УДК 51

Односторонние поверхности в E^4

М.А. Чешкова

Алтайский государственный университет (Барнаул, Россия)

One-sided Surfaces in E^4

M.A. Cheshkova

Altai State University (Barnaul, Russia)

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности в E^3 обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность. Простейшей односторонней поверхностью в E^3 является лист Мебиуса. К односторонним поверхностям в E^3 относятся также скрещенный колпак, бутылка Клейна. В работе определяются уравнения листа Мебиуса, бутылки Клейна и скрещенного колпака в E^4. Определена замкнутая кривая $s = s(v)$ и нормальный вектор $n = n(v)$, который обносится вдоль этой кривой, и при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с противоположным. Рассматриваемые поверхности есть односторонние поверхности. С помощью системы компьютерной математики строятся индикатрисы нормальной кривизны исследуемых поверхностей вдоль найденной замкнутой кривой. Показано, что в случае листа Мебиуса и бутылки Клейна это либо эллипс, либо отрезок прямой, проходящие через точки найденной замкнутой кривой. В случае скрещенного колпака эллипс не проходит через точки этой кривой. Построен график скалярной кривизны для листа Мебиуса.

Ключевые слова: бутылка Клейна, лист Мебиуса, скрещенный колпак.

Let a normal vector be defined along a closed curve on the surfaces. If we return to the starting point and the normal direction coincides with the original, regardless of the choice of the curve, then the surface is called bilateral. Otherwise, we have a one-sided surface. The Mobius band is a one-sided surface in E^3. A cross-cap and a Klein bottle are also one-sided surfaces in E^3. In the paper, we present equations of the Mobius band, the Klein bottle and the cross-cap in E^4. We define a closed curve $s = s(v)$ and the normal vector $n = n(v)$ that goes along the curve s and returns to the starting point with an opposite direction. The examined surface is the one-sided surface. With the help of a computer mathematics system we calculate normal curvature indicatrixes for examined surfaces along the defined closed curve. We demonstrate that in the case of the Mobius band and the Klein bottle it is a line segment or an ellipse passing through points of the curve. For the case of the cross-cap it is an ellipse that does not pass through points of the curve. Additionally, we plot a graph of scalar curvature for the Mobius band, the Klein bottle, and the cross-cap.

Key words: Klein bottle, Mobius band, cross-cap.

DOI 10.14258/izvasu(2015)1.1-21

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2].

К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак [3], бутылка Клейна [3; 4]. В работах [4; 5] показано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса. В [6] исследуется плоский лист Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^4 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как $\rho(v) = \rho(v + 4\pi)$, то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi)) \qquad (1)$$

есть 2π-периодическая, не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi)) \qquad (2)$$

есть 2π-антипериодическая, не равная нулю.

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Рассмотрим линейчатую поверхность M

$$r(u,v) = s(v) + ul(v). \tag{3}$$

Если при этом кривая $s = s(v)$ невырожденная, а вектор $l(v)$ не параллелен постоянному, то когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Вектор-функция $r(u,v) = s(v) + ul(v)$ определяет лист Мебиуса, для которого $s = s(v)$ — средняя линия, а $\rho = \rho(v) = r(1,v)$ – край.

Определим поверхность K уравнением

$$\begin{aligned} r(u,v) &= s(v) + \sin(u)l(v) + \\ &+ \sin(2u)(l(v+\pi) + f(v)e), \end{aligned} \tag{4}$$

$u = 0,..,2\pi, v = 0,..,2\pi$, где $f = f(v)$ — 2π-антипериодическая функция, а вектор e есть постоянный.

Вектор $f(v)e$ удобно выбрать так, чтобы векторы $l(v), l(v+\pi) + f(v)e$ были ортогональные.

Рассмотрим еще одну замкнутую поверхность P:

$$r(u,v) = s(v) + \cos(u)l(v) + \sin(u)s(v). \tag{5}$$

В E^3, когда кривая задана на торе, поверхность M (3) есть лист Мебиуса, поверхность K (4) — бутылка Клейна, а поверхность P (5) является моделью проективной плоскости. Если от этой модели отрезать плоскостью небольшой диск, то оставшаяся часть есть скрещенный колпак.

Будем исследовать эти поверхности, когда кривая $\rho = \rho(v)$ расположена на тороидальной гиперповерхности T в E^4.

Гиперповерхность T получается при движении сферы вдоль окружности, причем 3-пространство, в котором расположена сфера, ортогонально окружности и центр сферы лежит на окружности.

Зададим окружность радиуса R в виде:

$$r(v) = Re(v), e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0, 0),$$

и сферу радиуса r:

$$r(u,w) = r(\cos(u)e(v_0) + \sin(u)b(w)),$$

$$b(w) = (0, 0, \cos(w), \sin(w)).$$

Параметрическое уравнение гиперповерхности T примет вид:

$$\begin{aligned} r(u,v,w) = ((R + r\cos(u))\cos(v), \\ (R + r\cos(u))\sin(v), \\ r\sin(u)\cos(w), r\sin(u)\sin(w)). \end{aligned} \tag{6}$$

Неявная форма задания гиперповерхности T

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x_1^2 + x_2^2).$$

Кривую на гиперповерхности T зададим уравнениями $w = v, u = \frac{v}{2}$.

Имеем

$$\rho(v) = ((R + r\cos(\frac{v}{2}))\cos(v), (R + r\cos(\frac{v}{2}))\sin(v),$$

$$r\sin(\frac{v}{2})\cos(v), r\sin(\frac{v}{2})\sin(v)). \tag{7}$$

Исследуем поверхности (3)–(5) в E^4.

Лист Мебиуса. Рассмотрим ортобазис

$$a(v) = (0, 0, \cos(v), \sin(v)),$$

$$a' = (0, 0, -\sin(v), \cos(v)),$$

$$e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0, 0),$$

$$e' = (-\sin(v), \cos(v), 0, 0).$$

В евклидовом пространстве E^4 рассмотрим линейчатую поверхность M, полагая в (7) $R = r = 1$.

Имеем

$$s(v) = e(v), l(v) = \cos(\frac{v}{2})e(v) + \sin(\frac{v}{2})a(v); \tag{8}$$

$$l(v)' = -\frac{1}{2}\sin(\frac{v}{2})e(v) + \frac{1}{2}\cos(\frac{v}{2})a(v) +$$

$$+ \cos(\frac{v}{2})e'(v) + \sin(\frac{v}{2})a'(v). \tag{9}$$

Таким образом,

$$r(u,v) = (1 + u\cos(\frac{v}{2}))e(v) + u\sin(\frac{v}{2})a(v), \tag{10}$$

$u = -1 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$.

Исследуем эту поверхность.

$$r_1 = r_u = l(v), r_2 = r_v = e'(v) + ul'(v)|_{u=0} = e'(v).$$

Касательное пространство в точках средней окружности $S(u = 0) : s = e(v)$ имеет вид:

$$T_pM = \{l(v), e'(v)\}, p \subset S.$$

Векторы $l(v), e'(v)$ — ортогональные и единичные.

Рассмотрим два единичных нормальых вектора в нормальном пространстве в точках средней окружности S.

$$n_1(v) = -\sin(\frac{v}{2})e(v) +$$
$$+\cos(\frac{v}{2})a(v), n_2(v) = a'(v). \qquad (11)$$

Замечаем, что $n_1(v+2\pi) = -n_1(v)$ и базисы $\{r_1(v), r_2(v)\} = \{l(v), e'(v)\}, \{r_1(v+2\pi), r_2(v+ +2\pi)\} = \{l(v+2\pi), e'(v+2\pi)\}$ противоположно ориентированы.

Таким образом, поверхность M односторонняя.

Итак:

$$T_pM^{\perp} = \{p, n_1(v), n_2(v)\}, p \subset S.$$

Пусть $t = t^i r_i \in T_pM, p \in M, r_1 = r_u, r_2 = r_v$ — касательный вектор, длина которого равна единице. Рассмотрим вектор нормальной кривизны $b = b(t,t)$, где $b(t,t)$ — вторая фундаментальная форма поверхности M.

Зафиксируем точку p, а вектор t будем менять. Тогда концы вектора нормальной кривизны с началом в p опишут в $T_pM^{\perp}$ кривую, называемую индикатрисой нормальной кривизны [7]. Индикатриса нормальной кривизны есть эллипс либо отрезок прямой.

Определим индикатрису нормальной кривизны листа Мебиуса в точках $p \subset S$.

Имеем

$$t = \cos(\beta)r_1 + \sin(\beta)r_2, b(t,t) =$$
$$= (\cos(\beta)^2 b^1_{11} + 2\sin(\beta)\cos(\beta)b^1_{12} +$$
$$+\sin(\beta)^2 b^1_{22})n_1 + +(\cos(\beta)^2 b^2_{11} +$$
$$+2\sin(\beta)\cos(\beta)b^2_{12} + \sin(\beta)^2 b^2_{22})n_2;$$
$$b^1_{ij} =< r_{ij}, n_1 >, b^2_{ij} =< r_{ij}, n_2 >, r_{11} = 0,$$
$$r_{12} = l'(v), r_{22}|_{\gamma} = -e(v);$$
$$b^1_{11} = 0, b^2_{11} = 0, b^1_{12} = 1/2, b^2_{12} = \sin(v/2),$$
$$b^1_{22} = \sin(v/2), b^2_{22} = 0.$$

Переходя к двойному углу, получим

$$b(t,t)(v) = (\frac{1}{2}\sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{2}\sin(2\beta) -$$
$$-\frac{1}{2}\cos(2\beta)\sin(\frac{v}{2}))n_1(v) +$$
$$+\sin(2\beta)\sin(\frac{v}{2})n_2(v). \qquad (12)$$

Замечаем, что индикатриса проходит через точку окружности (при $\beta = 0$), а в точке $A(0,0)$ она вырождается в отрезок прямой $b(t,t) = = \frac{1}{2}\sin(2\beta)n_1(0)$. В этом случае $l(0) = e(0)$, и образующая прямая принадлежит плоскости окружности.

Так как $\sin(\frac{2\pi - v}{2}) = \sin(\frac{v}{2})$, то убеждаемся, что эллипсы в точках $p(0,v), p^*(0, 2\pi - v)$ идентичны.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Индикатриса нормальной кривизны в точке окружности $s = e(v)$ листа Мебиуса есть эллипс, проходящий через эту точку, либо отрезок прямой. Эллипсы в точках $p(0,v), p^*(0, 2\pi - v)$ равны.*

Следствие 1. *В любой точке кривой $s = = e(v)$ листа Мебиуса существует асимптотическое направление. В точке $s = e(0)$ их два.*

Доказательство. Асимптотическое направление $t = (t^1, t^2)$ определится из системы

$$b^1(t,t) = b^1_{ij}t^it^j = t^2(t^1 + \sin(\frac{v}{2})t^2) = 0;$$

$$b^2(t,t) = b^2_{ij}t^it^j = \sin(\frac{v}{2})t^2t^1 = 0.$$

Имеем общее решение $t^2 = 0$. Если $v = 0$, то два решения: $t^1 = 0, t^2 = 0$.

Построим индикатрису в точках $A(0,0)$, $B(0, \pi/12)$, $C(0, \pi)$ (рис. 1).

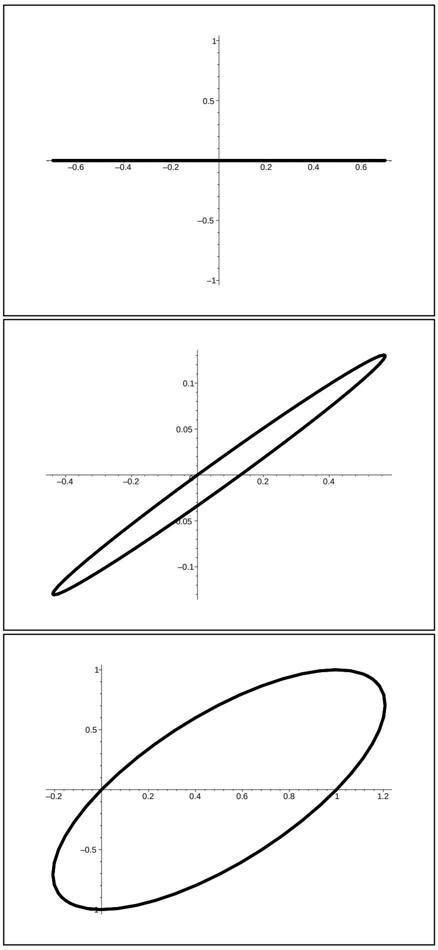

Рис. 1. Индикатриса листа Мебиуса точках $A(0,0)$, $B(0, \pi/12)$, $C(0, \pi)$

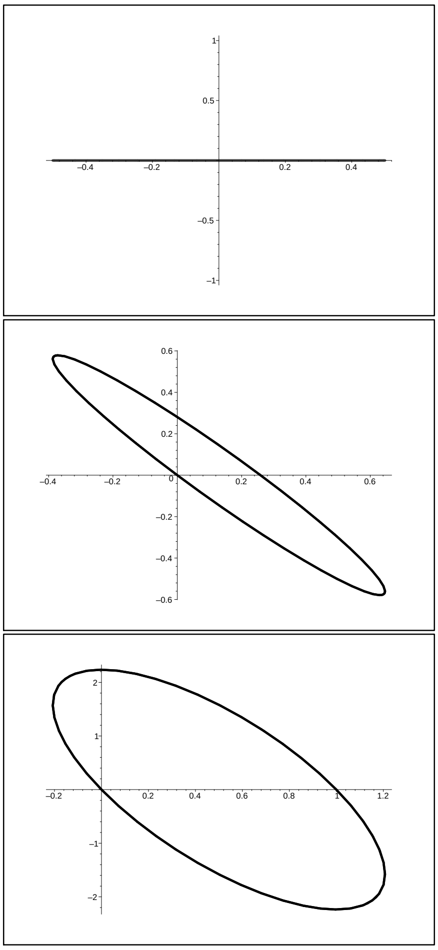

Рис. 2. Индикатриса бутылки Клейна в точках $A(0, 2arctg(2)), B(0, 2arctg(2)+\pi/4), C(0, 2arctg(2)+\pi)$

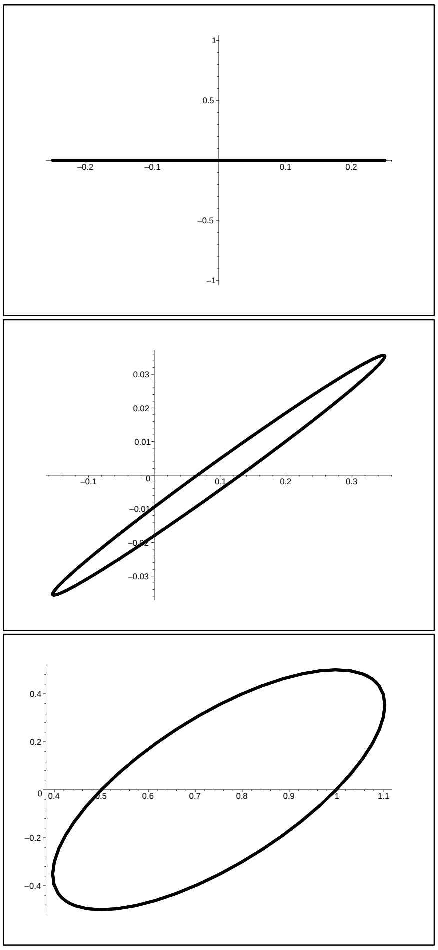

Рис. 3. Индикатриса скрещенного колпака в точках $A(\pi/2, 0), B(\pi/2, \pi/12), C(\pi/2, \pi)$

Бутылка Клейна. Определим поверхность K уравнением

$$r(u, v) = e(v) + \sin(u)l(v) + \sin(2u)l(v+\pi)),$$
$$u = 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi; \quad (13)$$

$$e(v+\pi) = -e(v), a(v+\pi) = -a(v),$$
$$l(v+\pi) = \sin(\frac{v}{2})e(v) - \cos(\frac{v}{2})a(v). \quad (14)$$

Кроме того,

$$< l(v), l(v+\pi) >= 0, |l(v)| = |l(v+\pi)| = 1.$$

Определим касательное и нормальное пространства к поверхности $K \subset E^4$ в точках окружности.

Имеем

$$r_1 = r_u = \cos(u)l(v) + 2\cos(2u)l(v+\pi); \quad (15)$$

$$r_2 = r_v = e'(v) + \sin(u)l'(v) + \sin(2u)l'(v+\pi). \quad (16)$$

Вдоль окружности $u = 0$

$$r_1 = l(v) + 2l(v+\pi), r_2 = e'(v). \quad (17)$$

Касательное пространство в точках средней окружности $S : s = e(v)$ имеет вид $T_pK = \{l(v)+ +2l(v+\pi), e'(v)\}$, $p \subset S$.

Векторы $\frac{1}{\sqrt{5}}(l(v) + 2l(v+\pi)), e'(v)$ ортогональные и единичные.

Рассмотрим два единичных нормальных вектора в нормальном пространстве в точках средней окружности S.

$$n_1(v) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2l(v) + l(v+\pi)), n_2(v) = a'(v). \quad (18)$$

Замечаем, что $n_1(v+2\pi) = -n_1(v)$ и базисы $\{r_1(v), r_2(v)\} = \{l(v) + 2l(v+\pi), e'(v)\}$, $\{r_1(v+ +2\pi), r_2(v+2\pi)\} = \{l(v+2\pi) + 2l(v+\pi+2\pi), e'(v+ +2\pi)\}$ противоположно ориентированы.

Имеем $T_pK^{\perp} = \{p, n_1, n_2\}$, $p \subset S$.

Определим индикатрису в точках $p \subset S$.

$$r_{11} = -\sin(u)l(v) - 4\sin(2u)l(v+\pi)|_{u=0} = 0;$$
$$r_{12} = \cos(u)l'(v) + 2\cos(2u)l'(v+\pi)|_{u=0} =$$
$$= l'(v) + 2l'(v+\pi) = (l(v) + 2l(v+\pi))' =$$
$$= (\cos(\frac{v}{2}) + 2\sin(\frac{v}{2}))'e(v)+$$
$$+(\sin(\frac{v}{2}) - 2\cos(\frac{v}{2}))'a(v) + (\cos(\frac{v}{2})+$$

$$+2\sin(\frac{v}{2}))e'(v)+(\sin(\frac{v}{2})-2\cos(\frac{v}{2}))a'(v);$$

$$r_{22}=e''(v)+\sin(u)l''(v)+$$

$$\sin(2u)l''(v+\pi)|_{u=0}=-e(v), b^1_{11}=0, b^2_{11}=0,$$

$$b^1_{12}=-\frac{\sqrt{5}}{2}, b^2_{12}=\sin(\frac{v}{2})-2\cos(\frac{v}{2});$$

$$b^1_{22}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos(\frac{v}{2})+\sin(\frac{v}{2})), b^2_{22}=0;$$

Положим $t=\cos(\beta)\frac{r_1}{\sqrt{5}}+\sin(\beta)r_2$. Тогда

$$b(t,t)(v)=(-\frac{1}{2}\sin(2\beta)+$$

$$+\frac{1-\cos(2\beta)}{2\sqrt{5}}(-2\cos(\frac{v}{2})+\sin(\frac{v}{2}))n_1(v)+$$

$$+\sin(2\beta)(-2\cos(\frac{v}{2})+\sin(\frac{v}{2}))n_2(v).$$

Это уравнение эллипса, проходящего через точку окружности, причем при $-2\cos(\frac{v}{2})+$ $+\sin(\frac{v}{2})=0$ он вырождается в отрезок прямой. Убеждаемся, что эллипсы в точках $p(0,2arctg(2)+$ $+v)$, $p^*(0,2arctg(2)+2\pi-v)$ идентичны.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Индикатриса бутылки Клейна в точке окружности $r=e(v)$ есть эллипс, проходящий через эту точку, либо отрезок прямой. Эллипсы в точках $p(0,2arctg(2)+v)$, $p^*(0,2arctg(2)+2\pi-v)$ равны.*

Следствие 2. *В любой точке кривой $s=e(v)$ бутылки Клейна существует асимптотическое направление. В точке $s=e(2arctg(2))$ их два.*

Постоим индикатрису бутылки Клейна в точках окружности (рис. 2).

Скрещенный колпак. Рассмотрим поверхность P:

$$r(u,v)=e(v)+\cos(u)l(v)+\sin(u)e(v), \qquad (19)$$

$u=0\le u\le 2\pi, 0\le v\le 2\pi$.

Окружность S определяется уравнением $r(\pi/2,v)=2e(v)$.

Определим касательное и нормальное пространства к поверхности $P\subset E^4$ в точках окружности.

Имеем

$$r_1=r_u=\cos(u)e(v)-\sin(u)l(v); \qquad (20)$$

$$r_2=r_v=(1+\sin(u))e'(v)+\cos(u)l'(v). \qquad (21)$$

Вдоль окружности $u=\pi/2$

$$r_1=-l(v),, r_2=2e'(v). \qquad (22)$$

Касательное пространство в точках средней окружности $S:s=2e(v)$ примет вид:

$$T_pP=\{l(v),e'(v)\}, \quad p\subset S.$$

Замечаем, что векторы $e'(v), l(v)$ ортогональные и единичные.

Рассмотрим два единичных нормальных вектора в нормальном пространстве в точках средней окружности S.

$$n_1(v)=-\sin(\frac{v}{2})e(v)+$$

$$+\cos(\frac{v}{2})a(v), \quad n_2(v)=a'(v). \qquad (23)$$

Замечаем, что $n_1(v+2\pi)=-n_1(v)$ и базисы $\{r_1(v),r_2(v)\}=\{l(v)+2l(v+\pi),e'(v)\}$,$\{r_1(v+$ $+2\pi),r_2(v+2\pi)\}=\{l(v+2\pi)+2l(v+\pi+2\pi),$ $e'(v+2\pi)\}$ противоположно ориентированы.

Итак, $T_pP^{\perp}=\{p,n_1,n_2\}, p\subset S$.

Определим индикатрису нормальной кривизны поверхности P в точках $p\subset S$. Имеем

$$r_{11}=r_{uu}|_{u=\pi/2}=-e(v);$$

$$r_{12}=r_{uv}=|_{u=\pi/2}=-l'(v);$$

$$r_{22}=r_{vv}|_{u=\pi/2}=-2e(v).$$

$$b^1_{11}=\sin(\frac{v}{2}), b^2_{11}=0, b^1_{12}=-\frac{1}{2};$$

$$b^2_{12}=-\sin(\frac{v}{2}), b^1_{22}=2\sin(\frac{v}{2}), b^2_{22}=0.$$

Положим $t=\cos(\beta)r_1+\sin(\beta)\frac{r_2}{2}$.

Переходя к двойному углу, получим

$$b(t,t)(v)=(\frac{3}{4}\sin(\frac{v}{2})-\frac{1}{4}\sin(2\beta)-$$

$$-\frac{1}{4}\sin(\frac{v}{2})\cos(2\beta))n_1(v)-$$

$$-\frac{1}{2}\sin(2\beta)\sin(\frac{v}{2})n_2(v).$$

Это уравнение эллипса, при $v=0$ он вырождается в отрезок прямой $b(t,t)=-\frac{1}{4}\sin((2\beta)n_1(0)$.

Так как $\sin(\frac{2\pi-v}{2})=\sin(\frac{v}{2})$, то убеждаемся, что эллипсы в точках $p(\pi/2,v)$, $p^*(\pi/2,2\pi-v)$ идентичны.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Индикатриса нормальной кривизны в точках окружности скрещенного колпака есть эллипс либо отрезок прямой. Эллипсы в точках $p(\pi/2,v), p^*(\pi/2,2\pi-v)$ равны.*

Следствие 3. *Только в одной точке $v=0$ кривой $s=2e(v)$ скрещенного колпака существует асимптотическое направление, причем их два.*

Построим эти кривые (рис. 3).

Библиографический список

1. Mashke H. Note on the Unilateral Surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. —1900. — V. 1, №1.

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. — 2007. — Т. 71, №5.

3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. — М., 2006.

4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М., 1981.

5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2012. — №1/1.

6. Чешкова М.А. О плоском листе Мебиуса // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — №1/2.

7. Картан Э. Риманова геоиетрия в ортогональном репере. — М., 1960.