,z,\xi). \tag{7}$$

Для определения коэффициентов разложений a_m предполагается, что тождество (5) выполняется приближенно:

$$\int\limits_{-L}^{L} L_1(w^{F,N}, \varphi^{F,N})\psi_j(y) dy = 0, \quad j = 1,...,N. \tag{8}$$

Функции $\psi_j(y)$ являются решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi_j^{IV} = \lambda_j^4 \psi_j \ (-L < y < L), \\ \psi_j = \psi_j' = 0 \ (y = \pm L). \end{aligned} \tag{9}$$

Решение уравнения (9) раскладывается на четные и нечетные ортонормальные функции. В данной статье ограничимся рассмотрением четных функций:

$$\psi_j(y) = A_j \Big(\cos\lambda_j y - B_j \cosh\lambda_j y \Big),$$

$$B_j = \frac{\cos\lambda_j}{\cosh\lambda_j}, \quad A_j^2(1 + B_j^2) = 1,$$

где λ_j — решения трансцендентного уравнения $\tan\lambda_j = -\tanh\lambda_j$, которые могут быть представлены в виде $\lambda_j = \pi j - \pi/4 + \Delta_j$, где $\Delta_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Функции $\phi_j(y,z,\xi)$ являются решением следующей граничной задачи:

$$\phi_{j,yy} + \phi_{j,zz} = \xi^2\phi_j,$$

$$(-L < y < L,\ -H < z < 0),$$

$$\phi_{j,y} = 0, \quad (y = \pm L), \quad \phi_{j,z} = 0, \quad (z = -H),$$

$$\phi_{j,z} = \psi_j(y), \quad (z = 0).$$

С учетом (6)–(7) и (9) вычислим интеграл в (8):

$$Ma_{m,tt} + D\Big(\lambda_m^4 a_m - 2\xi^2\sum_{j=1}^{N} C_{mj}a_j + \xi^4 a_m\Big) +$$

$$+\rho_l g a_m = \rho_l \sum_{j=1}^{N} A_{mj}a_{j,t} - P_m(\xi,t), \qquad (10)$$

где $a_{m,tt} = da_m^2/dt^2$ и $a_{m,t} = da_m/dt$. Коэффициенты C_{mj}, A_{mj}, P_m вычисляются по формулам

$$C_{mj} = -\int_{-L}^{L} \psi_m'(y)\psi_j'(y)dy,$$

$$A_{mj}(\xi) = \int_{-L}^{L} \phi_j(\xi,y,0)\psi_m(y)dy,$$

$$P_m(\xi,t) = \int_{-L}^{L} P^F(\xi,y,t)\psi_m(y)dy.$$

Система уравнений (10) состоит из N дифференциальных уравнений второго порядка для определения a_m с соответствующими начальными условиями:

$$a_m(\xi,0) = \int_{-L}^{L} w^{1,F}(\xi,y)\psi_m(y)dy, \quad m = 1,...,N,$$

$$a_{m,t}(\xi,0) = \int_{-L}^{L} w^{2,F}(\xi,y)\psi_m(y)dy, \quad m = 1,...,N.$$

Система (10) может быть записана в матричной форме:

$$M\vec{a}_{tt} - \rho_l\mathbf{A}(\xi)\,\vec{a}_t + D\mathbf{Q}(\xi)\,\vec{a} = -\vec{P}(\xi,t), \qquad (11)$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, ...)^T$, $\mathbf{A} = \{A_{mj}\}_{m,j=1}^N$, $\vec{P} = (P_1, P_2, ...)^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{D} - 2\xi^2\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ — диагональная матрица с коэффициентами $\{\lambda_1^4 + \xi^4 + \rho_l g, ..., \lambda_N^4 + \xi^4 + \rho_l g\}$, $\mathbf{C} = \{C_{mj}\}_{m,j=1}^N$.

Введем вектор $\vec{b} = \vec{a}_t$, с учетом этого уравнение (11) сведется к системе

$$\begin{cases} \vec{a}_t(\xi,t) = \vec{b}, \\ \vec{b}_t(\xi,t) = \frac{1}{M}\,\big(\,\rho_l\mathbf{A}(\xi)\,\vec{b} + D\mathbf{Q}(\xi)\,\vec{a} - \vec{P}(\xi,t)\,\big). \end{cases} \qquad (12)$$

Система (12) состоит из $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью, зависящей от t при фиксированном параметре ξ. Для определения однородного решения системы (12) необходимо существование $2N$ собственных чисел μ_n следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} -\Lambda^1 & \mathbf{I} \\ \frac{D}{M}\mathbf{Q}(\xi) & \frac{\rho_l}{M}\mathbf{A} - \Lambda^2 \end{pmatrix},$$

где Λ^1 и Λ^2 — диагональные матрицы с коэффициентами $(\mu_1, ..., \mu_N)$ и $(\mu_{N+1}, ..., \mu_{2N})$ соответственно. Решение системы с правой частью определяется методом вариации постоянной для заданной внешней нагрузки $P(x,y,t)$ [16].

Функции $w^N(x,y,t)$ определяется через обратное преобразование Фурье

$$w^N(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} w^{F,N}(\xi,y,t)e^{i\xi x}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} a_j(\xi,t)\psi_j(y)e^{i\xi x}d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{N}\psi_j(y)\int_0^{\infty} a_j(\xi,t)\cos(x\xi)d\xi.$$

Дальнейшее доказательство разрешимости заключается в осуществлении предельного перехода в уравнении (8) и доказательстве того, что предельные функции w^F и w последовательностей функций $w^{F,N}$ и w^N являются, соответственно, решением уравнений (5) и (2).

2. Единственность. Пусть существует два отличных от нуля решения w_1, φ_1 и w_2, φ_2 системы (1)–(3). Функции $w = w_1 - w_2$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ удовлетворяют следующей задаче:

$$D\nabla^4 w + Mw_{tt} = -\rho_l\varphi_t - \rho_l g w, \ \ (x,y,t) \in \Pi_T, \quad (13)$$

$$\Delta\varphi(x,y,z,t) = 0, \quad (x,y,z,t) \in \Omega_T, \qquad (14)$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0, \quad (z = -H),$$

$$\varphi_z = w_t, \quad (z = 0), \qquad (15)$$

$$w = 0, \quad w_y = 0, \quad (y = \pm L), \qquad (16)$$

$$\varphi(x,y,z,t), \quad w(x,y,t),$$

$$w_x(x,y,t) \to 0, \quad (|x| \to \infty). \qquad (17)$$

$$w(x,y,0) = 0, \quad w_t(x,y,0) = 0. \qquad (18)$$

Докажем, что решением задачи (13)–(18) является $w = 0$ и $\varphi = 0$.

Сначала заметим, что решение (φ, w) задачи (13)–(18) обладает следующими свойствами:

$$\int\limits_{\Pi} w(x,y,t)\, d\Pi = 0 \qquad t \in [0,T], \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,t)|^2\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi(x,y,0,t) w_t(x,y,t)\, d\Pi, \tag{20}$$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,0)|^2\, d\Omega = 0, \quad \varphi(x,y,z,0) = 0, \tag{21}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\varphi_t\, \nabla\varphi\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi_t(x,y,0,t)\, w_t d\Pi. \tag{22}$$

Интегрируя уравнение (14) по области $\Omega_R = \{-R < x < R, -L < y < L, -H < z < 0\}$, учитывая условия (15) и формулу Гаусса-Остроградского, получим после предельного перехода при $R \to \infty$:

$$\int\limits_{\Omega} \triangle\varphi\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi_z(x,y,0,t)\, d\Pi = \int\limits_{\Pi} w_t(x,y,t)\, d\Pi = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi} w(x,y,t)\, d\Pi = 0.$$

Привлекая условия (18), выводим (19).

Умножим теперь уравнение (14) на φ и проинтегрируем полученное равенство по Ω_R. С учетом формулы Гаусса-Остроградского и условий (15) после предельного перехода при $R \to \infty$ приходим к равенству

$$-\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \int\limits_{G} \varphi\nabla\varphi(x,y,0,t)\, dG = -\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2\, d\Omega + \int\limits_{G} \varphi(x,y,0,t) w_t\, dG = 0,$$

из которого следует (20).

С учетом (18) из (20) при $t = 0$ выводим равенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi(x,y,z,0)|^2\, d\Omega = \int\limits_{\Pi} \varphi(x,y,0,0) w_t(x,y,0)\, d\Pi = 0,$$

из которого, с учетом (17), следует (21).

Умножим уравнение (14) на φ_t и проинтегрируем полученный результат по Ω

$$\int\limits_{\Omega} \Delta\varphi\, \varphi_t d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_t\, (\nabla\varphi \cdot \vec{n})\, d\partial\Omega - \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi_t\, \nabla\varphi d\Omega, \tag{23}$$

где $\partial\Omega$ — граница Ω, $\vec{n}$ — соответствующая нормаль к $\nabla\varphi$. С учетом условий (15) из уравнения (23) получим

$$\int\limits_{\Pi} \varphi_t(x,y,0,t)\, w_t\, d\Pi - \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi_t\, \nabla\varphi d\Omega = 0,$$

из которого получим (22).

Уравнение (13) представим в виде

$$D\nabla^4 w + M w_{tt} + \rho_l \varphi_t + \rho_l g w_t = 0. \tag{24}$$

Умножим уравнение (24) на $w_t(x,y,t)$ и проинтегрируем по области $\Pi_R = \{-R < x < R, -L < y < L\}$. Получим

$$D\int\limits_{\Pi_R} (\nabla^4 w)\, w_t\, d\Pi_R + M\int\limits_{\Pi_R} w_{tt} w_t\, d\Pi_R + \rho_l \int\limits_{\Pi_R} \varphi_t w_t\, d\Pi_R + \rho_l g \int\limits_{\Pi_R} w\, w_t\, d\Pi_R = 0.$$

1) Для первого слагаемого имеем:

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{xxxx} w_t\, d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_{xx}^2\, d\Pi_R + \int\limits_{-L}^{L} w_{xxx} w_t|_{x=-R}^{x=R}\, dy - \int\limits_{-L}^{L} w_{xx} w_{xt}|_{x=-R}^{x=R}\, dy$$

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{yyyy} w_t\, d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_{yy}^2\, d\Pi_R + \int\limits_{-R}^{R} w_{yyy} w_t|_{y=-L}^{y=L}\, dx - \int\limits_{-R}^{R} w_{yy} w_{yt}|_{y=-L}^{y=L}\, dx,$$

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{xxyy} w_t\, d\Pi_R == \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_{xy}^2\, d\Pi_R + \int\limits_{-L}^{L} w_{xyy} w_t|_{x=-R}^{x=R}\, dy - \int\limits_{-R}^{R} w_{xy} w_{xt}|_{y=-L}^{y=L}\, dx.$$

2) Для второго слагаемого имеем:

$$\int\limits_{\Pi_R} w_{tt} w_t\, d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_t^2\, d\Pi_R.$$

3) Для четвертого слагаемого имеем:

$$\int\limits_{\Pi_R} w\, w_t\, d\Pi_R = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w^2\, d\Pi_R.$$

В итоге, с учетом полученных представлений интегралов, имеем:

$$\frac{M}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_t^2\, d\Pi_R + \rho_l \int\limits_{\Pi_R} \varphi_t w_t\, d\Pi_R +$$

$$+\frac{D}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xy}^2\, d\Pi_R +$$

$$+\frac{\rho_l g}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_R} w^2\, d\Pi_R = \ \mathrm{I}_\Gamma, \qquad (25)$$

где интеграл I_Γ легко восстанавливается из 1).

В (25) осуществим предельный переход при $R \to \infty$. Положим

$$Y(x,y,t) = (w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2w_{xy}^2).$$

Тождество (25) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2\, d\Pi + \frac{\rho_l}{2}\int\limits_{\Omega} \nabla\varphi^2\, d\Omega + \right.$$

$$\left. +\frac{D}{2}\int\limits_{\Pi} Y(x,y,t)\, d\Pi + \frac{\rho_l g}{2}\int\limits_{\Pi} w^2\, d\Pi\right) = 0, \qquad (26)$$

при $t = 0$ имеем

$$w = w_t = w_{xx} = w_{xy} = w_{yy} = 0. \qquad (27)$$

Заметим, что выражение под знаком производной в (26) при $t = 0$ равно нулю в силу условий (21) и (27). Учитывая это замечание, приходим к равенству

$$\frac{M}{2}\int\limits_{\Pi} w_t^2\, d\Pi + \frac{\rho_l}{2}\int\limits_{\Omega} \nabla\varphi^2\, d\Omega +$$

$$+\frac{D}{2}\int\limits_{\Pi} Y(x,y,t)\, d\Pi + \frac{\rho_l g}{2}\int\limits_{\Pi} w^2\, d\Pi = 0.$$

Все слагаемые левой части полученного равенства неотрицательны. Отсюда выводим $w_t = 0$, $\nabla\varphi(x,y,z,t) = 0$, $Y(x,y,t) = 0$, $w(x,y,t) = 0$ и, следовательно, $\varphi(x,y,z,t) = 0$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Squire V., Hosking R., Kerr A., Langhorne P. Moving Loads on Ice. — 1996.

2. Hydroelasticity in Marine Technology / Edited by S. Malenica, N. Vladimir and I. Senjanovic. — 2015.

3. Коробкин А.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Поведение ледового покрова канала под действием поверхностных волн. // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — № 1/1 (73).

4. Brocklehurst P., Korobkin A.A., Părău E.I. Interaction of Hydro-Elastic Waves With a Vertical Wall // Journal Enginering Mathematic. — 2010. — V. 68.

5. Batyaev E.A., Khabakhpasheva T.I. Hydroelastic Waves in Channel With Free Ice Cover // Fluid Dynamics. — 2015. — № 6.

6. Шишмарев К.А. Математические вопросы моделирования взаимодействия ледового покрова и гидроупругих волн // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/1 (85).

7. Шишмарев К.А. Постановка задачи о вязкоупругих колебаниях ледовой пластины в канале в результате движения нагрузки // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85).

8. Жесткая В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. — 1998. — Т. 40, № 4.

9. Kozin V.M., Zhestkaya V.D., Pogorelova A.V., Chizhumov S.D., Dzhabailov M.P., Morozov V.S., Kustov A.N. Applied Problems of the Dynamics of Ice Cover. — Moscow, 2008.

10. Хлуднев А.М. Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14 (1).

11. Хлуднев А.М. Об одном уравнении теории пологих оболочек // Динамика сплошной среды. — 1975. — Т. 21.

12. Иванов Г.В. Теория пластин и оболочек : учебное пособие. — 1980.

13. Vaigant V.A., Papin A.A. On the Uniqueness of the Solution of the Flow Problem with a Given Vortex // Mathematical notes. — 2014. — V. 96 (6).

14. Ахмерова И.Г. Автомодельное решение задачи о движении воды и воздуха в деформированном грунте // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85).

15. Токарева М.А. Конечное время стабилизации решения уравнений фильтрации жидкости в пороупругой среде // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — № 1/2 (85).

16. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1970.