УДК 519.87

Математическая модель изотермической внутренней эрозии*

А.А. Папин[1], *В.А. Вайгант*[2], *А.Н. Сибин*[1]

[1] Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)
[2] Боннский университет (Бонн, Германия)

Mathematical Model of Isothermal Internal Erosion

A.A. Papin[1], *W.A. Weigant*[2], *A.N. Sibin*[1]

[1] Altai State University (Barnaul, Russia)
[2] University of Bonn (Bonn, Germany)

Рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии без учета деформации пористой среды. При достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Дается постановка задачи и проводится преобразование системы уравнений. В результате преобразований для насыщенности водной фазы возникает вырождающееся на решении параболическое уравнение, для давления — эллиптическое уравнение и уравнение первого порядка для пористости грунта. Имеется аналогия с классической моделью Маскета — Леверетта. Описаны гипотезы, которые определяют интенсивности фазового перехода. Кроме того, приведен краткий обзор моделей внутренней суффозии. Рассматривается случай автомодельного движения без учета силы тяжести и скорости твердого скелета. Получено уравнение для концентрации подвижных твердых частиц грунта.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пористая среда, суффозия, фазовый переход, насыщенность.

In this paper, a mathematical model of isothermal internal erosion without deformation of a porous medium is studied. Removal of soil particles from a flow occurs at a certain magnitude of filtration velocity. Equations of mass conservation of water, moving solids, and stationary porous skeleton along with Darcy's law for water and moving solid particles and equation for the intensity of suffusion aquifer are used as a mathematical model of the problem. Section 1 of this paper describes the problem formulation and development of the system of equations. Results of the development are a parabolic equation for water phase saturation, elliptical equation for pressure, and equation of the first order for soil porosity. The developed model demonstrates similarity with the classical Masket — Leverett model. Assumptions describing the phase transition intensity are considered in section 2. Among other things, a brief review of internal erosion models is provided. A case of self-similar motion without consideration of gravity forces and a velocity of the solid skeleton is also investigated. An equation for concentration of soil flexible solid particles is deduced.

Key words: multiphase flow, porous medium, suffusion, phase transition, saturation.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-16

1. Постановка задачи. Рассматриваются процессы фильтрации подземных вод и внутренней суффозии. Грунт моделируется как трехфазная сплошная пористая среда. Поры полностью заполнены смесью воды (i = 1) и подвижных твердых частиц (i = 2). Доля пор в грунте (i = 3) определяется пористостью $\phi = (V_1 + V_2)/V$, где $V = V_1+V_2+V_3$ — общий объем грунта; $V_1,\ V_2,\ V_3$ — соответственно объемы воды, подвижных твердых частиц и скелета грунта.

Уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазового перехода имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) = 0; \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №2014/2 и гранта РФФИ №13-08-01097.

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) = \dot{m}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_3 \vec{u}_3) = -\dot{m}, \quad (3)$$

где $\dot{m}$ — интенсивность фазового перехода (суффозионный поток); $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ — соответственно истинные скорости воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\rho_1 = \phi s_1 \rho_1^0$, $\rho_2 = \phi s_2 \rho_2^0$, $\rho_3 = (1-\phi)\rho_3^0$ — приведенные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета; $s_1 = V_1/(V_1+V_2), s_2 = V_2/(V_1+V_2)$ — концентрации воды (насыщенность) и подвижных твердых частиц в порах; $\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0$ — истинные плотности воды, подвижных твердых частиц грунта и скелета грунта; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ — оператор градиента, $x = (x_1, x_2, x_3)$. В рассматриваемом случае $\rho_3^0 = \rho_2^0$, так как подвижные частицы захватываются суффозионным потоком из грунта.

Уравнения сохранения импульса для воды и подвижных твердых частиц грунта берем в виде [2–4]

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i} (\triangledown p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \ i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь $K_0(\phi)$ — симметрический тензор фильтрации пористой среды; $\overline{k}_{0i}$ — относительные фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$, $k_{0i}|_{s_i=0} = 0$, $0 \leq s_i \leq 1$); μ_i — коэффициенты динамической вязкости; $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести; p_1, p_2 — соответственно давления первой и второй фаз.

Пусть $s = s_1$, тогда $1 - s = s_2$. Разность фазовых давлений удовлетворяет соотношению вида [2; 4]

$$p_2 - p_1 = p_c(s, x) \geq 0, \quad (5)$$

где p_c — заданная функция, обладающая свойствами [5; 6]

$$p_c(x, s) = p_0(x) j(s), \quad p_0(x) > 0, \quad j(s) \geq 0,$$

$$j(0) = 0, \quad j(1) = 1, \quad \frac{\partial j}{\partial s} < 0.$$

В дальнейшем предполагается, что скелет грунта неподвижен ($\vec{u}_3 = 0$), истинные плотности ρ_i^0 постоянны. В этом случае система приводится к эллиптико-параболической системе [3] и уравнению кинетики. Действительно, используя сделанные предположения вместо (1)–(4), получим

$$\frac{\partial (s\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\phi \vec{u}_1) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial (1-s)\phi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\phi \vec{u}_2) = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial (1-\phi)}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{\rho_3^0}; \quad (8)$$

$$s_i \phi \vec{u}_i = -K_0(\phi) k_{0i} (\triangledown p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad k_{0i} = \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i}. \quad (9)$$

Сложив уравнения (6), (7) и (8), выводим

$$\nabla \cdot (s\phi \vec{u}_1 + (1-s)\phi \vec{u}_2) = 0. \quad (10)$$

Положим,

$$\vec{v} = s\phi \vec{u}_1 + (1-s)\phi \vec{u}_2.$$

Используя (9) и (5) для $\vec{v}$ получим следующее представление:

$$\begin{aligned}
-\vec{v} &= K_0(\phi)(k_{01}(\triangledown p_1 + \rho_1^0 \vec{g}) + \\
&+ k_{02}(\triangledown (p_1 + p_c) + \rho_2^0 \vec{g})) = \\
&= K_0(k(\triangledown p_1 + \frac{k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s} \triangledown s) + \\
&+ k_{02} \triangledown_x p_c + \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = \\
&= K_0(k \triangledown (p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi) + \\
&+ k \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \triangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \\
&+ k_{02} \triangledown_x p_c + \vec{g}(\rho_2^0 k_{02} + \rho_1^0 k_{01})) = \\
&= K_0(\phi) k(s) \triangledown p + \vec{f},
\end{aligned} \quad (11)$$

где p — так называемое «приведенное» давление [3]:

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi, \quad (12)$$

а также введены обозначения:

$$k(s) = k_{01} + k_{02},$$

$$\vec{f} = K_0(k_{02} \triangledown_x p_c + k \int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \triangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + (k_{01}\rho_1^0 + k_{02}\rho_2^0)\vec{g}).$$

Здесь символ $\triangledown_x$ применяется только по переменной x, входящей явно, например:

$$\triangledown_x p_c(s, x) = \left(\frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_1}, \frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_2}, \frac{\partial p_c(s,x)}{\partial x_3} \right).$$

С учетом (12) для $\vec{v}_1 = s\phi \vec{u}_1$ имеем

$$-\vec{v}_1 = K_0 a \triangledown s + K_0 k_{01} \triangledown p + \vec{f}_0, \quad (13)$$

где

$$a = -\frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s};$$

$$\vec{f}_0 = K_0 k_{01} (\int_s^1 \frac{k_{02}(\xi)}{k(\xi)} \triangledown_x \frac{\partial p_c(\xi, x)}{\partial \xi} d\xi + \rho_1^0 \vec{g}).$$

Используя (11), находим

$$K_0 k_{01} \bigtriangledown p = -k_{01}(\vec{v} + \vec{f})/k.$$

Тогда вместо (13) получим

$$-\vec{v}_1 = K_0 a \bigtriangledown s - b\vec{v} + \vec{F}, \qquad (14)$$

где

$$\vec{F} = \vec{f}_0 - b\vec{f}, \quad b(s) = \frac{k_{01}}{k}.$$

Подставляя (13) в (6), привлекая (8) и (10), приходим к системе уравнений относительно s, p и ϕ:

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} = \bigtriangledown \cdot (K_0 a \bigtriangledown s + K_0 k_{01} \bigtriangledown p + \vec{f}_0); \qquad (15)$$

$$\bigtriangledown \cdot (K_0(\phi)k(s) \bigtriangledown p + \vec{f}) = 0; \qquad (16)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\dot{m},$$

Используя (14), приходим к следующей эквивалентной системе относительно s, p, ϕ и $\vec{v}$:

$$\frac{\partial s\phi}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 a \bigtriangledown s - b\vec{v} + \vec{F});$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0;$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\dot{m};$$

$$-\vec{v} = K_0(\phi)k(s) \bigtriangledown p + \vec{f}.$$

Замечание 1. Решение начально краевой задачи для системы (8), (15), (16), в которой $\dot{m}$ является функцией ϕ, s, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, можно построить следующим образом: подставляя в (15), (16), вместо ϕ известную функцию ϕ_0, приходим к эллиптико-параболической системе для p и s (данная система исследовалась в [3; 5]). Найденные значения p и s позволяют определить $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и тем самым из (8) найти новое значение ϕ.

Особенностью рассматриваемой задачи является возможное вырождение на решение уравнения (15), поскольку $a(0) = a(1) = 0$, а коэффициент фильтрации, как правило, задается следующим образом: $K_0 = K_0'\phi^3/(1-\phi)^2$ [6]. Кроме того, пористость и насыщенность должны удовлетворять условиям $0 \le s \le 1$, $0 \le \phi < 1$.

Замечание 2. Частный случай модели (6)–(9) при $p_1 = p_2$ рассматривается в работах [7–14].

2. Интенсивность фазового перехода. На основе обработки экспериментальных данных были предложены различные формулы для интенсивности фазового перехода. В работе [7] суффозионный поток задается следующим образом:

$$\dot{m}_{er} = \rho_2 \lambda (1-\phi) s_2 ||\vec{v}_2||, \qquad (17)$$

где λ — определяемая экспериментально функция (отвечает за устойчивость грунта суффозионному воздействию); $\vec{v}_2 = \phi(1-s)(\vec{u}_2 - \vec{u}_3)$ — поток подвижных частиц грунта.

Обобщение формулы (17) предложено в серии работ [6–8]:

$$: \dot{m} = \dot{m}_{er} - \dot{m}_{dep}, \qquad (18)$$

где $\dot{m}_{er}$ — поток твердых частиц (процесс суффозии); $\dot{m}_{dep}$ — поток осевших твердых частиц (процесс кольматации).

Для определения $\dot{m}_{dep}$ в работе [7] предлагается использовать соотношение

$$\dot{m}_{dep} = \rho_2 \lambda (1-\phi) \frac{s_2^2}{s_{cr}} ||\vec{v}_2||. \qquad (19)$$

Здесь s_{cr} — критическое значение концентрации подвижных твердых частиц грунта, при достижении которого ($s_2 = s_{cr}$) процессы суффозии и кольматации уравновешивают друг друга. Подставив (17) и (19) в (18), получим соотношение [7]

$$\dot{m} = \rho_2^0 \lambda (1-\phi)\phi(s_2 - \frac{s_2^2}{s_{cr}})||\vec{v}_2||.$$

В работе [15] сделан анализ экспериментов, из которого следует, что суффозионный процесс начинается после достижения скоростью фильтрации критического значения v_k. Также из экспериментов получено соотношение для определения критической скорости фильтрации воды

$$v_k = 4.2\phi \sqrt[9]{g\nu^7} \frac{1}{\sqrt[3]{37.21 \frac{\nu K_0}{\phi g}}},$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости воды; g — модуль ускорения силы тяжести.

В работах [6; 11] для $\dot{m}$ используется зависимость

$$\dot{m} = \begin{cases} \lambda \rho_3^0 (1-\phi)(1-s)\phi|\vec{v}_2 - \vec{v}_k|, |\vec{v}_2| \ge |\vec{v}_k|; \\ 0, |\vec{v}_2| < |\vec{v}_k|. \end{cases}$$

В работах S. Bonelli (см. например: [16, с. 187]) движение воды, подвижных частиц и отрыв частиц от скелета моделируются на основе подходов, развитых в задачах с неизвестной границей. Вода и подвижные частицы грунта рассматриваются как однородная смесь (несжимаемая вязкая жидкость со стандартной реологией), которая движется со скоростью $\vec{u}$ и имеет плотность $\rho = \phi\rho_1^0 + (1-\phi)\rho_2^0$. Неизвестная граница Γ между областями, занятыми смесью и твердым скелетом, определяется из уравнения переноса вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla \psi = 0,$$

где функция ψ имеет следующие свойства: $\psi = 0$ на Γ, $\psi > 0$ — в твердом скелете, а в области фильтрации $\psi < 0$; $\vec{c} = c_\Gamma \vec{n}$, $\vec{n}$ — вектор нормали к границе Г. Скорость движения последней равна

$$c_\Gamma = \begin{cases} k_d(\tau - \tau_c), \tau \geq \tau_c; \\ 0, \tau < \tau_c. \end{cases}$$

где k_d — коэффициент пропорциональности; τ — модуль касательного напряжения

$$\tau = \sqrt{(T\vec{n})^2 - (\vec{n}T\vec{n})^2};$$

τ_c — критическое значение касательного напряжения, при достижении которого начинается суффозионный процесс.

Тензор напряжений и тензор скоростей деформации имеют вид:

$$T = -PI + 2\mu_w D(\vec{u});$$

$$D(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\bigtriangledown\vec{u} + (\bigtriangledown\vec{u})^T).$$

В данном подходе интенсивность фазового перехода определяется формулой

$$\dot{m} = \rho(c_\Gamma - \vec{u} \cdot \vec{n}).$$

В настоящей работе предлагается использовать следующее соотношение для определения суффозионного потока:

$$\dot{m} = \delta(s)R(\phi)max\{|\vec{v}_1| - v_k, 0\}. \tag{20}$$

Здесь

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, \quad s \geq 1; \\ 1 - s, \quad 0 < s < 1; \\ 1, \quad s \leq 0. \end{cases}$$

$$R(\phi) = \begin{cases} 1, \quad \phi \geq 1; \\ \phi(1-\phi), \quad 0 < s < 1; \\ 0, \quad \phi \leq 0. \end{cases}$$

3. Автомодельный случай. Рассмотрим одномерное движение при условиях $\vec{g} = 0$, $\vec{v_3} = 0$. Система (6)–(8) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial(s\phi)}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0; \tag{21}$$

$$\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}; \tag{22}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{\rho_2^0}. \tag{23}$$

Решение системы (21)–(23) ищется в области $(-\infty, ct)$ в предположении, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = x - ct$ (c — неизвестная постоянная). Вместо (21)–(23) получим

$$-c\frac{\partial(s\phi)}{\partial\xi} + \frac{\partial v_1}{\partial\xi} = 0; \tag{24}$$

$$-c\frac{\partial(1-s)\phi}{\partial\xi} + \frac{\partial v_2}{\partial\xi} = \frac{\dot{m}}{\rho_2^0}; \tag{25}$$

$$-c\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\xi} = -\frac{\dot{m}}{\rho_2^0}, \tag{26}$$

Здесь искомыми являются функции $s(\xi)$, $\phi(\xi)$, v_1, v_2 и постоянная c.

Из (24) следует

$$v_1 - cs\phi = A_1. \tag{27}$$

Складывая уравнения (25) и (26), получим

$$v_2 - c(1 - s\phi) = A_2, \tag{28}$$

где A_1 и A_2 — постоянные. Определим A_1 и A_2 из следующих краевых условий: $v_1|_{\xi=0} = v_1^+$, $v_2|_{\xi=0} = v_2^+$, $s|_{\xi=0} = s^+$, $\phi|_{\xi=0} = \phi^+$, $v_1|_{\xi->-\infty} = v_1^-$, $v_2|_{\xi->-\infty} = v_2^-$, $s|_{\xi->-\infty} = s^-$, $\phi|_{\xi->-\infty} = \phi^-$.

Из (27) и (28) следует

$$v_1^- - cs^-\phi^- = A_1;$$
$$v_2^- - c(1 - s^-\phi^-) = A_2;$$
$$v_1^+ - cs^+\phi^+ = A_1;$$
$$v_2^+ - c(1 - s^+\phi^+) = A_2.$$

Рассмотрим случай, когда

$$s^+\phi^+ \neq s^-\phi^-, \quad v_1^+ \neq v_1^+-, \quad v_2^+ \neq v_2^-.$$

Положим,

$$v_1^- = \frac{v_1^+ s^- \phi^-}{s^+\phi^+}, \quad v_2^- = \frac{v_1^+ - v_1^-}{s^+\phi^+}, \quad v_2^+ = \frac{v_1^+}{s^+\phi^+} - v_1^+,$$

тогда

$$A_1 = 0, \ \ A_2 = 0, \ \ c = \frac{v_1^+}{s^+\phi^+}, \ \ s^+ = \frac{v_1^+}{(v_2^+ + v_1^+)\phi^+}.$$

При сделанных ранее предположениях из уравнения (9) выводим

$$v_1 = -K_0 k_{01}\frac{dp_1}{d\xi}; \tag{29}$$

$$v_2 = -K_0 k_{02}\frac{dp_2}{d\xi}. \tag{30}$$

Вычитая из равенства (30) и (29), предварительно домножив (29) на k_{02}, а (30) на k_{01}, получим

$$k_{01}c(1 - s\phi) - k_{02}cs\phi = -K_0 k_{01} k_{02}\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{ds}{d\xi}. \tag{31}$$

Разделив (31) на k и K_0, получим уравнение для s:

$$a(s)\frac{ds}{d\xi} = \frac{k_{01}c}{kK_0} - \frac{cs\phi}{K_0}.$$

На множестве $A = \{\xi | 0 < s < 1; \ 0 < \phi < 1; \ |v_1| > v_k\}$ имеем $v_1 = |c|s\phi > 0$ и $\dot{m} \neq 0$. Уравнение (8) с учетом (20) на множестве A имеет вид:

$$c\frac{d\phi}{d\xi} = \lambda(1-s)\phi(1-\phi)(|c|s\phi - v_k).$$

Последняя система уравнений определяет искомые насыщенность s и пористость ϕ.

Заключение. В работе дан краткий литературный обзор моделей внутренней эрозии почвы. Построена новая изотермическая модель суффозионного выноса грунта и рассмотрено автомодельное решение (типа бегущей волны).

Библиографический список

1. Korobkin A., Khabakhpasheva T., Papin A. Waves Propagating along a Channel with Ice Cover // European Journal of Mechanics B/Fluids. — 2014. — V. 47.

2. Хабиров В.В., Хабиров С.В. Разработка газогидратов современными технологиями // Труды Института механики УНЦ РАН. — Уфа, 2010.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

4. Gard S.K., Pritchett J.W. Dynamics of Gas — Fluidized Beds. Journal of Applied Phisics // Journal of Applied Phisics. —1975. — Vol. 46, №10.

5. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. — Барнаул, 2009.

6. Wang J., Walters D.A., Settari A., Wan R.G. Simulation of Cold Heavy Oil Production Using an Integrated Modular Approach with Emphasis on Foamy Oil Flow and Sand Production Effects // 1st Heavy Oil Conference — 2006.

7. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Hydro-Mechanical Aspects of the Sand Production Problem // Transport in Porous Media. — 1996. — №22.

8. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou R. Sand Erosion in Axial Flow Conditions // Transport in Porous Media. — 2001. — №45.

9. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. — 2006.

10. Папин А.А., Гагарин Л.А., Шепелев В.В., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Математическая модель фильтрации грунтовых вод, контактирующих с многолетнемерзлыми породами // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — №1/2 (77).

11. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное моделирование процесса суффозионного выноса грунта // Сб. тр. 17-й регион. конф. по математике «МАК-2014». — Барнаул, 2014.

12. Сибин А.Н. Математическая модель деформации мерзлого грунта вблизи термокарстовых озер // Анализ, геометрия и топология : сб. тр. Всерос. молодеж. школы-семинара. — Барнаул, 2013.

13. Папин А.А., Сибин А.Н., Хворых Д.П. Об одной задаче фильтрации в условиях вечной мерзлоты // Сб. тр. 16-й регион. конф. по математике «МАК-2013». — Барнаул, 2013.

14. Кузиков С.С., Папин А.А., Сибин А.Н. Численное исследование профильной задачи внутренней эрозии в межмерзлотном водоносном слое // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — №1/2 (85).

15. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. — Ленинград, 1983.

16. Bonelli S. Erosion of Geomaterials. — UK, 2012.