УДК 514

О рациональной тригонометрии в евклидовой и неевклидовой геометриях*

С.В. Пастухова, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

On Rational Trigonometry in Euclidean and Non-Euclidean Geometries

S.V. Pastukhova, O.P. Khromova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Основные понятия и законы рациональной тригонометрии для евклидовой геометрии впервые сформулированы в 2005 г. Н.Дж. Уайлдбергером. Позднее он расширяет ее понятия для гиперболической геометрии.

Суть «новой» тригонометрии заключается в переопределении тригонометрических соотношений без использования тригонометрических функций с помощью введения вместо традиционных расстояний и углов таких понятий, как квадрация (quadrance) и апертура (spread). Данный подход позволяет отказаться от использования тригонометрических таблиц и, как следствие, приближенных вычислений, т. е. он зачастую оказывается более точным.

Несмотря на то, что идеи рациональной тригонометрии вызвали неоднозначное впечатление у математического сообщества, ее методы нашли применение в решении теоретических и практических задач геометрии, комбинаторики, робототехники.

В настоящей работе в терминах рациональной тригонометрии получены формулы для вычисления скалярного и модуля векторного произведений векторов евклидова пространства; выведены основные законы рациональной сферической тригонометрии и рациональной тригонометрии Лобачевского.

Ключевые слова: рациональная тригонометрия, апертура, квадрация, сферическая тригонометрия, тригонометрия Лобачевского.

Basic concepts and rules of rational trigonometry for Euclidean geometry were first formulated in 2005 by N.J. Wildberger. Later, he expands its concepts for hyperbolic geometry.

The essence of the «new» trigonometry is to override the trigonometric ratios without the usage of trigonometric functions by introducing the traditional distances and angles of such concepts as quadrance and spread instead. This approach eliminates the usage of trigonometric tables and, as a result, approximate calculations. This means that it is often more accurate.

Despite the fact that the ideas of rational trigonometry caused a mixed impression in the mathematical community, methods of rational trigonometry have been used in solving problems in geometry, combinatorics, and robotics.

In this paper, formulas of the inner product and the module of cross product of the vectors of Euclidean space in terms of rational trigonometry are obtained; the basic rules of rational spherical and Lobachevsky's trigonometry are derived.

Key words: rational trigonometry, spread, quadrance, spherical trigonometry, Lobachevsky's trigonometry.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-17

1. Евклидова рациональная тригонометрия. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве заданы три точки $A(x_1, \dots, x_n)$, $B(y_1, \dots, y_n)$, $C(z_1, \dots, z_n)$. Следуя [1], введем основные понятия.

Определение 1. *Квадрацией* между точками A и B назовем величину, вычисляемую по формуле

$$Q(A,B) = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2.$$

Определение 2. *Апертурой* угла между прямыми AB и AC назовем величину, определяемую

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также в рамках Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (№ 2014.312.1.4).

как отношение квадраций

$$S(AB, AC) = \frac{Q(B,C)}{Q(A,B)},$$

где C – основание перпендикуляра из точки B на прямую AC.

Заметим, что апертура угла численно равна квадрату синуса этого угла

$$S(A) = \sin^2 A. \tag{1}$$

Отметим, что данные определения вводятся для евклидовой геометрии (для гиперболической геометрии — см. подробнее: [2]).

Пусть теперь даны точки A_1, A_2, A_3 с соответствующими апертурами S_1, S_2, S_3 и квадрациями Q_1, Q_2, Q_3.

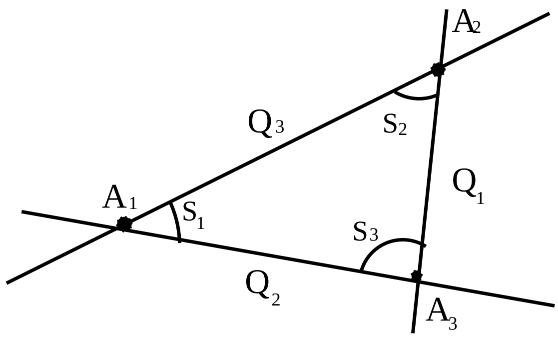

Рис. 1. Точки A_1, A_2, A_3 с соответствующими апертурами S_1, S_2, S_3 и квадрациями Q_1, Q_2, Q_3

Тогда справедливы **законы рациональной тригонометрии** (см. подробнее: [1]).

1. Тройная формула для квадраций. Три точки коллинеарны тогда и только тогда, когда
$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$
2. Теорема Пифагора. Треугольник $\overline{A_1A_2A_3}$ – прямоугольный тогда и только тогда, когда
$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$
3. Закон апертуры. Для любого треугольника $\overline{A_1A_2A_3}$ выполняется равенство
$$\frac{S_1}{Q_1} = \frac{S_2}{Q_2} = \frac{S_3}{Q_3}.$$
4. Закон пересечений. Для любого треугольника $\overline{A_1A_2A_3}$ справедливо
$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 4Q_1Q_2(1 - S_3).$$
5. Тройная формула для апертур. Для любого треугольника $\overline{A_1A_2A_3}$ выполняется
$$(S_1 + S_2 + S_3)^2 = 2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + 4S_1S_2S_3.$$

Теорема 1. *Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ определяется формулой*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(Q(A,D) - Q(B,D) + Q(C,B) - \\ -Q(A,C)).$$

Доказательство. Представим $\overrightarrow{CD}$ в виде:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$$

Тогда

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \\ = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}). \tag{2}$$

Рассмотрим

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB}) = \\ = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) - 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Отсюда

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(Q(A,B) + Q(A,C) - Q(B,C)).$$

Аналогично

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(Q(A,B) + Q(A,D) - Q(B,D)).$$

Подставляя полученное выше в (2), получаем требуемое. Теорема доказана.

Теорема 2. *Модуль векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ трехмерного евклидова пространства определяется по формуле*

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}[4Q(A,B)Q(A,C) - (Q(A,B) + \\ +Q(A,C) - Q(C,B))^2]^{1/2}.$$

Доказательство. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построеного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Тогда

$$S^2_{\text{пар}} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2,$$

или, используя определение 1 и теорему 1:

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|^2 = Q(A,B)Q(A,C) - \\ -\frac{1}{4}(Q(A,B) + Q(A,C) - Q(B,C))^2.$$

Приводя к общему знаменателю и извлекая корень, получаем требуемое. Теорема доказана.

Теорема 3. *Векторное произведение векторов $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, 0\}$ и $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, 0\}$ определяется по формуле*

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \pm\sqrt{SQ_1Q_2}\mathbf{k},$$

где знак выбирается исходя из условия, что $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]\}$ *— правая тройка векторов.*

Доказательство. Обозначим через S апертуру угла между векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и положим $Q_1 = Q(O, A) = x_1^2 + y_1^2$, $Q_2 = Q(O, B) = x_2^2 + y_2^2$.

С помощью закона пересечений для треугольника $\overline{OAB}$ и тождества Брахмагупты [3]

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \\ = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

заключаем равенство

$$S = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

или

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = SQ_1Q_2.$$

Следовательно, для векторного произведения выполняется

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ = \pm\sqrt{SQ_1Q_2}\mathbf{k}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Смешанное произведение векторов* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ *определяется по формуле*

$$\pm\frac{1}{2}(-Q(A,B)^2Q(C,D) - Q(A,B)Q(C,D)^2 - \\ -Q(A,C)^2Q(B,D) - Q(A,C)Q(B,D)^2 - \\ -Q(A,B)Q(A,C)Q(B,C) + \\ +Q(A,B)Q(A,C)Q(B,D) + \\ +Q(A,B)Q(A,C)Q(C,D) + \\ +Q(A,B)Q(A,D)Q(B,C) - \\ -Q(A,B)Q(A,D)Q(B,D) + \\ +Q(A,B)Q(A,D)Q(C,D) + \\ +Q(A,B)Q(B,C)Q(C,D) + \\ +Q(A,B)Q(B,D)Q(C,D) + \\ +Q(A,C)Q(A,D)Q(B,C) + \\ +Q(A,C)Q(A,D)Q(B,D) - \\ -Q(A,C)Q(A,D)Q(C,D) + \\ +Q(A,C)Q(B,C)Q(B,D) + \\ +Q(A,C)Q(B,D)Q(C,D) + \\ +Q(A,D)Q(B,C)Q(B,D) + \\ +Q(A,D)Q(B,C)Q(C,D) - \\ -Q(A,D)^2Q(B,C) - Q(A,D)Q(B,C)^2 - \\ -Q(B,C)Q(B,D)Q(C,D))^{\frac{1}{2}},$$

где знак «+» соответствует правой тройке векторов, а «−» – левой тройке.

Доказательство. Введем обозначения: $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AC}$. По классической формуле, смешанное произведение векторов $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ имеет вид:

$$(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \pm\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим квадрат этого выражения, учитывая то, что при транспонировании определитель не меняется:

$$V^2 = (\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})^2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{d}, \overrightarrow{d}) & (\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{d}, \overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) & (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) & (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) \end{vmatrix}.$$

Используя теорему 1 и раскрывая определитель, получаем требуемое. Теорема доказана.

2. Рациональная сферическая тригонометрия. Обозначим через A, B, D углы и через a, b, d — противолежащие им стороны сферического треугольника ABD. Будем считать, что ABD — эйлеров треугольник, т.е. все его стороны и углы меньше π. Углы и стороны треугольника ABD связаны (с точностью до циклической перестановки) следующими основными формулами сферической тригонометрии (см., например: [4]).

1. Сферическая формула синусов

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin d}{\sin D}. \tag{3}$$

2. Сферические формулы косинусов

$$\begin{aligned} &1) \cos a = \cos b \cos d + \sin b \sin d \cos A; \\ &2) \cos A = \sin B \sin D \cos a - \cos B \cos D. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Формулы пяти элементов

$$\begin{aligned} &1) \sin a \cos B = \cos b \sin d - \\ &\quad - \sin b \cos d \cos A; \\ &2) \sin A \cos b = \cos B \sin D + \\ &\quad + \sin B \cos D \cos a. \end{aligned} \tag{5}$$

Для прямоугольного сферического треугольника ($A = \frac{\pi}{2}$) эти формулы значительно упрощаются, и, в частности, из сферической формулы косинусов заключаем *сферическую теорему Пифагора*

$$\cos a = \cos b \cos d. \tag{6}$$

Кроме того, для решения прямоугольных сферических треугольников бывают полезны формулы Даламбера, связывающие все шесть элементов сферического треугольника.

$$\begin{aligned}
&1)\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-D}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+d}{2};\\
&2)\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-D}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-d}{2};\\
&3)\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+D}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+d}{2};\\
&4)\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+D}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-d}{2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Равенства (3)–(7) могут быть переопределены в терминах рациональной тригонометрии, и справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для эйлерова сферического треугольника ABD выполняются следующие равенства.*

1. *Рациональная сферическая формула синусов*

$$\frac{S(a)}{S(A)}=\frac{S(b)}{S(B)}=\frac{S(d)}{S(D)}.$$

2. *Рациональная сферическая формула косинусов*
   (a) $4C(a)C(b)C(d)=(S(b)S(d)C(A)-C(a)-$ $-C(b)C(d))^2$;
   (b) $4C(A)C(B)C(D) = (S(B)S(D)C(a)-$ $-C(A)-C(B)C(D))^2$;
3. *Рациональные формулы пяти элементов*
   (a) $4S(a)C(b)C(B)S(d) = (C(b)S(d)+$ $+S(a)C(B)-S(b)C(d)C(A))^2$;
   (b) $4S(A)C(B)C(b)S(D) = (C(B)S(D)+$ $+S(A)C(b)-S(B)C(D)C(a))^2$.

   Если же ABD — прямоугольный сферический треугольник ($A=\frac{\pi}{2}$), то справедливы:
4. *Рациональная сферическая теорема Пифагора*
$$C(a)=C(b)C(d).$$
5. *Рациональные формулы шести элементов*
   (a) $S\left(\frac{a}{2}\right)C\left(\frac{B-D}{2}\right)=S\left(\frac{A}{2}\right)S\left(\frac{b+d}{2}\right)$;
   (b) $S\left(\frac{a}{2}\right)S\left(\frac{B-D}{2}\right)=C\left(\frac{A}{2}\right)S\left(\frac{b-d}{2}\right)$;
   (c) $C\left(\frac{a}{2}\right)C\left(\frac{B+D}{2}\right)=S\left(\frac{A}{2}\right)C\left(\frac{b+d}{2}\right)$;
   (d) $C\left(\frac{a}{2}\right)S\left(\frac{B+D}{2}\right)=C\left(\frac{A}{2}\right)C\left(\frac{b+d}{2}\right)$,

где
$$C(a)=\cos^2 a=1-S(a). \tag{8}$$

Доказательство. Формула (3) с учетом (1) преобразуется к виду:

$$\frac{S(a)}{S(A)}=\frac{S(b)}{S(B)}=\frac{S(d)}{S(D)}.$$

Докажем первую рациональную сферическую формулу косинусов. Для этого обе части равенства $\cos a = \cos b\cos d + \sin b\sin d\cos A$ из (4) возведем в квадрат и перепишем в виде: $2\cos a\cos b\cos d = \sin^2 b\sin^2 d\cos^2 A - \cos^2 a-$ $-\cos^2 b\cos^2 d$. Снова возводя данное тождество в квадрат и применяя обозначения (1) и (8), получаем $4C(a)C(b)C(d) = (S(b)S(d)C(A) - C(a)-$ $-C(b)C(d))^2$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается истинность второй рациональной сферической формулы и рациональных формул пяти элементов. В последнем случае, очевидно, используется тождество (5).

Далее будем считать, что ABD — прямоугольный сферический треугольник ($A=\frac{\pi}{2}$). Тогда из равенств (6)–(7), применяя (1) и (8), легко заключаем требуемое.

Теорема доказана.

3. Рациональная тригонометрия на плоскости Лобачевского. Следуя терминологии работы [2], введем следующие понятия на плоскости Лобачевского.

Определение 3. *Квадрацией* между точками a_1 и a_2 назовем величину

$$Q(a_1,a_2)=-\operatorname{sh}^2(\omega(a_1,a_2))=Q(\omega), \tag{9}$$

где $\omega(a_1,a_2)$ — гиперболическое расстояние.

Определение 4. *Апертурой* угла между прямыми L_1 и L_2 назовем величину

$$S(L_1,L_2)=\sin^2(\theta(L_1,L_2))=S(\theta), \tag{10}$$

где θ — гиперболический угол.

Как и ранее, введем величину

$$C(\theta)=1-S^2(\theta)=\cos^2(\theta(L_1,L_2)).$$

Обозначим через A,B,D углы, через a,b,d — противолежащие им стороны гиперболического треугольника ABD, а через k — постоянную Лобачевского. Тогда имеют место следующие основные формулы (см., например: [4]).

1. Аналог теоремы синусов
$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{\operatorname{sh}\frac{d}{k}}{\sin D}. \tag{11}$$
2. Аналог теоремы косинусов
$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k}-\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\cos A. \tag{12}$$
3. Соотношение, связывающее сторону и три угла:
$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\frac{\cos A+\cos B\cos D}{\sin B\sin D}. \tag{13}$$
   Если к тому же треугольник A,B,D прямоугольный ($D=\frac{\pi}{2}$) , то выполняются
4. Аналог теоремы Пифагора
$$\operatorname{ch}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}. \tag{14}$$

5. Решения прямоугольного треугольника

$$
\begin{aligned}
&1) \operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{d}{k}\sin A;\\
&2) \operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{d}{k}\sin B;\\
&3) \operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg} A;\\
&4) \operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{tg} B;\\
&5) \operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{th}\frac{d}{k}\cos B;\\
&6) \operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{th}\frac{d}{k}\cos A;\\
&7) \cos B = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\sin A;\\
&8) \cos A = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin B;\\
&9) \operatorname{ch}\frac{d}{k} = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Равенства (11)–(15) могут быть переопределены в терминах работы [2], и справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Для треугольника ABD на плоскости Лобачевского выполняются следующие равенства.*

1. *Рациональный аналог теоремы синусов*

$$\frac{Q(\frac{a}{k})}{S(A)} = \frac{Q(\frac{b}{k})}{S(B)} = \frac{Q(\frac{d}{k})}{S(D)}.$$

2. *Рациональный аналог теоремы косинусов*

$$
\begin{aligned}
Q\left(\frac{a}{k}\right) = Q\left(\frac{d}{k}\right) + Q\left(\frac{b}{k}\right) -\\
-Q\left(\frac{d}{k}\right)Q\left(\frac{b}{k}\right)\times(1+C(A))+\\
+2\sqrt{\left(1-Q\left(\frac{b}{k}\right)\right)\left(1-Q\left(\frac{d}{k}\right)\right)}\times\\
\times\sqrt{Q\left(\frac{b}{k}\right)Q\left(\frac{d}{k}\right)C(A)}.
\end{aligned}
$$

3. *Рациональное соотношение, связывающее сторону и три угла:*

$$
\begin{aligned}
1-Q\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{C(A)+C(B)C(D)}{S(B)S(D)} +\\
+2\frac{\sqrt{C(A)C(B)C(D)}}{S(B)S(D)}.
\end{aligned}
$$

Если же ABD — прямоугольный треугольник ($D = \frac{\pi}{2}$), то справедливы

4. *Рациональный аналог теоремы Пифагора*

$$1-Q\left(\frac{d}{k}\right) = \left(1-Q\left(\frac{a}{k}\right)\right)\left(1-Q\left(\frac{b}{k}\right)\right).$$

5. *Рациональные решения прямоугольного треугольника*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ Q(\frac{a}{k}) = Q(\frac{d}{k})S(A);\\
&(b)\ Q(\frac{b}{k}) = Q(\frac{d}{k})S(B);\\
&(c)\ \frac{Q(\frac{a}{k})}{1-Q(\frac{a}{k})} = Q(\frac{b}{k})\frac{S(A)}{C(A)};\\
&(d)\ \frac{Q(\frac{b}{k})}{1-Q(\frac{b}{k})} = Q(\frac{a}{k})\frac{S(B)}{C(B)};\\
&(e)\ \frac{Q(\frac{a}{k})}{1-Q(\frac{a}{k})} = \frac{Q(\frac{d}{k})}{1-Q(\frac{d}{k})}C(B);\\
&(f)\ \frac{Q(\frac{b}{k})}{1-Q(\frac{b}{k})} = \frac{Q(\frac{d}{k})}{1-Q(\frac{d}{k})}C(A);\\
&(g)\ C(B) = S(A)(1-Q(\tfrac{b}{k}));\\
&(h)\ C(A) = S(B)(1-Q(\tfrac{a}{k}));\\
&(i)\ Q(\tfrac{d}{k}) = 1-\frac{C(A)}{S(A)}\frac{C(B)}{S(B)}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Проверим справедливость рационального аналога теоремы синусов. Для этого возведем обе части равенства (11) в квадрат

$$\frac{\operatorname{sh}^2\frac{a}{k}}{\sin^2 A} = \frac{\operatorname{sh}^2\frac{b}{k}}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{sh}^2\frac{d}{k}}{\sin^D}.$$

Откуда ввиду обозначений (9) и (10) получим

$$\frac{Q(\frac{a}{k})}{S(A)} = \frac{Q(\frac{b}{k})}{S(B)} = \frac{Q(\frac{d}{k})}{S(D)}.$$

Для доказательства рационального аналога теоремы косинусов возведем в квадрат обе части тождества (12) и, применяя равенство $\operatorname{ch}^2 x = 1+\operatorname{sh}^2 x$, имеем $1+\operatorname{sh}^2\frac{a}{k} = (1+\operatorname{sh}^2\frac{b}{k})(1+\operatorname{sh}^2\frac{d}{k}) + \operatorname{sh}^2\frac{b}{k}\operatorname{sh}^2\frac{d}{k}\cos^2 A - 2\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k}\cos A$. Отсюда с помощью (9) и (10) заключаем $Q(\frac{a}{k}) = Q(\frac{d}{k}) + Q(\frac{b}{k}) - Q(\frac{d}{k})Q(\frac{b}{k})(1+C(A)) + 2\sqrt{(1-Q(\frac{b}{k}))(1-Q(\frac{d}{k}))Q(\frac{b}{k})Q(\frac{d}{k})C(A)}$.

Аналогичными рассуждениями из (13) получается рациональное соотношение, связывающее сторону и три угла треугольника ABD.

Далее будем считать, что ABD — прямоугольный сферический треугольник ($D = \frac{\pi}{2}$). Возводя в квадрат (14) и применяя равенство $\operatorname{ch}^2 x = 1+\operatorname{sh}^2 x$, имеем $(1+\operatorname{sh}^2\frac{d}{k}) = (1+\operatorname{sh}^2\frac{a}{k})(1+\operatorname{sh}^2\frac{b}{k})$. Далее, используя обозначения (9) и (10), получаем требуемое.

Аналогичными рассуждениями из (15) устанавливается истинность рациональных решений прямоугольного треугольника. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Wildberger N.J. Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry. — Sydney, 2005.

2. Wildberger N.J. Universal Hyperbolic Geometry I: Trigonometry // Geom. Dedicata. — 2013. — V. 163.

3. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.П. Новые встречи с геометрией. — М., 1978. (Серия «Библиотека математического кружка»).

4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия : учеб. для вузов. — 5-е изд. — М., 1971.