УДК 530.12

А.И. Гончаров

Стоячие волны как системы отсчета: классическая модель релятивистского пространства-времени*

A.I. Goncharov

Standing Waves as Frames of Reference: a Classical Model of the Relativistic Space-Time

Рассматриваются свободные колебания бесконечной идеальной однородной струны, описываемые в лабораторной системе отсчета уравнением $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Предложена модель, в которой роль систем отсчета выполняют стоячие волны. Анализируется понятие движения в данной модели. Показано, что на струне существует бесконечное множество равноправных систем отсчета, движущихся друг относительно друга. Для расстояний, промежутков времени и скоростей справедливы соотношения специальной теории относительности, в которых роль инвариантной скорости играет константа a.

Ключевые слова: специальная теория относительности, система отсчета, стоячие волны.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-31

We consider free vibrations of an infinite ideal homogeneous string, that described in the laboratory reference by the equation $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. We propose a model in which the role of frames is performed by the standing waves. The concept of motion in the model is analyzed. It is shown that there exist an infinite number of equivalent frames of reference moving relative to each other. Distances, intervals of time, speeds obey the formulas of special theory of relativity, in which the role of invariant speed is performed by the constant a.

Key words: special relativity, frame, standing waves.

Введение. Со времен Декарта существует представление, что пространство материально, а та сущность, которую мы воспринимаем как материю, связана с процессами, протекающими в этом пространстве [1]. Среди современных математических моделей, направленных на реализацию этой идеи, имеются модели, основанные на нелинейных волновых уравнениях и их частицеподобных решениях — солитонах [2]. Известно, что солитоны имеют непрерывный спектр скоростей из интервала от нуля до максимальной скорости; для солитонных решений релятивистски-ковариантных нелинейных уравнений — например, синус-Гордона уравнения — характерны уменьшение ширины солитона с ростом скорости в соответствии с формулой лоренцева сокращения и релятивистская зависимость энергии солитона от его скорости (см. обзор [3]).

В настоящей работе мы предлагаем интерпретацию релятивистской кинематики для одномерного случая на основе анализа решений одномерного *линейного* волнового уравнения. Хотя в линейной модели отсутствуют локализованные волны, за исключением волн, распространяющихся с максимальной скоростью a (скоростью звука), зато решения линейного уравнения, благодаря их простоте, позволяют более детально рассмотреть понятия пространства, времени, движения, систем отсчета. В этой модели системы отсчета определяются на основе стоячих волн. В основе предлагаемой модели лежит наблюдение, что на струне может существовать волна, распространяющаяся относительно струны со скоростью $0 \leqslant V < a$, которая в собственной системе отсчета K' является стоячей волной. Действительно, волновое уравнение

$$u_{\xi\eta} = 0, \qquad (1)$$

где $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, ковариантно относительно преобразований Лоренца с константой $c = a$, которые могут быть записаны в виде [4]

$$\xi/\delta = \xi', \quad \eta\delta = \eta', \qquad (2)$$

где $\xi' = x' + at'$, $\eta' = x' - at'$, $\delta = \sqrt{(1 + V/a)/(1 - V/a)}$.

Таким образом, в системе отсчета K', движущейся вдоль оси x со скоростью V относительно лабораторной системы K, уравнение (1) принимает вид

$$u_{\xi'\eta'} = 0. \qquad (3)$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Программы стратегического развития Алтайского госуниверситета (НОК-2, подпроект 2.1.2.1).

Среди решений уравнения (3), очевидно, есть решения в виде стоячих волн, например, $U = \frac{1}{2}\cos k(x' + at') + \frac{1}{2}\cos k(x' - at') = \cos kx' \cos kat'$. Применив преобразования (2), находим эту волну в лабораторной системе отсчета: $U = \frac{1}{2}\cos{(k/\delta)}(x + at) + \frac{1}{2}\cos \delta k(x - at)$. Такая волна может существовать на струне: она подчиняется уравнению (1) с начальными условиями $U(x, 0) = \frac{1}{2}\cos{(kx/\delta)} + \frac{1}{2}\cos{(\delta kx)}$, $U_t(x, 0) = (ak/2)[\delta \sin{(\delta kx)} - (1/\delta)\sin{(kx/\delta)}]$. Такие условия в лабораторной системе, которую мы пока считаем выделенной, всегда могут быть созданы; при этом в системе K' будет создана стоячая волна.

В этом предварительном рассуждении мы исходили из ковариантности волнового уравнения относительно преобразований Лоренца. В основном тексте статьи мы проводим рассуждение в обратном порядке, не используя принцип относительности и не предполагая существования каких-либо релятивистских эффектов, и прослеживаем их появление по мере построения системы отсчета K' на основе волны U. Так как линейные колебания струны — сравнительно простой физический процесс, то происхождение релятивистских эффектов может быть понято полностью.

1. Внешние системы отсчета. Рассмотрим свободные колебания бесконечной однородной идеальной струны. Сначала используем систему отсчета, в которой струна при отсутствии колебаний покоится («система K_0»). Подразумевается, что эта система построена на основе некоторого протяженного недеформируемого тела отсчета, а часы синхронизированы с помощью светового сигнала, скорость которого можно считать практически бесконечно большой. В линейном приближении, которым мы здесь ограничимся, в этой системе волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{4}$$

где $a = const > 0$ — скорость бегущей волны относительно системы K_0. Наблюдатели этой системы, внешние по отношению к струне, обладают световым зрением.

Основную роль в нашей задаче будут играть гармонические стоячие волны. Стоячую волну

$$u(x, t) = \cos kx \, \cos \omega t \tag{5}$$

можно рассматривать как суперпозицию двух встречных бегущих волн с одинаковой частотой:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\cos k(x + at) + \frac{1}{2}\cos k(x - at). \tag{6}$$

В стоячей волне колебания синфазны, а амплитуда $\psi_1 = \cos kx$ не зависит от времени.

Обозначим K_1 еще одну внешнюю систему отсчета, которая движется относительно K_0 вдоль оси x. Скорость движения K_1 относительно K_0 может быть любой; координаты и время того или иного события относительно систем K_0 и K_1 связаны преобразованием Галилея. Нетрудно показать, что струна не может совершать колебаний, которые представляли бы в системе K_1 синфазную волну с неподвижными узлами. Для наблюдателей, обладающих световым зрением и изучающих волновые процессы на струне, система отсчета K_0 является выделенной.

Перейдем в системе отсчета K_0 к новым единицам измерения времени и длины. Для этого примем одну из стоячих волн — например, волну (5) – в качестве эталонной стоячей волны. Ее период и длина T, λ являются эталонными промежутком времени и длины, которые можно назвать, например, «волновой секундой» (вс) и «волновым метром» (вм), т.е., по определению, $T = 1$ вс, $\lambda = 1$ вм. В этих единицах $a = 1$ вм/вс. Соответственно $\omega = 2\pi/T = 2\pi$ рад/вс — эталонная угловая частота, $|k| = \omega/a = 2\pi/\lambda = 2\pi$ рад/вм — эталонное волновое число; далее для определенности полагаем $k > 0$. Координату и время, измеряемые в этих единицах, будем по-прежнему обозначать x, t. Сомножитель $\psi_1 = \cos kx$ функции u характеризует линейку, а сомножитель $\psi_2 = \cos \omega t$ — часы.

Далее перейдем к построению «внутренних» систем отсчета, основанных на волновых объектах.

2. Лабораторная система отсчета. Введем новую систему отсчета K, которую будем называть «лабораторной», в соответствии со следующими положениями.

1. Координата и время x, t (далее иногда для краткости — «координаты») — те же, что и в системе отсчета K_0. Поэтому волновое уравнение в системе K имеет вид (4), эталонная стоячая волна $u(x, t)$ — вид (5).

2. В отличие от наблюдателей системы K_0, наблюдатели K могут обмениваться информацией только с помощью волн, имеющих фронт и бегущих по этой же струне. Каждый наблюдатель является точечным (локальным) и может непосредственно измерять величину u только в той точке оси x, в которой он находится.

3. Роль тела отсчета выполняет сама волна (5). В системе K волна (5) является стоячей постольку, поскольку это можно установить, получая сигналы из разных точек струны в виде вышеупомянутых бегущих волн. Опишем соответствующую процедуру. Пусть каждый раз, когда в точках с координатами $x_m = \pi m/k$ в системе K функция u достигает амплитудного значения $|u| = 1$, из этих точек «излучаются» бегущие волны. Волны, излучаемые из x_{m-1} и x_{m+1}, приходят в x_m попар-

но одновременно. Установленную таким способом согласованность колебаний волны будем называть внутренней синфазностью.

Считаем, что, хотя струна может совершать сложные колебания, наблюдатели способны выделять нужные гармонические составляющие и их суперпозиции.

3. Разделение частот. Введем одно преобразование решений волнового уравнения, которое будем использовать в дальнейшем. Запишем общее решение уравнения (4) в виде

$$w(x,t) = A[k(x+at)] + B[k(x-at)], \qquad (7)$$

где $A(x)$, $B(x)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции; здесь k — масштабный множитель. Преобразование, о котором идет речь, заключается в таком изменении встречных волн A, B, при котором одна из них растягивается, а другая — сжимается в δ раз ($\delta > 0$ — некоторая константа):

$$w(x,t) \to W(x,t) = A[(k/\delta)(x+at)] + B[\delta k(x-at)]. \qquad (8)$$

Очевидно, функция $W(x,t)$ тоже является общим решением уравнения (4). В частном случае гармонических волн, когда, например, $A[k(x+at)] = \cos k(x+at) = \cos(kx+\omega t)$, при преобразовании (8) частота одной из двух встречных бегущих волн уменьшается, а другой увеличивается в одинаковое число раз. Будем называть это преобразование «разделением частот».

4. Движение. Перейдем к рассмотрению понятия движения; напомним, что речь идет о движении вдоль оси x. Наряду с бегущими волнами $f(x \pm at)$, скорость которых в системе K равна $\pm a$, нам нужны волновые объекты, движущиеся с другими, в том числе как угодно малыми по сравнению с a скоростями. Для этого на струне, на которой уже существует стоячая волна u, описываемая формулами (5), (6) и выполняющая роль системы отсчета K, создадим волну в виде суперпозиции двух встречных бегущих волн одинаковой амплитуды с частотами ω/δ и $\omega\delta$:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\cos\frac{k}{\delta}(x+at) + \frac{1}{2}\cos\delta k(x-at). \qquad (9)$$

Запишем эту функцию также в виде

$$U(x,t) = \cos k\left(\frac{\delta+\frac{1}{\delta}}{2}x - \frac{\delta-\frac{1}{\delta}}{2}at\right) \times$$
$$\times \cos k\left(\frac{\delta+\frac{1}{\delta}}{2}at - \frac{\delta-\frac{1}{\delta}}{2}x\right) =$$
$$= \cos k\gamma(x-\beta at)\cos k\gamma(at-\beta x), \qquad (10)$$

где

$$\beta = \frac{\delta^2-1}{\delta^2+1}, \qquad \gamma = \frac{\delta^2+1}{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|\beta| < 1$. В отличие от параметра δ, параметры β, γ пока введены чисто формально. Как мы уже договорились, наблюдатели имеют возможность различать волны $U(x,t)$, $u(x,t)$.

Волна U является кандидатом на роль объекта, равномерно движущегося относительно K. В связи с этим удобно рассмотреть движение нулей этой функции. При $\delta \neq 1$ (т.е. $\beta \neq 0$) она имеет два набора нулей $\{x^{(1)}\}$ и $\{x^{(2)}\}$ — соответственно нулей функций $\Psi_1 = \cos k\gamma(x-\beta at)$ и $\Psi_2 = \cos k\gamma(at-\beta x)$: $x_m^{(1)} = \beta at + \pi(2m+1)/2k\gamma$, $x_n^{(2)} = at/\beta - \pi(2n+1)/2k\beta\gamma$. При $\delta > 1$ нули движутся в положительном направлении оси x, а при $\delta < 1$ — в отрицательном. Нули $x^{(2)}$ при $\beta = 0$ отсутствуют, а при $\beta \neq 0$ движутся со скоростью $a/|\beta| > a$, которая при $\beta \to 0$ стремится к бесконечности. Что касается нулей $x^{(1)}$, то при $\beta = 0$ они совпадают с узлами функции u, а при $\beta \neq 0$ движутся относительно K со скоростью $V = \beta a$, $|V| < a$. Под движением волны U относительно K сейчас мы будем понимать, в частности, движение нулей типа $x^{(1)}$ или, в целом, движение по закону $x(t) = \Phi_1/k\gamma + \beta at$ той или иной фазы Φ_1 функции Ψ_1.

Расстояние между соседними нулями типа $x^{(1)}$ волны U в координатах системы K (пока мы используем только эту систему) равно $x_{m+1}^{(1)} - x_m^{(1)} = \pi/k\gamma = \frac{\lambda}{2}\sqrt{1-\beta^2}$, которое меньше расстояния $\lambda/2$ между узлами функции u. Уменьшение расстояния между нулями $x^{(1)}$ связано с изменениями, которые были внесены в волну U в результате разделения частот, и поэтому являются вполне реальными. Можно сказать, что по мере увеличения $|\delta - 1|$ волна U сжимается, если отвлечься от сложного (по наблюдениям из K) характера ее колебаний и рассматривать лишь поведение нулей $x^{(1)}$. Подчеркивая реальность сжатия волны U, можно было бы сказать, что оно обусловлено механическим воздействием на струну. Но механическая сторона дела несущественна: совокупность волн на струне образует другой уровень реальности по отношению к самой струне.

Попробуем связать с волной U новую систему отсчета K'. Измеряемые в этой системе координату и время того или иного события обозначим x', t'. Учтем, что, во-первых, нули $x^{(1)}$ должны покоиться в ней, а, во-вторых, в качестве эталона длины следует взять удвоенное расстояние между соседними нулями $x_{m+1}^{(1)} - x_m^{(1)}$, т.е. длину волны, бегущей со скоростью V в системе K, описываемой функцией Ψ_1. Значит, в системе K' эта функция должна иметь вид $\Psi_1 = \cos 2\pi x'/\lambda = \cos kx'$ и, следовательно, координата x' события (x,t) в системе K' равна

$$x' = \gamma(x - \beta at). \qquad (12)$$

Отметим, что требованиям, которые мы предъявили к системе K', удовлетворяет также преобразование $x' = f(\beta) + \gamma(x - \beta at)$, где $f(\beta)$ — произвольная функция, для которой справедливо $f(0) = 0$. Однако без уменьшения общности результатов можно ограничиться однородным преобразованием (12), когда в момент $t = 0$ точке $x = 0$ соответствует $x' = 0$.

Исключив x из (10) с помощью (12), получим

$$U = \cos kx' \cos k(at/\gamma - \beta x'). \qquad (13)$$

Эта функция зависит от времени t, измеряемого в системе K, и координаты x', измеряемой в K'. Она, в частности, дает временной закон колебаний по часам системы K в точках x', неподвижных относительно K'. Эти колебания послужат основой для определения времени в системе K'. Из формулы (13), во-первых, следует, что в каждой точке x' колебания являются гармоническими с частотой (по часам K) ak/γ, которая в γ раз меньше частоты $\omega = ak$ колебаний стоячей волны u. Это замедление колебаний имеет ту же причину, что и обсуждавшееся выше сжатие волны U: реальное воздействие на волну U в результате изменения частот ω/δ и $\omega\delta$ при увеличении $|\delta - 1|$. Так как увеличение $|\delta - 1|$ сопровождается ростом скорости $V = a(\delta^2 - 1)/(\delta^2 + 1)$, то это воздействие можно охарактеризовать как ускорение.

Во-вторых, из формулы (13) следует, что при измерении времени по часам K фаза колебаний $\Phi_2 = k(at/\gamma - \beta x')$ зависит от координаты x'. Покажем, однако, что волна U обладает внутренней синфазностью. Рассмотрим три точки оси x', в которых амплитуда колебаний волны U максимальна ($U_{max} = 1$), расположенные с интервалом $2\pi/k = \lambda$ — например, $x'_{-1} = -\lambda$, $x'_0 = 0$ и $x'_1 = \lambda$. Пусть каждый раз, когда в одной из точек $x'_{\pm 1}$ функция U принимает значение $U = 1$, из этой точки «излучается» сигнал в виде волны, имеющей фронт, бегущей в направлении точки x'_0. Покажем, что имеются пары сигналов, которые приходят в точку x'_0 одновременно. Так как время в системе K' пока не определено, используем время системы K. В системе K скорость бегущих волн равна a. Моменты излучения $t_{\pm 1,n}$ определяются из условия $k(at/\gamma - \beta x') = 2\pi n$, где n — целое; тогда $t_{-1,n} = \gamma\lambda(n - \beta)/a$; $t_{1,n} = \gamma\lambda(n + \beta)/a$. В точке x'_0 максимум $U = 1$ достигается в моменты $t_{0,n} = \gamma\lambda n/a$. Пусть, для определенности, $\beta > 0$. Рассмотрим моменты $t_{-1,i}$, $t_{1,j}$, ближайшие к $t_{0,n}$ и расположенные в последовательности $t_{-1,i} < t_{0,n} < t_{1,j}$. Этим условиям удовлетворяют моменты с одинаковым номером: $i = j = n$. Найдем координаты точек излучения в системе K $x_{\pm 1,n} = x'_{\pm 1}/\gamma + \beta a t_{\pm 1,n}$: $x_{-1,n} = \gamma\lambda(\beta n - 1)$, $x_{1,n} = \gamma\lambda(\beta n + 1)$. Чтобы найти моменты t_n^-, t_n^+ прихода сигналов в точку x'_0, приравниваем текущие координаты сигналов и этой точки: $x_{-1,n} + a(t_n^- - t_{-1,n}) = \beta a t_n^-$; $x_{1,n} - a(t_n^+ - t_{1,n}) = \beta a t_n^+$. Отсюда находим, что $t_n^- = \gamma\lambda(n + 1)/a$, $t_n^+ = \gamma\lambda(n + 1)/a$, т.е.

$$t_n^- = t_n^+. \qquad (14)$$

Факт одновременности событий в одной и той же точке является абсолютным, поэтому и наблюдатель системы K', расположенный в точке x'_0, зарегистрирует одновременность прихода сигналов из соседних точек $x'_{\pm 1}$. Аналогично доказывается одновременность прихода сигналов и для общего случая, когда точки излучения x'_{-1}, x'_{+1} – произвольные (не совпадающие, однако, с нулями $x^{(1)}$), координата точки наблюдения равна $x'_0 = (x'_{-1} + x'_{+1})/2$, а излучение происходит каждый раз, когда фаза $\Phi_2 = k(at/\gamma - \beta x')$ принимает в точке излучения некоторое заранее заданное значение, одинаковое для обеих точек $x'_{\pm 1}$.

Определим время t' так, чтобы в системе K' свойство (14) было выражено явно. Здесь возможны две следующие эквивалентные формулировки.

(а) Излучение рассматриваемых сигналов в системе K' произошло одновременно: $t'_{-1,n} = t'_{1,n}$. Другими словами, в любой момент t' фазы колебаний во всех точках x' одинаковы, т.е. колебания в системе K' синфазны.

Из определения (а) с учетом одновременности прихода сигналов следует, что в системе K' времена распространения сигналов по часам K' одинаковы. Тогда одинаковы и скорости сигналов в положительном и отрицательном направлениях оси x'.

(б) За основу определения времени t' можно также принять равенство скоростей сигналов в обоих направлениях.

Из (б) следует синфазность колебаний, т.е. утверждение (а).

Формулировка (а) для рассматриваемой системы логически проще, чем (б), и мы возьмем ее за основу. Отметим, что ни одно из определений (а), (б) не претендует на роль физического постулата; они всего лишь приводят к естественному для внутренней синфазной системы выбору начала отсчета временной переменной.

Итак, переменную t' определяем таким образом, чтобы фаза $\Phi_2 = k(at/\gamma - \beta x')$ функции Ψ_2 не зависела от координаты x'. Кроме того, переходим к естественной единице измерения времени — периоду колебаний. Тогда $\omega t' = \Phi_2$, $at' = at/\gamma - \beta x'$, или, с учетом (12),

$$at' = \gamma(at - \beta x). \qquad (15)$$

Аналогично (12), здесь мы тоже ограничились однородным преобразованием.

Запишем функцию U в координатах системы

K', которые теперь окончательно определены:

$$U = \cos kx' \cos \omega t' = \tag{16}$$
$$= \frac{1}{2}\cos k(x' + at') + \frac{1}{2}\cos k(x' - at').$$

Формулы (12), (15) являются преобразованиями Лоренца. Они связывают координаты $\{x, t\}$ и $\{x', t'\}$ некоторого события, наблюдаемого из двух систем отсчета, основанных на стоячих волнах (5) и (16). Теперь термины «система отсчета» и «стоячая волна» можно использовать как синонимы.

Сравнив формулы (16) и (9), которые определяют одну и ту же волну U соответственно в системах K' и K, запишем преобразования (12), (15) в виде

$$x' + at' = (x + at)/\delta, \quad x' - at' = (x - at)\delta. \tag{17}$$

Эти преобразования совпадают с формулами (2).

Формула (10) показывает, как выглядит в системе K волна U, стоячая в собственной системе K'. Мы видели, что наблюдатели K констатируют замедление колебаний и сжатие волны U по сравнению с параметрами своей эталонной волны u. Так как далее в качестве эталонных величин системы K' были приняты параметры волны U, можно сформулировать эти эффекты как замедление хода часов и сокращение линеек системы K' с точки зрения наблюдателей из K — лоренцево замедление времени и сокращение длин.

Отметим, что преобразования (12), (15) получены без требования равноправия систем отсчета K и K', т.е. без применения принципа относительности. Напротив, формально равноправие систем следует из того, что переход от системы K к системе K' осуществляется с помощью этих преобразований. Выясним, как проявляется равноправие систем в рассматриваемой модели. С одной стороны, мы видели, что волна (16), стоячая в K', в системе K выглядит как сумма (9) двух гармонических волн с частотами ω/δ и $\omega\delta$. С другой стороны, используя (17), находим, что описываемая формулой (6) волна u, стоячая в K, выглядит в K' тоже как сумма гармонических волн с частотами ω/δ и $\omega\delta$:

$$u(x(x', t'), t(x', t')) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos \delta k(x' + at') + \frac{1}{2}\cos \frac{k}{\delta}(x' - at'). \tag{18}$$

Сравнив эту формулу с (9), видим, что картины, регистрируемые наблюдателями систем K и K', симметричны (единственное различие — направление движения). Наблюдатели K' могут считать, что волна (18) получена на основе волны U, описываемой формулой (16), в результате разделения частот. Таким образом, понятия «равномерное движение», «покой» в этой модели, как и в нашей физической реальности, относительны, а системы отсчета K и K', основанные на стоячих волнах u и U, равноправны, несмотря на наличие материального носителя колебаний — струны. В частности, относительными являются лоренцевы эффекты; волновое уравнение ковариантно относительно преобразований (12), (15), а скорость звука в системе K' имеет то же самое численное значение a, что и в системе K.

5. Волны де Бройля. Согласно формуле (10), в волне U присутствует равномерное движение фаз (в частности, нулей) функции Ψ_1, скорость которого относительно K равна $V = \beta a$. В этом смысле можно говорить о движении волны U со скоростью V как единого, хотя и нежесткого, объекта. Это движение сопровождается гармоническим волновым процессом, описываемым функцией Ψ_2. Скорость волны Ψ_2, $v = a/\beta = a^2/V$ совпадает с фазовой скоростью волны де Бройля [5], которая в квантовой механике ставится в соответствие частице, движущейся со скоростью V. Развивая аналогию между Ψ_2 и волной де Бройля, запишем Ψ_2 в виде $\Psi_2 = \cos(\Omega t - Kx)$, откуда найдем волновое число K и угловую частоту Ω этой волны:

$$K = k\beta\gamma = \frac{k}{a}\frac{V}{\sqrt{1 - (V/a)^2}},$$
$$\Omega = ak\gamma = \frac{k}{a}\frac{a^2}{\sqrt{1 - (V/a)^2}},$$

а также их связь $\Omega^2 - a^2K^2 = (k/a)^2a^4$. Фазовая скорость $v = \Omega/K = a/\beta$ зависит от β, а тогда и от K, что, как известно, означает наличие дисперсии. Сравнивая эти формулы с обычными релятивистскими формулами для энергии и импульса частицы (при использовании единиц, в которых постоянная Планка $\hbar = 1$, а скорость света $c = a$), находим, что k/a играет роль массы. Функция Ψ_2 удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона—Фока для свободной частицы в одномерном пространстве:

$$\frac{1}{a^2}\Psi_{tt} - \Psi_{xx} + k^2\Psi = 0.$$

Здесь мы ограничимся этими формальными указаниями на то, что рассматриваемая система, наряду с релятивистскими свойствами, проявляет и некоторые квантовые свойства. Отметим только, что дальнейшее развитие аналогии с квантовой механикой требует учета неразличимости когерентных волн.

6. Тахионы. Выше мы определили движение системы K' на основе движения фаз (в частности, нулей $x^{(1)}$) функции Ψ_1. На основе этой функции также определяются линейки системы K'. Часы системы K' определяются на основе функции Ψ_2; кроме того, волна, описываемая этой функцией, трактуется как волна де Бройля. Определение расстояний и промежутков времени в системе K' основано на тех же принципах, что и в системе K. При $\beta \to 0$ система K' переходит в систему K, поскольку $\Psi_1 \to \psi_1$, $\Psi_2 \to \psi_2$, а линейки и часы системы K основаны соответственно на функциях ψ_1, ψ_2.

На основе волны U, определяемой формулой (10), построим еще одну систему $\mathcal{K}'$ следующим образом: поменяем местами роли, которые выполняют функции Ψ_1 и Ψ_2. Движение системы $\mathcal{K}'$ относительно K будет определяться движением нулей и других фаз функции Ψ_2, которая также будет определять линейки системы $\mathcal{K}'$. Волна, описываемая функцией Ψ_1, будет считаться волной де Бройля и выполнять в системе $\mathcal{K}'$ роль часов. Тогда координату χ' и время τ' системы $\mathcal{K}'$ можно определить, в частности, следующими формулами:

$$\chi' = \gamma(at - \beta x), \quad a\tau' = \gamma(x - \beta at) \tag{19}$$

(другой вариант отличается знаком перед χ' и $a\tau'$). Эти преобразования известны под названием сверхсветовых преобразований Лоренца [6]. В системе $\mathcal{K}'$ волна U имеет вид $U = \cos ka\tau' \cos k\chi'$, т.е. является стоячей. Она движется относительно K со скоростью $V = a/\beta$, $|V| > a$, т.е. представляет собой тахион. Записав Ψ_1 в виде $\Psi_1 = \cos(\tilde{K}x - \tilde{\Omega}t)$, найдем волновое число и угловую частоту волны де Бройля тахиона:

$$\tilde{K} = k\gamma = \frac{k}{a}\frac{|V|}{\sqrt{(V/a)^2 - 1}},$$
$$\tilde{\Omega} = ak\beta\gamma = \frac{k}{a}\frac{a^2 \mathrm{sign} V}{\sqrt{(V/a)^2 - 1}},$$

$a^2\tilde{K}^2 - \tilde{\Omega}^2 = (k/a)^2 a^4$; отсюда следует, что k/a играет роль метамассы тахиона. Записав преобразования (19) в виде $\chi' + a\tau' = (x + at)/\delta$, $\chi' - a\tau' = (at - x)\delta$, видим, что бегущие волны, которые в системе K имеют вид $f(x \pm at)$, в системе $\mathcal{K}'$ тоже движутся со скоростью a.

Обсудим статус системы $\mathcal{K}'$. Сначала отметим, что, согласно (19), при $\beta \to 0$ $\chi' \to at$, $a\tau' \to x$. Это указывает на различие подходов к определению координат в системах $\mathcal{K}'$ и K. Коль скоро мы не хотим отказываться от системы $\mathcal{K}'$, то для согласования определений координат на основе стоячих волн u, U следует ввести новую систему отсчета (обозначим ее $\mathcal{K}$) также и на основе волны u, в которой роли, отводимые функциям ψ_1, ψ_2, тоже меняются местами. Таким образом, координата χ и время τ системы $\mathcal{K}$ связаны с координатой x и временем t системы K формулами

$$\chi = at, \quad a\tau = x. \tag{20}$$

Подставив (20) в (19), находим, что координаты систем $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ связаны преобразованиями Лоренца:

$$\chi' = \gamma(\chi - \beta a\tau), \quad a\tau' = \gamma(a\tau - \beta x). \tag{21}$$

При $\beta = 0$ системы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ совпадают.

Более подробно система $\mathcal{K}$ будет рассмотрена в отдельной статье. Отметим только, что подходы к определению координат в системах $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ одинаковы. Тахионные же решения в рассматриваемой волновой модели «появляются» тогда, когда в движущихся друг относительно друга системах отсчета используются разные подходы к определению координат.

7. Дополнительное замечание: преобразование Лоренца и разделение частот. Выше преобразования Лоренца были получены как преобразования, отражающие внутреннюю симметрию волны U. Отметим другой аспект этого результата: преобразование разделения частот (8) компенсируется преобразованием Лоренца. Действительно, применив преобразование (17) к функции $W(x,t)$ (см. (8)), получим волну

$$A[k(x' + at')] + B[k(x' - at')] \tag{22}$$

той же формы, что и w (см. (7)). Например, пусть функции A, B таковы, что волна w — стоячая. Тогда в этой же системе отсчета функция W описывает волну, в которой присутствует движение вдоль оси x; функции же (22) снова соответствует стоячая волна. При этом преобразованию (8) соответствует изменение волны, обусловленное реальным воздействием, тогда как преобразование Лоренца связано не с воздействием на волновой объект, а со сменой наблюдателей.

Заключение. В работе рассмотрена модель, в которой равномерное движение с непрерывным спектром скоростей имеет очень простую природу — сложение двух гармонических волн. Неотъемлемыми составными частями движения фаз суммарной волны U являются: сжатие волны U и замедление колебаний; внутренняя синфазность волны; наличие тахионной трактовки этой же волны; присутствие в составе U волнового движения, которое имеет математические признаки волны де Бройля. Использованы системы отсчета, в которых информация передается с помощью сигналов (звуковых волн), распространяющихся по струне. На основе волны U построена система отсчета K', в которой эта волна является стоячей. Показано, что, несмотря на наличие материального носителя колебаний — струны, система K' и лабораторная система K равноправны, т.е. в данной модели справедлив принцип относительности.

Библиографический список

1. Кузнецов Б.Г. Развитие научной картины мира в физике XVII–XVIII вв. – М., 1955.

2. Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Многомерные солитоны. Введение в теорию и приложения. – М., 2001.

3. Мусиенко А.И., Маневич Л.И. Аналоги релятивистских эффектов в классической механике // УФН. – 2004. – Т. 174, №8.

4. Бом Д. Специальная теория относительности. – М., 1967.

5. Бройль Л. Исследования по теории квантов // Вариационные принципы механики / под ред. Л.С. Полака. – М., 1959.

6. Реками Э. Теория относительности и ее обобщения // Астрофизика, кванты и теория относительности. – М., 1982.