УДК 514.764.2

Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой*

П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Conformally Flat Ricci Solitons on Lie Groups with Left-invariant (pseudo)Riemannian Metrics

P.N. Klepikov, D.N. Oskorbin

Altai State University (Barnaul, Russia)

Важным обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи, которые были впервые рассмотрены Р. Гамильтоном. Однородные солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков, но классификация однородных солитонов Риччи известна лишь в малых размерностях и не является исчерпывающей.

Важным подклассом однородных солитонов Риччи являются алгебраические солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре в связи с изучением однородных солитонов Риччи на разрешимых группах Ли. Исследование алгебраических солитонов Риччи важно, так как известно, что каждый алгебраический солитон Риччи является однородным солитоном Риччи.

Изучаются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой при условии, что рассматриваемая метрика конформно плоская и оператор Риччи диагонализируем. В этом случае удалось показать, что солитон Риччи тривиален, т.е. метрическая группа Ли является либо многообразием Эйнштейна, либо прямым произведением эйнштейнового многообразия на евклидово пространство. Также получено следствие об отсутствии нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой.

Ключевые слова: группы Ли, алгебры Ли, алгебраический солитон Риччи, левоинвариантная (псевдо)риманова метрика, конформно плоская метрика.

DOI 10.14258/izvasu(2016)1-22

Ricci solitons are important generalizations of Einstein metrics on pseudo-Riemannian manifolds, which were first considered by R. Hamilton. Homogeneous Ricci solitons have been studied by many mathematicians, and the classification of homogeneous Ricci solitons is known in small dimensions only and it is not exhaustive.

Algebraic Ricci solitons are important subclass of the homogeneous Ricci solitons, and algebraic Ricci solitons were first discussed by J. Lauret in connection with the study of homogeneous Ricci solitons on solvable Lie groups. The study of algebraic Ricci solitons is important, since it is known that every algebraic Ricci soliton is homogeneous Ricci soliton.

In this paper, we study the algebraic Ricci solitons on Lie groups with left-invariant pseudo-Riemannian metric, if metric is conformally flat and the Ricci operator are diagonalizable. In this case it was possible to show that the Ricci soliton is trivial, t.i. metric Lie group is Einstein manifold or the direct product of Einstein manifold and the Euclidean space. We also obtained a consequence of the absence of nontrivial homogeneous invariant Ricci solitons on Lie groups with left-invariant conformally flat Riemannian metric.

Key words: Lie group, Lie algebra, algebraic Ricci soliton, left-invariant Pseudo-Riemannian metric, conformally flat metric.

1. Введение, обзор, постановка задачи. Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвящены работы многих математиков (см., например, обзоры [1, 2]). В последнее время изу-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16–01–00336А, № 16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

чаются различные обобщения многообразий Эйнштейна, одними из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотреные Р. Гамильтоном в работе [3].

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Так, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи (см. [4, 5]). Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым.

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [6]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [7]).

М. Яблонский изучал связь между алгебраическими и полуалгебраическими солитонами Риччи. В частности, им была доказана следующая

Теорема 1 (M. Jablonski, 2014 [8]). *Если группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g является полуалгебраическим солитоном Риччи, тогда (G, g) — алгебраический солитон Риччи.*

Отметим, что в случае групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой данная теорема не выполняется (см. [9]).

В данной работе предполагается исследовать вопрос о классификации однородных солитонов Риччи на группах Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой. Это позволит дать ответ на часть проблем, поставленных ранее Л. Цербо, Х. Лауре, К. Онда, М. Яблонским, Р. Гамильтоном.

2. Основные определения и обозначения. Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и оператор Риччи ρ определим, соответственно, как

$$r(X,Y) = \operatorname{tr}(V \to R(X,V)Y),$$
$$g(\rho(X), Y) = r(X,Y).$$

Определение. Полное (псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \tag{1}$$

где r — тензор Риччи метрики g, $\Lambda \in \mathbb{R}$, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X. $(G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово пространство, удовлетворяющее (1), называется *однородным солитоном Риччи*. (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой, удовлетворяющая (1) с некоторым левоинвариантным векторным полем X, называется *однородным инвариантным солитоном Риччи*.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *тривиальным* солитоном Риччи, если (M, g) есть эйнштейновое многообразие, либо изометрично прямому произведению эйнштейнового многообразия и евклидова пространства.

Определение. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется *полуалгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$\rho = \Lambda \cdot I + \frac{1}{2}\left(D + D'\right),$$

где ρ — матрица оператора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, I — единичная матрица, D — матрица оператора некоторого дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$, D' — матрица оператора, сопряженного оператору D относительно метрики g.

Лемма 1. *Каждый однородный инвариатный солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой обязан быть полуалгебраическим солитоном Риччи с некоторым внутренним дифференцированием D.*

Доказательство. В случае однородного инвариантного солитона Риччи уравнение (1) можно привести к виду (см., например, [4])

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} + X^k(c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}),$$

где X^k — координаты левоинвариантного векторного поля X, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Поднимая второй индекс в предыдущем уравнении, получим

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + \mathrm{ad}_X + \mathrm{ad}'_X,$$

где $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ — внутреннее дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$. То есть однородный инвариантный солитон Риччи является полуалгебраическим солитоном Риччи с $D = 2\mathrm{ad}_X$.

Определение. Группа Ли G с левоинвариантной (пседо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению

$$\rho = \Lambda \cdot I + D, \tag{2}$$

т.е. (G, g) является полуалгебраическим солитоном Риччи с некоторым самосопряженным дифференцированием D.

3. Оператор Риччи левоинвариантных конформно плоских (псевдо)римановых метрик на группах Ли. Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Известно, что, в отличие от случая римановой метрики, в случае псевдоримановой метрики оператор Риччи ρ не всегда может быть приведен к диагональному виду (см., например, [10]).

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — n-мерная метрическая алгебра Ли со знаконеопределенным скалярным произведением. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ будем называть *псевдоортонормированным*, если $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и $\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \pm 1$.

В работе [11] (см. также [12, 13]) доказана следующая

Теорема 2 (K. Honda, 2003 [11]). *Пусть G — группа Ли ($n \geqslant 4$) с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g, алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ. Тогда главные значения оператора Риччи могут принимать не более двух различных значений. Если их ровно два, ρ_1 кратности k и ρ_2 кратности $n - k$, то они имеют вид:*

$$\rho_1 = 2(k-1)a, \quad \rho_2 = 2(k+1-n)a, \quad a \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Причем в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует псевдоортонормированный базис, в котором матрица оператора Риччи имеет диагональный вид с главными значениями на диагонали.

Далее будем предполагать, что G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g, алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ. Если оператор Риччи имеет ровно одно собственное значение, то тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, и данная метрика очевидно является метрикой Эйнштейна, а солитон Риччи — тривиальным. Поэтому далее мы будем предполагать, что оператор Риччи имеет ровно два различных собственных значения.

Расмотрим псевдоортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, в котором диагонализируется оператор Риччи. Переобозначая, в случае необходимости, базисные векторы, получим, что матрица оператора Риччи в этом базисе имеет вид

$$\rho = \mathrm{diag}\Big(\underbrace{\rho_1, \ldots, \rho_1}_{k}, \underbrace{\rho_2, \ldots, \rho_2}_{n-k}\Big), \quad \rho_1 \neq \rho_2. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:
$A = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_k)$ — векторное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее собственному значению оператора Риччи ρ_1,
$B = \mathrm{span}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ — векторное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее собственному значению оператора Риччи ρ_2.

Лемма 2. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$, алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ, имеющим ровно два различных собственных значения. Тогда*

1. *A и B — подалгебры Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*
2. *$c^j_{hi} = -\varepsilon_i \varepsilon_j c^i_{hj}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $k+1 \leqslant h \leqslant n$ или $1 \leqslant h \leqslant k$, $k+1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Доказательство. Отметим, что тензор Риччи конформно плоской группы Ли удовлетворяет условию [1]:

$$r_{ij,h} = r_{ih,j},$$

т.е. тензор Риччи r является тензором Кодацци. Распишем ковариантную производную через символы Кристофеля, подразумевая суммирование по индексу m:

$$r_{mj}\Gamma^m_{hi} + r_{im}\Gamma^m_{hj} = r_{mh}\Gamma^m_{ji} + r_{im}\Gamma^m_{jh}.$$

В рассматриваемом псевдоортонормированном базисе матрица тензора Риччи имеет диагональный вид с элементами $\varepsilon_i \rho_i$ на диагонали. Значит,

$$\varepsilon_j \rho_j \Gamma^j_{hi} + \varepsilon_i \rho_i \Gamma^i_{hj} = \varepsilon_h \rho_h \Gamma^h_{ji} + \varepsilon_i \rho_i \Gamma^i_{jh}.$$

Далее, с использованием свойства символов Кристофеля $\Gamma^h_{ij} = -\varepsilon_j \varepsilon_h \Gamma^j_{ih}$, получим

$$(\rho_i - \rho_j)\Gamma^i_{hj} = (\rho_i - \rho_h)\Gamma^i_{jh}.$$

Так как оператор Риччи имеет только два собственных значения, то возможны несколько случаев:

1. Если $\rho_j = \rho_h \neq \rho_i$, то $\Gamma^i_{hj} - \Gamma^i_{jh} = 0$, а значит, так как связность Леви-Чивита не имеет кручения, то $c^i_{hj} = \Gamma^i_{hj} - \Gamma^i_{jh} = 0$, откуда следует пункт 1 данной леммы.

2. Если $\rho_j = \rho_i \neq \rho_h$, то $\Gamma^i_{jh} = 0$, откуда, с учетом предыдущего пункта, следует пункт 2 данной леммы.

Также нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 3. *Справедлива формула (4) для вычисления диагональных элементов оператора Риччи ρ в псевдоортонормированном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:*

$$\rho^i_i = \sum_{h,s} \left(\frac{1}{4}\varepsilon_i\varepsilon_h\varepsilon_s \left(\left(c^h_{is}\right)^2 + \left(c^i_{hs}\right)^2 - 3\left(c^s_{ih}\right)^2 \right) + \frac{1}{2}\varepsilon_h c^s_{ih} c^i_{hs} - \frac{1}{2}\varepsilon_i c^s_{ih} c^h_{is} + \frac{1}{2}\varepsilon_s c^h_{is} c^i_{hs} - \varepsilon_s c^i_{is} c^h_{hs} \right), \quad (4)$$

где c^h_{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\varepsilon_i = \pm 1$.

Доказательство. Следуя работам [14–16], выпишем формулы, позволяющие вычислять компоненты оператора Риччи через структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компоненты метрического тензора.

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(c^s_{ij}g_{sk} - c^s_{jk}g_{si} + c^s_{ki}g_{sj}\right), \ \Gamma^s_{ij} = \Gamma_{ij,k}g^{ks},$$
$$R_{ijkt} = c^s_{ij}\Gamma_{sk,t} - \Gamma^s_{jk}\Gamma_{is,t} + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{js,t},$$
$$r_{ik} = R_{ijkt}g^{jt}, \ \rho^j_i = r_{ik}g^{kj},$$

где c^h_{ij} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, g^{ij} — компоненты кометрического тензора, $\Gamma_{ij,k}$ и Γ^s_{ij} — символы Кристофеля 1-го и 2-го рода соответственно, R_{ijkt} — тензор кривизны Римана, r_{ik} — тензор Риччи.

Применяя приведенные выше формулы для вычисления элементов ρ^i_i и учитывая, что в псевдоортонормированном базисе $g = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, получим необходимую формулу.

4. Конформно плоские однородные солитоны Риччи. Данный раздел работы посвящен изучению групп Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи.

Теорема 3. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$ и диагонализируемым оператором Риччи ρ. Тогда, если (G, g) — алгебраический солитон Риччи, то (G, g) — тривиальный солитон Риччи.*

Доказательство. В силу уравнений (2) и (3) матрица оператора дифференцирования D имеет вид

$$D = \mathrm{diag}\Big(\underbrace{\rho_1 - \Lambda, \dots, \rho_1 - \Lambda}_{k}, \underbrace{\rho_2 - \Lambda, \dots, \rho_2 - \Lambda}_{n-k}\Big).$$

Так как D — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то для любых базисных векторов e_i и e_j выполняется:

$$D[e_i, e_j] = [De_i, e_j] + [e_i, De_j].$$

Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant k$, тогда в силу вида матрицы дифференцирования D, приведенного выше, имеем:

$$D[e_i, e_j] = 2(\rho_1 - \Lambda)[e_i, e_j],$$

что дает три возможных варианта

$$[e_i, e_j] = 0; \quad (5a)$$
$$2(\rho_1 - \Lambda) = \rho_1 - \Lambda, \quad [e_i, e_j] \in A; \quad (5b)$$
$$2(\rho_1 - \Lambda) = \rho_2 - \Lambda, \quad [e_i, e_j] \in B. \quad (5c)$$

Аналогично, если $k + 1 \leqslant i, j \leqslant n$, тогда

$$[e_i, e_j] = 0; \quad (6a)$$
$$2(\rho_2 - \Lambda) = \rho_1 - \Lambda, \quad [e_i, e_j] \in A; \quad (6b)$$
$$2(\rho_2 - \Lambda) = \rho_2 - \Lambda, \quad [e_i, e_j] \in B. \quad (6c)$$

И, если $1 \leqslant i \leqslant k$, $k + 1 \leqslant j \leqslant n$, тогда

$$[e_i, e_j] = 0; \quad (7a)$$
$$\rho_1 + \rho_2 - 2\Lambda = \rho_1 - \Lambda, \quad [e_i, e_j] \in A; \quad (7b)$$
$$\rho_1 + \rho_2 - 2\Lambda = \rho_2 - \Lambda, \quad [e_i, e_j] \in B. \quad (7c)$$

Отметим, что случаи (5c) и (6b) невозможны, так как A и B — подалгебры Ли по лемме 2. Дополнительно, одновременное выполнение (5b) и (6c), (5b) и (7b), (6c) и (7c) влечет $\rho_1 = \rho_2$, т.е. (G, g) является многообразием Эйнштейна, а значит солитон Риччи тривиален.

За вычетом случая одновременного выполнения (5a), (6a) и (7a), который соответствует абелевой алгебре Ли, а значит тривиальному солитону Риччи, остается 6 различных вариантов сочетания этих условий. Они, с помощью переобозначения базисных векторов $\{e_1, \dots, e_k\} \leftrightarrow \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ и собственных значений $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ оператора Риччи ρ, сводятся к следующим трем случаям:

1. $\Lambda = \rho_2$, $[A, A] = 0$, $[B, B] = 0$, $[A, B] \subset A$.
2. $\Lambda = \rho_2$, $[A, A] = 0$, $[B, B] \subset B$, $[A, B] \subset A$.
3. $\Lambda = \rho_2$, $[A, A] = 0$, $[B, B] \subset B$, $[A, B] = 0$.

Рассмотрим одновременно случаи 1 и 2. В силу ограничений на скобки Ли, приведенных выше, выполняется:

$$1 \leqslant i, j \leqslant k \ \Rightarrow \ c^h_{ij} = 0,$$
$$k + 1 \leqslant i, j \leqslant n, \ 1 \leqslant h \leqslant k \ \Rightarrow \ c^h_{ij} = 0,$$
$$1 \leqslant i \leqslant k, \ k + 1 \leqslant j, h \leqslant n \ \Rightarrow \ c^h_{ij} = 0.$$

Пункт 2 леммы 2, в частности, означает, что $c^i_{ih} = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, $k + 1 \leqslant h \leqslant n$.

Вычислим $\rho_1 = \rho_i^i \mid_{1 \leqslant i \leqslant k}$ с помощью формулы (4), с учетом приведенных ограничений:

$$\rho_1 = \rho_i^i \mid_{1 \leqslant i \leqslant k} = \\ = \sum_{h=1}^{k} \sum_{s=k+1}^{n} \left(\frac{1}{4}\varepsilon_i\varepsilon_h\varepsilon_s \left(\left(c_{is}^h\right)^2 + \left(c_{hs}^i\right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\varepsilon_s c_{is}^h c_{hs}^i \right) + \\ + \sum_{h=k+1}^{n} \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{1}{4}\varepsilon_i\varepsilon_h\varepsilon_s \left(\left(c_{hs}^i\right)^2 - 3\left(c_{ih}^s\right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\varepsilon_h c_{ih}^s c_{hs}^i \right).$$

Выполняя замену $h \leftrightarrow s$ во второй сумме, получим

$$\rho_1 = \sum_{h=1}^{k} \sum_{s=k+1}^{n} \frac{1}{2}\varepsilon_i\varepsilon_h\varepsilon_s \left(\left(c_{hs}^i\right)^2 - \left(c_{is}^h\right)^2 \right).$$

Но из пункта 2 леммы 2 следует, что $\left(c_{hs}^i\right)^2 = \left(c_{is}^h\right)^2$ при $1 \leqslant i, h \leqslant k$, $k+1 \leqslant s \leqslant n$. Значит, $\rho_1 = 0$.

Следовательно, по теореме 2, выполняется $k = 1$. Но тогда из пункта 2 леммы 2 следует, что $[A, B] = 0$, что приводит к случаю 3.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что в третьем случае A — абелев идеал, B — идеал, $\langle A, B \rangle = 0$ и $\mathfrak{g} = A + B$ как векторное пространство. Значит $\mathfrak{g} = A \oplus B$ и $G = \mathbb{R}^k \otimes \mathcal{N}^{n-k}$ — прямое произведение евклидова пространства и эйнштейнового многообразия, а следовательно, алгебраический солитон Риччи тривиален.

Отметим, что, в силу теоремы 2, в третьем случае $k = 1$ и $G = \mathbb{R}^1 \otimes \mathcal{N}^{n-1}$.

В случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой оператор Риччи всегда диагонализируем, так как его матрица в ортонормированном базисе симметрична. А значит, справедливо следствие теоремы 3.

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$. Тогда, если (G, g) — алгебраический солитон Риччи, то (G, g) — тривиальный солитон Риччи.*

Также с учетом леммы 1 и теоремы 1 справедливо

Следствие 2. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой g размерности $n \geqslant 4$. Тогда, если (G, g) — однородный инвариантный солитон Риччи, то (G, g) — тривиальный солитон Риччи.*

Заключение. В результате проведенных исследований решена часть задач теории солитонов Риччи, получены следующие результаты:

1. Для групп Ли с левоинвариантной конформно плоской псевдоримановой метрикой, размерности не менее четырех, и диагонализируемым оператором Риччи доказано, что алгебраический солитон Риччи является тривиальным.

2. Более того, в случае групп Ли с левоинвариантной конформно плоской римановой метрикой любой алгебраический и однородный инвариантный солитон Риччи является тривиальным.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна : в 2 т. / пер. с англ. — М., 1990.

2. Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. — 2006. — Т. 37.

3. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — V. 71. DOI: 10.1090/conm/071/954419.

4. Cerbo L.F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — V. 14(2). DOI: 10.1515/advgeom-2013-0031.

5. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2015. — №1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-21.

6. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. — 2001. — V. 319, №4. DOI: 10.1007/PL00004456.

7. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. — 2014. — V. 144, №1. DOI: 10.1007/s10474-014-0426-0.

8. Jablonski M. Homogeneous Ricci Solitons are Algebraic // arxiv.org. — 2014. — arXiv:1309.2515.

9. Batat W., Onda K. Algebraic Ricci Solitons of three-dimensional Lorentzian Lie groups // arxiv.org. — 2012. — arXiv:1112.2455.

10. Calvaruso G., Kowalski O. On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — V. 7 (1). DOI: 10.2478/s11533-008-0061-5.

11. Honda K. Conformally Flat Semi-Riemannian Manifolds with Commuting Curvature

and Ricci Operators // Tokyo J. Math. — 2003. — V. 26, № 1. DOI: 10.3836/ tjm/1244208691.

12. Honda K., Tsukada K. Conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds // Proceedings of the conference “GELOGRA”, Granada (Spain). — 2011.

13. Honda K., Tsukada K. Conformally Flat Homogeneous Lorentzian Manifolds // Recent Trends in Lorentzian Geometry. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2013. — V. 26. DOI: 10.1007/978-1-4614-4897-6_13.

14. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавказский математический журнал. — 2011. — Т. 13, № 3.

15. Клепиков П.Н., Хромова О.П. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014 — № 1/2. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.2-05.

16. Родионов Е.Д., Славский В.В., Чибрикова Л.Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. труды. — 2006. — Т. 9, №1. DOI: 10.3103/S1055134407030030.