УДК 514.76

Об одном многообразии Леви экспоненты $2p$

В.В. Лодейщикова

Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова (Барнаул, Россия)

On a Levi Variety of Exponent $2p$

V.V. Lodeyshchikova

Polzunov Altai State Technical University (Barnaul, Russia)

Для произвольного класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любого элемента из G принадлежит M. Класс $L(\mathcal{M})$ групп называется классом Леви, порожденным $\mathcal{M}$.

Классы Леви были введены под влиянием работы Ф. Леви, в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями. Р.Ф. Морс доказал, что если $\mathcal{M}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ — также многообразие групп. Из работ А.И. Будкина следует, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием групп. Ранее автором найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (за исключением одного).

Настоящая работа продолжает исследования классов Леви. В ней доказано, что для локально конечного многообразия групп $\mathcal{M}$ класс Леви, порожденный $\mathcal{M}$, также является локально конечным многообразием. Дано описание подпрямо неразложимых групп, принадлежащих классу Леви, порожденному многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p — простое число, $p \neq 2, 3$).

Также показано, что любая группа, принадлежащая классу Леви, порожденному многообразием групп экспоненты $2p$ с коммутантом экспоненты p, в которых квадраты элементов перестановочны (p — простое число, $p \neq 2$), является 3-метабелевой группой.

Ключевые слова: группа, многообразие, квазимногообразие, метабелева группа, класс Леви.

For an arbitrary class of groups $\mathcal{M}$ we denote by $L(\mathcal{M})$ the class of all groups G where the normal closure of every element of G belongs to $\mathcal{M}$. The class $L(\mathcal{M})$ is called a Levi class generated by $\mathcal{M}$.

Levi classes were introduced under the influence of a paper by F. Levi with the classification of groups with abelian normal closures. R.F. Morse proved that if the class $\mathcal{M}$ is a variety of groups, then $L(\mathcal{M})$ is also a variety of groups. From the works of A.I. Budkin it follows that if $\mathcal{M}$ is a quasivariety of groups, then $L(\mathcal{M})$ is a quasivariety of groups, too. Earlier we found descriptions of the Levi classes generated by the almost Abelian quasivarieties of nilpotent groups (except one).

In this article, we continue to investigate the Levi classes. It is proved that for a locally finite variety of groups $\mathcal{M}$, Levi class generated by $\mathcal{M}$ is also a locally finite variety. We describe subdirectly irreducible groups of Levi class generated by the variety of groups of exponent $2p$ with the commutant exponent p, in which squares of elements are commuting (p is a prime, $p \neq 2, 3$).

Also, we demonstrate that any group of Levi class generated by the variety of groups of exponent $2p$ with the commutant exponent p, in which squares of elements are commuting (p is a prime, $p \neq 2$), is a 3-metabelian group.

Key words: group, variety, quasivariety, metabelian group, Levi class.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-15

Для некоторого класса групп $\mathcal{M}$ обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ групп будем называть *классом Леви, порожденным* $\mathcal{M}$. Классы Леви были введены в работе Л.К. Каппе [1] под влиянием работы Ф. Леви [2], в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. Р. Ф. Морсом [3] доказано, что если $\mathcal{M}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ — также многообразие групп. Из работы А.И. Будкина [4] следует, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием групп.

Как обычно, $var\mathcal{K}$ — многообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$, $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$ (пишем $varG$ и qG, если $\mathcal{K} = \{G\}$). Обозначим через $\mathcal{N}_c$ многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, через $F_n(\mathcal{M})$ — свободную группу ранга n в квазимногообразии $\mathcal{M}$, через $Syl_p(G)$ — некоторую силовскую p-подгруппу группы G. Всюду в работе при написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будут опускаться.

А.И. Будкин [4] доказал, что если $\mathcal{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и в каждой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В действительности в доказательстве этого результата отсутствие элементов порядка 5 нужно было только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(q\mathcal{K})$ нильпотентна класса ≤ 4, поэтому в работе А.И. Будкина и Л.В. Тараниной [5] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

А.И. Будкиным [6] доказано, что если $\mathcal{M}$ — нильпотентное квазимногообразие, $\overline{\mathcal{M}}$ — множество всех конечно порожденных групп из $\mathcal{M}$, то выполняется равенство $L(q\overline{\mathcal{M}}) = qL(\overline{\mathcal{M}})$. Там же установлено, что если $\mathcal{N}$ — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп, $\mathcal{N}_0$ — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, то аналогичное утверждение неверно, и справедливы строгие включения $q\mathcal{N}_0 \subset L(q\mathcal{N}_0)$ и $q\mathcal{N} \subset L(q\mathcal{N})$, откуда, в частности, следуют неравенства $L(q\mathcal{N}_0) \neq qL(\mathcal{N}_0)$ и $L(q\mathcal{N}) \neq qL(\mathcal{N})$.

В работе [6] также показано, что квазимногообразия $L(q\mathcal{N})$ и $L(q\mathcal{N}_0)$ замкнуты относительно свободных произведений, каждое из этих квазимногообразий содержит не более одного максимального собственного подквазимногообразия, и если квазимногообразие $\mathcal{M}$ замкнуто относительно свободных произведений, то таковым же является квазимногообразие $L(\mathcal{M})$.

Рассмотрим группы, имеющие следующие представления в $\mathcal{N}_2$:

$$H_p = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = 1);$$

$$H_{p^s} = \mathrm{gr}(x, y \parallel [x, y]^p = x^{p^s} = y^{p^s} = 1),$$

где $s \in \mathbb{N}$, p — простое число.

Набор qH_{p^s} (исключая qH_{2^1}), qH_p, $qF_2(\mathcal{N}_2)$ (p — простое число) представляет собой полный список почти абелевых квазимногообразий нильпотентных групп (т.е. неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). В работах [7–9] найдены описания классов Леви, порожденных почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (исключая $L(qH_2)$).

В [9] доказано, что если $\mathcal{K}$ — произвольный класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n (n — фиксированное натуральное число, $n \geq 2$) с коммутантами экспоненты 2, и в каждой группе из $\mathcal{K}$ элементы порядка 2^m $(0 < m < n)$ содержатся в центре этой группы, то класс Леви, порожденный квазимногообразием $q\mathcal{K}$, совпадает с многообразием нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 2^n.

Также в [9] было доказано существование класса $\mathcal{K}$ такого, что $\mathcal{K}$ — класс нильпотентных ступени не выше 2 групп экспоненты 8 с коммутантами экспоненты 2 и во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 3.

В [10] установлено существование класса $\mathcal{K}$ такого, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4.

Настоящая работа продолжает исследования классов Леви.

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$. Будем рассматривать группу

$$A = \mathrm{gr}(a, b | a^2 = 1, b^p = 1, a^{-1}ba = b^{-1}).$$

Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие групп, заданное тождествами

$$x^{2p} = 1; \tag{1}$$

$$[x^2, y^2] = 1; \tag{2}$$

$$[x, y]^p = 1. \tag{3}$$

В [11] доказано, что многообразие, порожденное группой A, совпадает с многообразием $\mathcal{N}$, и если $\mathcal{K}$ — многообразие, задаваемое тождеством (1) и формулами

$$[x, y, x]^p = 1; \tag{4}$$

$$[(x^y)^2, (x^z)^2] = 1; \tag{5}$$

$$[x^u, x^v, (x^z)^2] = 1; \tag{6}$$

$$[x^u, x^v, [x^y, x^z]] = 1, \tag{7}$$

то класс Леви, порожденный многообразием $\mathcal{N}$, совпадает с многообразием $\mathcal{K}$.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие положения.

Лемма 1. *Если $\mathcal{M}$ — локально конечное многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является локально конечным многообразием.*

Лемма 2. *Если конечно порожденная группа G принадлежит классу $L(\mathcal{N})$, то $G = Syl_p(G) \rightthreetimes Syl_2(G)$.*

Утверждение 1. *Если группа G принадлежит классу $L(\mathcal{N})$, то G — 3-метабелева группа.*

Теорема. *Если $p \neq 3$ и G — подпрямо неразложимая группа, принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, то*

$$Syl_p(G) = F_2(x_1, y_1) \times \ldots \times F_2(x_n, y_n)$$

$$([x_1, y_1] = \ldots = [x_n, y_n])$$

и

$$G = Syl_p(G) \leftthreetimes B,$$

где B — циклическая группа порядка 2.

Напомним некоторые определения и обозначения. Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $x^g = g^{-1}xg$, $[x, y, z] = [[x, y], z]$, $\mathrm{gr}(a_1, a_2, \ldots)$ — группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots$, $(x)^G = \mathrm{gr}(x^g \mid g \in G)$ — нормальное замыкание элемента x в группе G, $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ — свободная группа, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$, $\mathcal{A}$ — многообразие абелевых групп, $A \times B$ $(a = b)$ — прямое произведение групп A, B с объединенными центральными подгруппами (a), (b), т. е. $A \times B$ $(a = b) = A \times B/(ab^{-1})$.

Будем использовать следующие хорошо известные тождества, истинные в любой группе:

$$[xy, z] = [x, z]^y[y, z]; \tag{8}$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z. \tag{9}$$

С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [12], а теории квазимногообразий — в [13–15]. Результаты, касающиеся квазимногообразий метабелевых групп, можно найти в [16–20].

Замечание 1. *Если в группе G истинно тождество (2) и $G^2 = \mathrm{gr}(x^2 \mid x \in G)$, то G/G^2 — абелева группа. Отсюда группа G — метабелева, и в группе G истинны тождества*

$$[x, y, [u, v]] = 1; \tag{10}$$

$$[x, y, z^2] = 1. \tag{11}$$

Замечание 2. *Если в группе G истинны тождества (1)–(3), то в группе G истинно квазитождество*

$$x^p = 1 \ \& \ y^p = 1 \to [x, y] = 1. \tag{12}$$

Доказательство леммы 1. Поскольку $\mathcal{M}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является многообразием групп [3]. Рассмотрим конечно порожденную группу G, принадлежащую многообразию $L(\mathcal{M})$.

Индукцией по числу порождающих группы G докажем ее конечность. Рассмотрим сначала $G = (x_1)$. Поскольку $G \in L(\mathcal{M})$, то для произвольного элемента $x \in G$ нормальное замыкание $(x)^G$ принадлежит многообразию $\mathcal{M}$. В частности, $(x_1) \in \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ — локально конечное многообразие, то (x_1) — конечная группа.

Пусть теперь $G = \mathrm{gr}(x_1, \ldots, x_n)$, и все конечно порожденные группы, принадлежащие многообразию $L(\mathcal{M})$, с меньшим числом порождающих, конечны.

Рассмотрим фактор-группу $H = G/(x_n)^G$. Ясно, что $H \in L(\mathcal{M})$ и $H = \mathrm{gr}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1})$, следовательно, по предположению индукции, группа H — конечная. Значит, $(x_n)^G$ — подгруппа конечного индекса в G. Хорошо известно [12], что подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе сама конечно порождена. Поэтому $(x_n)^G$ — конечно порожденная группа, и так как $(x_n)^G \in \mathcal{M}$, то она конечна. Значит, группа G также является конечной. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $G \in L(\mathcal{N})$ и G — конечно порожденная группа. Заметим, что многообразие $\mathcal{N}$ является локально конечным. Значит, из утверждения 1 следует, что $L(\mathcal{N})$ локально конечное и G — конечная группа.

Рассмотрим множество

$$V = \{x \in G | x^p = 1\}.$$

Нетрудно показать, что множество V является группой, $V = Syl_p(G)$ — силовская p-подгруппа группы G и $V \triangleleft G$. Зафиксируем B — произвольную силовскую 2-подгруппу группы G. Ясно, что $V \cap B = (1)$ и $V \cdot B = G$. Значит, $G = V \leftthreetimes B = Syl_p(G) \leftthreetimes Syl_2(G)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство утверждения 1. Так как фактор-группа $G/Syl_p(G)$ — абелева, то $G' \subseteq Syl_p(G)$. Следовательно, для произвольных элементов группы G верны равенства

$$[x, y]^p = 1, [x, z]^p = 1.$$

Поскольку $G \in L(\mathcal{N})$, то для произвольного элемента x, принадлежащего группе G, верно, что $(x)^G \in \mathcal{N}$ и в группе $(x)^G$ истинны тождества (1)–(3). Заметим, что элементы $[x, y]$, $[x, z]$ принадлежат нормальному замыканию $(x)^G$. Из истинности в группе $(x)^G$ квазитождества (12) следует, что

$$[[x, y], [x, z]] = 1.$$

Значит, группа G — 3-метабелева [21]. Утверждение 1 доказано.

Доказательство теоремы. Пусть $G \in L(\mathcal{N})$ и G — подпрямо неразложимая группа. Рассмотрим множество

$$V = \{x \in G | x^p = 1\}.$$

Как в лемме 2, V — силовская p-подгруппа группы G и $V \triangleleft G$. Зафиксируем произвольную силовскую 2-подгруппу B группы G.

Рассмотрим $N = Z(V)$ — центр группы V. Заметим, что $N \lhd G$. На группу N можно смотреть как на векторное пространство над полем из p элементов. Возникает естественное представление группы G/V линейными преобразованиями векторного пространства N над полем $\mathbb{Z}_p$. Фактор-группа G/V действует на N сопряжениями. Для любого элемента $n \in N$ полагаем $n^{gV} = n^g$, $g \in B$. По теореме Машке данное представление вполне приводимо. Значит,

$$N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_l,$$

где N_i – неприводимое подпространство векторного пространства N $(i = 1, \ldots, l)$. Ясно, что $N_i \lhd G$. Поскольку группа G подпрямо неразложимая, то получаем, что $l = 1$ и $N = N_1$.

Рассмотрим $C = C_B(N)$ — централизатор подгруппы N в группе B. Докажем, что $C \lhd G$. Возьмем произвольные элементы $x \in C$, $g \in G$. Из леммы 2 следует, что $g = v \cdot b$, где $v \in V$, $b \in B$. Надо показать, что $x^g \in C$. Заметим, что из того, что $x \in C$, следует, что $(x^g)^2 = 1$ и $x^g \in B$. Кроме того, $(x^v)^2 = 1$, значит, $x^v \in B$ и $x^g = x^{v \cdot b} = x^b$.

Тогда для произвольного элемента $n \in N$ имеем

$$n^{x^g} = n^{x^b} = b^{-1}x^{-1}bnb^{-1}xb = b^{-1}x^{-1}n^{b^{-1}}xb.$$

Рассмотрим изоморфизм $\alpha : G \to G$ такой, что $y \to y^{b^{-1}}$. Поскольку N — центр группы V, α действует на V как автоморфизм, то $n^{b^{-1}} \in N$. Так как $x \in C$, то $x^{-1}n^{b^{-1}}x = n^{b^{-1}}$. Значит, $n^{x^g} = b^{-1}n^{b^{-1}}b = n$ и $x^g \in C$.

Таким образом, $C \lhd G$ и $C \cap V = (1)$. Поскольку группа G подпрямо неразложимая, то $C = (1)$. Поскольку группа $B/C = B$ обладает точным неприводимым представлением, то ее центр $Z(B)$ — циклический [22, теорема 2.2]. Таким образом, получаем, что B — циклическая группа.

Пусть $B = (s)$. Покажем, что группа N — циклическая. Пусть $x \in N$, $x \neq 1$. Рассмотрим нормальное замыкание

$$(x)^G = \mathrm{gr}(x, x^s).$$

Из неприводимости N следует, что $N = (x)^G$. Если $x \cdot x^s = 1$, то $x^s = x^{-1}$, $(x)^G = (x)$ и $(x) \lhd G$. Следовательно, в этом случае $N = (x)$.

Если $x \cdot x^s \neq 1$, то $(x \cdot x^s) \lhd G$, и аналогичным образом получаем, что в этом случае $N = (x \cdot x^s)$. Следовательно, N — циклическая группа.

Рассмотрим произвольный элемент $v \in V$. Поскольку $G \in L(\mathcal{N})$, то для произвольного элемента $x \in G$ нормальное замыкание $(x)^G \in \mathcal{N}$, и в нем истинны тождества (1)–(3). Из замечания 2 следует истинность квазитождества (12) в группе $(x)^G$. В частности, квазитождество (12) истинно в нормальном замыкании $(v)^V$. Поскольку для любого $h \in V$ верно $(v^h)^p = 1$, то группа $(v)^V$ — абелева. Из работы [2] следует, что класс $L(\mathcal{A})$ является многообразием 2-энгелевых групп. Значит, V — 2-энгелева группа. Поскольку $p \neq 3$, то из теоремы [23, теорема 34.31] следует, что V — 2-ступенно-нильпотентная группа.

Зафиксируем элемент z такой, что $N = (z)$. В фактор-группе V/N векторного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$ зададим кососимметрическую форму φ, полагая, что

$$\varphi(xN, yN) = s,$$

где $[x, y] = z^s$.

Возникло симплектическое пространство. Как известно, в конечномерном симплектическом пространстве существует базис из попарно ортогональных гиперболических пар и элементов, ортогональных ко всему пространству. Пусть $(x_1N, y_1N), \ldots, (x_nN, y_nN)$ — гиперболические пары, $c_1N, \ldots, c_rN$ — элементы, ортогональные ко всему пространству. В частности, $c_iN \neq N$. Так как N содержится в подгруппе Фраттини группы V, получаем, что

$$V = \mathrm{gr}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_r).$$

Так как $\varphi(x_iN, c_jN) = 0$, то

$$[x_i, c_j] = z^0;$$

и

$$[x_i, c_j] = 1 \ (i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, r).$$

Аналогично

$$[y_i, c_j] = 1 \ (i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, r);$$

$$[c_i, c_j] = 1 \ (i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, r).$$

Таким образом, получаем, что элементы c_j $(j = 1, \ldots, r)$ принадлежат центру группы V, т. е. $c_jN = N$, что не так. Следовательно, элементов c_jN $(j = 1, \ldots, r)$ нет в рассматриваемом базисе.

Поскольку $\varphi(x_iN, y_iN) = 1$, то

$$[x_i, y_i] = z^1 = z \ (i = 1, \ldots, n).$$

Так как $\varphi(x_iN, y_jN) = 0$, то

$$[x_i, y_j] = z^0 = 1 \ (i, j = 1, \ldots, n, i \neq j).$$

Следовательно,

$$V = Syl_p(G) = F_2(x_1, y_1) \times \ldots \times F_2(x_n, y_n)$$
$$([x_1, y_1] = \ldots = [x_n, y_n]),$$

и из леммы 2 следует, что

$$G = Syl_p(G) \leftthreetimes B,$$

где B — циклическая группа порядка 2. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору А.И. Будкину за постановку задачи и ценные замечания, высказанные в ходе подготовки статьи.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-Formations // Arch. Math. — 1972. — V. 23, №6.

2. Levi F.W. Groups in Which the Commutator Operation Satisfies Certain Algebraic Condition // J. Indian Math. Soc. — 1942. — V. 6.

3. Morse R.F. Levi-Properties Generated by Varieties // The Mathematical Legacy of Wilhelm Magnus. Groups, Geometry and Special Functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. — 1994.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сибирский математический журнал. — 1999. — Т. 40, №2.

5. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2000. — Т. 41, №2.

6. Будкин А.И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, №6.

7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2009. — №1 (61).

8. Лодейщикова В.В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, №6.

9. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, №1.

10. Лодейщикова В.В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2010. — №1/2 (65).

11. Лодейщикова В.В. Об одном классе Леви экспоненты $2p$ // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2014. — №1/2 (81).
DOI:10.14258/izvasu(2014)1.2-07

12. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М., 1972.

13. Будкин А.И., Горбунов В.А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, №2.

14. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск, 1999.

15. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. — Барнаул, 2002.

16. Шахова С.А. О квазимногообразии, порожденном конечной p-группой // Математические заметки. — 1993. — Т. 53, №3.

17. Будкин А.И. О решетке квазимногообразий метабелевых групп без кручения // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42, №2.

18. Будкин А.И. Квазимногообразие, порожденное свободными метабелевыми и 2-нильпотентными группами // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, №4.

19. Будкин А.И. О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, №3.

20. Будкин А.И. Об абсолютной замкнутости абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53, №1.

21. Macdonald I.D. On Certain Varieties of Groups. II // Mathematische Zeitschrift. — 1962. — V. 78, №1.

22. Gorenstein D. Finite Groups. — Providence, 2007.

23. Нейман Х. Многообразия групп. — М., 1969.