УДК 519.7

Автомодельное решение задачи о движении воды и воздуха в деформированном грунте

И.Г. Ахмерова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

Self-similar Solution of Moving Water and Air Problem in a Deformed Soil

I.G. Akhmerova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Описывается процесс фильтрации воды и воздуха в деформированном грунте. Грунт является трехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и твердой деформируемой пористой среды ($i = 3$). Математическая модель состоит из уравнения сохранения масс и импульса пористой среды при насыщении пор водой и воздухом. В уравнении движения и в законе деформирования пористой матрицы учитывается эффект капиллярных сил. Дается постановка задачи и проводится преобразование системы уравнений. В результате преобразований закон сохранения импульса для воды и воздуха записывается в виде закона Дарси, закон сохранения импульса для твердой матрицы переписывается с учетом принципа Терцаги, обобщенного закона Гука и эффекта капиллярных сил. Исследуется решение задачи о движении воды и воздуха в деформированной среде в виде бегущей волны. Получены уравнения для насыщенности и пористости. С помощью этой модели можно рассчитать критическое значение насыщенности, при котором на свободной поверхности под действием капиллярных сил возникают трещины разрыва. Это есть эффект поверхностного разрушения почвы при засухе.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пористая среда, насыщенность, деформированный грунт, разрушение почвы.

This paper describes the process of water and air filtering in a deformed soil. Soil is a three-phase medium consisting of water ($i = 1$), air ($i = 2$), and a solid deformable porous medium ($i = 3$). The mathematical model is presented by the equation of the conservation of mass and momentum of the porous medium at saturation with water and air. The equation of motion and the law of deformation of the porous matrix take into account the effect of capillary forces. The problem is formulated, and the modification of the system of equations is carried out. As a result of the modification, the law of conservation of momentum for water and air is written as Darcy's law, the law of conservation of momentum for a solid matrix is formulated with consideration of Terzaghi's principle, the generalized Hooke's law, and the effect of capillary forces. The solution to the problem of motion of air and water in a deformed medium in the form of a traveling wave is investigated. The equations for saturation and porosity are derived. This model can be used to calculate critical values of saturations, wherein on the free surface under the action of capillary forces tension cracks arise. This is the effect of the surface soil degradation during drought.

Key words: multiphase flow, porous medium, saturation, deformed soil, destruction of soil.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.2-14

Постановка задачи. Рассматривается движение воды и воздуха в пористой среде. Грунт является трехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и твердой деформируемой пористой среды ($i = 3$). Математическая модель состоит из квазилинейной системы уравнений составного типа [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \qquad (1)$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial (\alpha_i \sigma^i_{kl})}{\partial x} + \sum_j F_{ji} + \rho_i \overrightarrow{g}. \quad (2)$$

Здесь u_i — скорость i-й фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ($\alpha_1 = ms_1, \alpha_2 = ms_2, \alpha_3 = 1 - m$); s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха; m — пористость грунта; σ^i_{kl} — истинные фазовые напряжения i-й фазы ($\sigma^1_{kl} = -p_1\delta_{kl}, \sigma^2_{kl} = -p_2\delta_{kl}, \sigma^3_{kl} = \sigma_{kl}$, где δ_{kl} — единичный тензор); p_i — давление i-й фазы; g — ускорение силы тяжести; F_{ji} — сила объемного взаимодействия между j и i фазами. Так как F_{ji} — внутренние силы для среды в целом, то

$$F_{ji} = -F_{ij}, \quad \sum_{i,j} F_{ji} = 0, \quad i \neq j.$$

Подобные модели рассматривались при решении задачи о тающем снеге. В работе [3] был доказан физический принцип максимума для насыщенности водной фазы в случае модельной зависимости функции пористости от температуры среды. В работе [4] численно решена двумерная задача снеготаяния. В работе [5] доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной газожидкостной смеси.

Баланс масс. Уравнения сохранения массы для каждой из фаз в отсутствие фазовых переходов имеют вид

$$\frac{\partial(\rho_i^0 s_i m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i^0 s_i m u_i)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial(\rho_3^0(1-m))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_3^0(1-m)u_3)}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

Баланс импульса. Уравнения сохранения импульса для воды и воздуха имеют вид (положим $s_1 \equiv s$, $s_2 \equiv 1-s$)

$$\rho_1^0 sm\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) =$$

$$= -\frac{\partial(msp_1)}{\partial x} + F_{21} + F_{31} + \rho_1^0 smg,$$

$$\rho_2^0(1-s)m\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) =$$

$$= -\frac{\partial(m(1-s)p_2)}{\partial x} + F_{12} + F_{32} + \rho_2^0(1-s)mg.$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\rho_1^0 sm\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) =$$

$$= -ms\frac{\partial p_1}{\partial x} + R_{21} + R_{31} + \rho_1^0 smg; \qquad (4)$$

$$\rho_2^0(1-s)m\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) =$$

$$= -m(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x} + R_{12} + R_{32} + \rho_2^0(1-s)mg, \qquad (5)$$

где R_{3i} — силы межфазного трения ($i \neq 3$). Из сравнения (2) и (4), (2) и (5) найдем выражения для объемных межфазовых сил, действующих на воду и воздух:

$$F_1 = F_{21} + F_{31} = p_1\frac{\partial(ms)}{\partial x} + R_{21} + R_{31},$$

$$F_2 = F_{12} + F_{32} = p_2\frac{\partial(m(1-s))}{\partial x} + R_{12} + R_{32}. \qquad (6)$$

Силы межфазного трения R_{ji} имеют вид

$$R_{ji} = K_{ji}(u_j - u_i), \quad K_{ij} = K_{ji}, \qquad (7)$$

где K_{ij} — коэффициент взаимодействия фаз.

Полагая, что ускорения воды и воздуха малы, закон сохранения импульса (4), (5) с учетом (7) принимает вид

$$-ms\frac{\partial p_1}{\partial x} + K_{21}(u_2 - u_1) +$$

$$+K_{31}(u_3 - u_1) + \rho_1^0 smg = 0; \qquad (8)$$

$$-m(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x} + K_{12}(u_1 - u_2) +$$

$$+K_{32}(u_3 - u_2) + \rho_2^0(1-s)mg = 0. \qquad (9)$$

Разрешив систему уравнений (8) и (9) относительно скоростей с учетом $K_{12} = K_{21} = 0$ (обменом импульсом между водой и воздухом пренебрегаем), получаем обощенный закон Дарси:

$$ms(u_1 - u_3) = -\frac{m^2 s^2}{K_{31}}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1^0 g\right) =$$

$$= -K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1^0 g\right); \qquad (10)$$

$$m(1-s)(u_2 - u_3) = -\frac{m^2(1-s)^2}{K_{32}}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2^0 g\right) =$$

$$= -K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2^0 g\right). \qquad (11)$$

Баланс импульса твердой фазы. Из закона сохранения импульса для твердой фазы следует, что $F_3 = F_{13} + F_{23}$. Из соотношения $F_1 + F_2 + F_3 = 0$ находим объемную межфазовую силу, действующую на твердую фазу:

$$F_3 = -(F_1 + F_2) = -(p_1\frac{\partial(ms)}{\partial x} + R_{21} + R_{31} +$$

$$+p_2\frac{\partial(m(1-s))}{\partial x} + R_{12} + R_{32}) =$$

$$= -(p_1 - p_2)\frac{\partial(ms)}{\partial x} - p_2\frac{\partial m}{\partial x} + R_{23} + R_{13}.$$

Тогда уравнение сохранения импульса твердой матрицы (2) примет вид

$$\rho_3^0(1-m)\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = \frac{\partial((1-m)\sigma_{kl})}{\partial x} -$$

$$-(p_1 - p_2)\frac{\partial(ms)}{\partial x} - p_2\frac{\partial m}{\partial x} + R_{23} +$$

$$+R_{13} + \rho_3^0(1-m)g. \qquad (12)$$

Полное напряжение в среде Γ_{kl} должно уравновешиваться фазовыми напряжениями с весом, равным их относительному содержанию на произвольном плоском сечении среды

$$\Gamma_{kl} = (1-m)\sigma_{kl} - msp_1\delta_{kl} - m(1-s)p_2\delta_{kl}. \quad (13)$$

В соответствии с принципом Терцаги можно ввести фазовые эффективные напряжения в пористой среде: $\sigma^f_{kl}(1) = \Gamma_{kl} + p_1\delta_{kl}$ — для первой фазы и $\sigma^f_{kl}(2) = \Gamma_{kl} + p_2\delta_{kl}$ — для второй фазы. Тогда полное эффективное напряжение при двухфазном насыщении среды имеет вид

$$\sigma^f_{kl} = s\sigma^f_{kl}(1) + (1-s)\sigma^f_{kl}(2) = \Gamma_{kl} + P\delta_{kl}, \quad (14)$$

где $P = sp_1 + (1-s)p_2$ — полное давление первой и второй фазы. Из (14) с учетом (13) найдем соотношение для σ_{kl}

$$(1-m)\sigma_{kl} = \sigma^f_{kl} - (s(1-m)p_1 +$$
$$+(1-s)(1-m)p_2)\delta_{kl}. \quad (15)$$

Подставив соотношение (15) в (12), уравнение сохранения импульса для твердой фазы принимает вид

$$\rho^0_3(1-m)\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial \sigma^f_{kl}}{\partial x} - (1-m)\frac{\partial P}{\partial x} - (p_1-p_2)m\frac{\partial s}{\partial x} +$$
$$+R_{23} + R_{13} + \rho^0_3(1-m)g. \quad (16)$$

Разность фазовых давлений обусловливается капиллярными силами и ее можно представить в виде

$$p_1 - p_2 = p_c(s), \quad (17)$$

где $p_c(s)$ — равновесное капиллярное давление.

Полную деформацию пористой среды e_{kl} можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$e_{kl} = e^f_{kl} + e^\rho_{kl} + e^s_{kl}, \quad (18)$$

где e^f_{kl} — деформация переупаковки; e^ρ_{kl} — деформация изменения плотности материала твердых частиц; e^s_{kl} — деформация матрицы из-за изменения капиллярных сил. С другой стороны, тензор деформаций имеет вид

$$e_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \omega_l}{\partial x_k}\right),$$

где $\overrightarrow{\omega}$ — вектор перемещения твердых частиц.

Тензор скоростей полной деформации имеет вид

$$\frac{\partial e_{kl}}{\partial t} = D_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^3_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u^3_l}{\partial x_k}\right),$$

а также

$$e^\rho_{kl} = -\frac{1}{3}\beta_3\sigma_{mn}\delta_{mn}\delta_{kl},$$
$$e^s_{kl} = -\frac{1}{3}\beta_s(p_c(s) - p_c(s_0))\delta_{kl}. \quad (19)$$

Здесь β_3 — коэффициент изотермической сжимаемости материала индивидуальных частиц матрицы; β_s — коэффициент набухания (усадки) матрицы при изменениях насыщенности в силу действия капиллярных сил, $s_0 = 0$ при $x = 0$.

Деформации e^f_{kl} в случае упругого состояния матрицы связаны с эффективным напряжением законом Гука:

$$\sigma^f_{kl} = (\lambda_1' e^f_{mn}\delta_{mn}\delta_{kl} + 2\lambda_2' e^f_{kl})(1-m). \quad (20)$$

Подставляя (20) и (19) в (18), получаем обобщенный закон Гука набухающей пористой среды в виде

$$\sigma^f_{kl} = (1-m)(\lambda_1 e\delta_{kl} + 2\lambda_2 e_{kl} + \beta_3 KP\delta_{kl} +$$
$$+\beta_s K(p_c(s) - p_c(s_0)))\delta_{kl}. \quad (21)$$

Здесь $K = K'/(1+\beta_3 K') = \lambda_1 + 2/3\lambda_2$; $K' = \lambda_1' + 2/3\lambda_2'$; $(1-m)\lambda_1, (1-m)\lambda_2$ — коэффициенты Ламе; $(1-m)K$ – модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды, $e = tr(e_{kl})$.

Полагая, что ускорение твердой матрицы мало, закон сохранения импульса (16) с учетом (7) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma^f_{kl}}{\partial x} - (1-m)\frac{\partial P}{\partial x} - (p_1-p_2)m\frac{\partial s}{\partial x} +$$
$$+K_{23}(u_2-u_3) + K_{13}(u_1-u_3) + \rho^0_3(1-m)g = 0,$$
$$e_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial e_{11}}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial x}. \quad (22)$$

Автомодельный случай. Решение системы, состоящей из уравнений (3), (10), (11), (21), (22) ищется в области $(-\infty, ct)$ в предположении, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - ct$ (c — неизвестная постоянная) и вектор ускорения в системе координат xyz имеет вид $\overrightarrow{g} = (-g, 0, 0)$. Вместо (3), (10), (11), (21), (22) получим [6]:

$$-c\frac{d(\rho^0_1 sm)}{d\xi} + \frac{d(\rho^0_1 smu_1)}{d\xi} = 0,$$
$$-c\frac{d(\rho^0_2(1-s)m)}{d\xi} + \frac{d(\rho^0_2(1-s)mu_2)}{d\xi} = 0,$$
$$-c\frac{d(\rho^0_3(1-m))}{d\xi} + \frac{d(\rho^0_3(1-m)u_3)}{d\xi} = 0; \quad (23)$$

$$ms(u_1-u_3) = -K_0\frac{k_{01}}{\mu_1}\left(\frac{dp_1}{d\xi} - \rho^0_1 g\right); \quad (24)$$

$$m(1-s)(u_2-u_3) = -K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}\left(\frac{dp_2}{d\xi} - \rho^0_2 g\right); \quad (25)$$

$$\frac{d\sigma^f_{11}}{d\xi} - (1-m)\frac{dP}{d\xi} - (p_1-p_2)m\frac{ds}{d\xi} +$$
$$+K_{23}(u_2-u_3) + K_{13}(u_1-u_3) + \rho^0_3(1-m)g = 0; \quad (26)$$
$$\sigma^f_{11} = (1-m)((\lambda_1 + 2\lambda_2)e_{11} + \beta_3 KP\delta_{kl} +$$

$$+\beta_s K p_c(s))\delta_{kl}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s); \tag{27}$$

$$-c\frac{de_{11}}{d\xi} = \frac{du_3}{d\xi} \tag{28}$$

$$s\,|_{\xi\to-\infty} = 0, \quad u_i\,|_{\xi\to-\infty} = 0,$$

$$p_2(0) = p_2^+, \quad u_i(0) = u_i^+, \quad i = 1,2,3. \tag{29}$$

Определим истинные скорости для каждой фазы из (23):

$$-c\rho_1^0 ms + \rho_1^0 msu_1 = A_1 = const,$$

$$-c\rho_2^0 m(1-s) + \rho_2^0 m(1-s)u_2 = A_2 = const,$$

$$-c\rho_3^0(1-m) + \rho_3^0(1-m)u_3 = A_3 = const. \tag{30}$$

Рассматривая (29) при $\xi \to -\infty$ $(s^- = 0,\ u_i^- = 0)$, получим следующее:

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = -c\rho_2^0 m^-,$$

$$A_3 = -c\rho_3^0(1-m^-). \tag{31}$$

Из (29) и (30) при $\xi = 0$ $(u_i = u_i^+, p_2 = p_2^+)$ получим систему для неизвестных параметров c, s^+, m^+ вида

$$u_1^+ = c,$$

$$u_2^+ = \frac{c(m^+(1-s^+) - m^-)}{m^+(1-s^+)},$$

$$u_3^+ = \frac{c(m^- - m^+)}{1-m^+}.$$

Решение этой системы имеет вид

1. $s^+ = \dfrac{m^+ - m^-}{m^+}$,
   $c = u_1^+$,
   $m^+ = \dfrac{u_1^+ m^- - u_3^+}{u_1^+ - u_3^+}$,
   при $u_1^+ < 0$, $u_2^+ = 0$, $u_3^+ < 0$;
2. $s^+ = \dfrac{m^+(u_1^+ - u_2^+) - m^- u_1^+}{m^+(u_1^+ - u_2^+)}$,
   $c = u_1^+$,
   $m^+ = \dfrac{u_1^+ m^- - u_3^+}{u_1^+ - u_3^+}$,
   при $u_1^+ < 0$, $u_2^+ < 0$, $u_3^+ < 0$.

Из (29) получим представление для истинных скоростей воды, воздуха и твердой матрицы:

$$u_1 = c,$$

$$u_2 = c\left(1 - \frac{m^-}{m(1-s)}\right),$$

$$u_3 = c\left(1 - \frac{1-m^-}{1-m}\right). \tag{32}$$

Получим уравнение для насыщенности. Умножим (24) на $k_{02}\mu_1$, а (25) на $k_{01}\mu_2$ и вычтем одно из другого с учетом $p_1 - p_2 = p_c(s)$, получим

$$K_0 k_{01} k_{02} \frac{dp_c}{d\xi} = k_{02}\mu_1 ms(u_1 - u_3) -$$

$$-k_{01}\mu_2 m(1-s)(u_2 - u_3) + K_0 k_{01} k_{02} g(\rho_2^0 - \rho_1^0).$$

Так как p_c зависит от s и полагая, что $\bar{g} = g(\rho_1^0 - \rho_2^0)$, получим

$$-\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{ds}{d\xi} = \frac{\mu_1}{K_0 k_{01}} msc\frac{1-m^-}{1-m} -$$

$$-\frac{\mu_2}{K_0 k_{02}} m(1-s)c\left(\frac{1-m^-}{1-m} - \frac{m^-}{m(1-s)}\right) + \bar{g}. \tag{33}$$

Получим уравнение для пористости. Сделаем предположение, что движение воды и воздуха происходит в мягком грунте, тогда в (27) эффектами сжимаемости материала матрицы можно пренебречь $(\beta_3 KP\delta_{kl} = 0)$, закон Гука (27) принимает вид

$$\sigma_{kl}^f = (1-m)(\lambda_1 e\delta_{kl} + 2\lambda_2 e_{kl} +$$

$$+\beta_s K p_c(s))\delta_{kl}. \tag{34}$$

Так как задача одномерная и выполнено условие одноосного деформирования, то $e_{22} = e_{33} = 0$ и (33) имеет вид

$$\sigma_{kl}^f = (1-m)(\lambda_1 e_{11}\delta_{kl} + 2\lambda_2 e_{kl} +$$

$$+\beta_s K p_c(s))\delta_{kl}. \tag{35}$$

Из (34) получаем

$$\sigma_{11}^f = (1-m)(\lambda_1 e_{11} + 2\lambda_2 e_{11} + \beta_s K p_c(s)),$$

Подставляя σ_{11}^f в (26), получим

$$-\frac{dm}{d\xi}((\lambda_1 + 2\lambda_2)e_{11} + \beta_s K p_c(s)) +$$

$$+(1-m)\left((\lambda_1 + 2\lambda_2)\frac{de_{11}}{d\xi} + \beta_s K\frac{dp_c}{d\xi}\right) -$$

$$-(1-m)s\frac{dp_c}{d\xi} - (1-m)\frac{dp_2}{d\xi} - p_c\frac{ds}{d\xi} +$$

$$+K_{23}(u_2 - u_3) + K_{13}(u_1 - u_3) + \rho_3^0(1-m)g = 0.$$

С учетом (31) последнее соотношение имеет вид

$$\frac{dm}{d\xi}((\lambda_1 + 2\lambda_2)e_{11} + \beta_s K p_c(s)) =$$

$$= (1-m)\left((\lambda_1 + 2\lambda_2)\frac{de_{11}}{d\xi} + \beta_s K\frac{dp_c}{d\xi}\right) -$$

$$-(1-m)s\frac{dp_c}{d\xi} - (1-m)\frac{dp_2}{d\xi} - p_c\frac{ds}{d\xi} +$$

$$+K_{23}c\left(\frac{1-m^-}{1-m}-\frac{m^-}{m(1-s)}\right)+$$

$$+K_{13}c\frac{1-m^-}{1-m}+\rho_3^0(1-m)g. \qquad (36)$$

Окончательно приходим к следующей системе относительно s, m:

$$-\frac{dp_c}{ds}\frac{ds}{d\xi}=\frac{\mu_1}{K_0k_{01}}msc\frac{1-m^-}{1-m}-$$

$$-\frac{\mu_2}{K_0k_{02}}m(1-s)c\left(\frac{1-m^-}{1-m}-\frac{m^-}{m(1-s)}\right)+\bar{g},$$

$$\frac{dm}{d\xi}((\lambda_1+2\lambda_2)e_{11}+\beta_sKp_c(s))=$$

$$=(1-m)\left((\lambda_1+2\lambda_2)\frac{de_{11}}{d\xi}+\beta_sK\frac{dp_c}{d\xi}\right)-$$

$$-(1-m)s\frac{dp_c}{d\xi}-(1-m)\frac{dp_2}{d\xi}-p_c\frac{ds}{d\xi}+$$

$$+K_{23}c\left(\frac{1-m^-}{1-m}-\frac{m^-}{m(1-s)}\right)+$$

$$+K_{13}c\frac{1-m^-}{1-m}+\rho_3^0(1-m)g,$$

$$-c\frac{de_{11}}{d\xi}=\frac{du_3}{d\xi},$$

$$m(1-s)(u_2-u_3)=-K_0\frac{k_{02}}{\mu_2}(\frac{dp_2}{d\xi}-\rho_2^0g).$$

Автор выражает благодарность А.А. Папину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. — М., 1970.

2. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1978. — V. 5.

3. Шишмарев К.А. Тепломассоперенос в тающем снеге // Труды молодых ученых АлтГУ. — 2011. — №8.

4. Гоман В.А., Папин А.А., Шишмарев К.А. Численное решение двумерной задачи движения воды и воздуха в тающем снеге // Известия Алт. гос. ун-та. — 2014. — №1/2. DOI:10.14258/izvasu(2014)1.2-01.

5. Akhmerova I.G., Papin A.A. Solvability of the Boundary-Value Problem for Equations of One-Dimensional Motion of a Two-Phase Mixture // Mathematical Notes. — 2014. — Vol. 96. — № 2.

6. Папин А.А. Краевые задачи для уравнений двухфазной фильтрации. — Барнаул, 2009.