УДК 517.9 + 532.5.032

А. С. Кузиков, С. С. Кузиков

Итерационный метод решения задачи Стокса

A. S. Kuzikov, S. S. Kuzikov

Iterative Technique of Stokes Problem Solution

Предложен метод решения задачи Стокса, основанный на минимизации функционала, являющегося квадратом нормы дивергенции вектора скорости. Для этого применяется градиентный метод. Исследованы свойства функционала. Доказана сходимость последовательности приближений к решению задачи Стокса.

Ключевые слова: задача Стокса, функционал, градиентный метод, сходимость.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-10

The paper puts forward a Stokes problem solution technique based on the minimization of the functional which is the square of a velocity vector divergence norm. To do this the gradient method is used. The properties of the functional are studied and the convergence of the approximation sequence to the Stokes problem solution is proved.

Key words: Stokes problem, functional, gradient method, convergence

Пусть Ω — ограниченная область в $R^m, m=2,3$, с липшицевой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в Ω систему дифференциальных уравнений — систему Стокса:

$$\nu\Delta\overline{u}+\nabla P=\overline{f}, \qquad (1)$$

$$div\,\overline{u}=0, \qquad (2)$$

$$\overline{u}|_{\partial\Omega}=0, \qquad (3)$$

Здесь $\overline{u}=(u_1(x),\ldots,u_n(x))$ — поле скоростей, $P=P(x)$ — функция давления; $\overline{f}=(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ — поле внешних сил; постоянная ν — кинематический коэффициент вязкости; Δ — оператор Лапласа; ∇ — оператор градиента.

Будем придерживаться следующих обозначений:

(f,g,u) — функции из гильбертовых пространств (L_2,H^1);

$(\overline{f},\overline{g},\overline{u})$ — вектор-функции из гильбертовых пространств $(\overline{L}_2,\overline{H}^1)$;

через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ будут обозначаться скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $\overline{L}_2(\Omega)$. Стандартная норма в пространстве Соболева H^1 обозначается $\|\cdot\|_1$. Также используем следующие обозначения:

$$(\nabla u,\nabla v)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_j}\right),$$

$$(\nabla\overline{u},\nabla\overline{v})=\sum_{i=1}^{m}\left(\nabla u_i,\nabla v_i\right).$$

Посредством $H_0^1=H_0^1(\Omega)$ обозначается пространство функций из H^1, равных нулю на границе Ω. $\overline{H}_0^1$ — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит H_0^1. $L_2^0=\left\{f\in L_2(\Omega)\,|\int_\Omega f(x)dx=0\right\}$.

Для вывода слабой формулировки задачи (1) — (3) умножим уравнение (1) на произвольную вектор-функцию $\overline{v}\in\overline{H}_0^1(\Omega)$. Интегрируем равенство по Ω, используя формулы интегрирования по частям. Второе уравнение (2) скалярно умножаем на $q\in L_2^0(\Omega)$. Назовем слабым решением задачи (1) — (3) функции $\overline{u}\in\overline{H}_0^1(\Omega)$ и $p\in L_2^0(\Omega)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\nu(\nabla\overline{u},\nabla\overline{v})-(p,div\,\overline{v})=(f,v)\quad\forall\, v\in H_0^1(\Omega), \qquad (4)$$

$$(div\,\overline{u},q)=0\quad\forall\, q\in L_2^0(\Omega). \qquad (5)$$

Для существования и единственности этого решения достаточно потребовать

$\overline{f}\in L_2(\Omega)$ [1, 2].

Некоторые неравенства и априорные оценки

Неравенство Пуанкаре

$$\|u\|\le C_p\|\nabla u\|\quad\forall\, u\in H_0^1(\Omega),$$

где постоянная C_p зависит только от Ω (ограничена величиной $2l$; l — диаметр Ω или толщина Ω в каком-либо направлении). Отметим, что нормы $\|\overline{u}\|_1$ и $\|\nabla\overline{u}\|$ эквивалентны.

Следующее неравенство очевидно

$$\|div\,\overline{u}\|\le 2\|\nabla\overline{u}\|.$$

Неравенство Нечаса

$$c_0\|q\|\le\|\nabla q\|_{H^{-1}}\quad\forall\, q\in L_2^0(\Omega)$$

с положительной константой c_0.

$\overline{H}^{-1}$ — пространство, сопряженное к $\overline{H}_0^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения из $\overline{L}_2$. Априорные оценки для вектора скоростей $\overline{u}$ и давления p приведем в более общем случае, заменив однородное уравнение (2) неоднородным

$$div\,\overline{u} = g, \quad g \in L_2^0(\Omega), \tag{2'}$$

а уравнение (5) в определении обобщенного решения примет вид

$$(div\,\overline{u}, q) = (g, q) \quad \forall q \in L_2^0(\Omega). \tag{5'}$$

Для $\overline{u}$ оценка непосредственно следует из (4), если взять $\overline{v} = \overline{u}$ и использовать (5') с $q = p$:

$$\nu\left\|\nabla\overline{u}\right\|^2 = (\overline{f}, \overline{u}) + (g, p). \tag{6}$$

Используя неравенство Коши и Пуанкаре из (6), получаем:

$$\nu\left\|\nabla\overline{u}\right\|^2 \le \frac{C_p^2}{\nu}\left\|\overline{f}\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|p\|^2 + \varepsilon\|g\|^2 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Оценку для давления получим, используя неравенство Нечаса. По определению функционала ∇q на $\overline{H}_0^1(\Omega)$ неравенство Нечаса можно представить в виде:

$$c_0\|q\| \le \sup_{\overline{v} \in \overline{H}_0^1} \frac{(q, div\,\overline{v})}{\left\|\nabla\overline{v}\right\|} \quad \forall q \in L_2^0(\Omega).$$

Теперь оценка для давления следует из (4)

$$c_0\|p\| \le \sup_{\overline{v} \in H_0^1} \frac{(p, div\,\overline{v})}{\|\nabla v\|} = \sup_{\overline{v} \in H_0^1} \frac{\nu(\nabla\overline{u}, \nabla\overline{v}) - (\overline{f}, \overline{v})}{\left\|\nabla\overline{v}\right\|} \le$$

$$\le \nu\left\|\nabla\overline{u}\right\| + c_p\left\|\overline{f}\right\|.$$

Отсюда

$$\|p\|^2 \le \frac{1}{c_0^2}\left(\nu\left\|\nabla\overline{u}\right\| + c_p\left\|\overline{f}\right\|\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{c_0^2}\left(\nu^2\left\|\nabla\overline{u}\right\|^2 + 2\nu c_p\left\|\nabla\overline{u}\right\|\left\|\overline{f}\right\| + c_p^2\left\|\overline{f}\right\|^2\right) \le \tag{8}$$

$$\le \frac{2}{c_0^2}\left(\nu^2\left\|\nabla\overline{u}\right\|^2 + c_p^2\left\|\overline{f}\right\|^2\right).$$

Используя это неравенство и неравенство (7) при $\varepsilon = \frac{4\nu}{c_o^2}$, получим оценку

$$\nu\left\|\nabla\overline{u}\right\|^2 \le \frac{3c_p^2}{\nu}\left\|\overline{f}\right\|^2 + \frac{8\nu}{c_0^2}\|g\|^2. \tag{9}$$

Из неравенства (8) получаем оценку для давления

$$\|p\|^2 \le \frac{8c_p^2}{c_0^2}\left\|\overline{f}\right\|^2 + \frac{16\nu}{c_0^4}\|g\|^2. \tag{10}$$

Организация итерационного процесса решения задачи (1)–(3)

При заданном $p(x) \in L_2^0(\Omega)$ уравнение (1) имеет единственное решение $\overline{u} = u(x,p) \in H_0^1(\Omega)$, для которого $div\,\overline{u} = g(x)$ в общем случае не равна нулю, т. е. уравнение (2) не выполняется. Введем функционал

$$J(p) = \frac{1}{2}\left\|div\,\overline{u}(x,p)\right\|^2 \tag{11}$$

и поставим задачу минимизации этого функционала, считая управлением давление $p(x)$.

Найдем приращение функционала $J(p)$, задав p приращение $\delta p \in L_2^0(\Omega)$. Решение уравнения (1) также получит приращение $\delta\overline{u}(x) \in H_0^1(\Omega)$, следовательно

$$\delta J = J(p + \delta p) - J(p) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(div(\overline{u} + \delta\overline{u})\right)^2 dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (div\,\overline{u})^2 dx = \int_\Omega div\,\overline{u} \cdot div\,\delta\overline{u}\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (div\,\delta\overline{u})^2 dx.$$

Из уравнения (1) следует, что $\delta\overline{u}$ удовлетворяет уравнению

$$-\nu\Delta\delta\overline{u} + \nabla\delta p = 0. \tag{12}$$

Из этого уравнения получаем оценку

$$\left\|\delta\overline{u}\right\|_1 \le c\|\delta p\|, \quad c = const. \tag{13}$$

Следовательно, главная линейная часть приращения δJ есть

$$\delta_1 J = \int_\Omega div\,\overline{u} \cdot div\,\delta\overline{u}\,dx.$$

Для получения представления градиента функционала (11) уравнение (12) умножаем скалярно на вектор-функцию $\overline{\psi} = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) \in H_0^1(\Omega)$. Интегрируя полученное равенство по частям, получим

$$\nu\int_\Omega \delta\overline{u} \cdot \Delta\overline{\psi}\,dx + \int_\Omega \delta p \cdot div\,\overline{\psi}\,dx = 0. \tag{14}$$

Преобразуем $\delta_1 J$ следующим образом

$$\delta_1 J = -\int_\Omega \delta\overline{u} \cdot \nabla div\,\overline{u}\,dx. \tag{15}$$

Потребовав, чтобы вектор-функция $\overline{\psi}$ являлась обобщенным решением уравнения

$$\nu\Delta\overline{\psi} = \nabla div\,\overline{u}, \tag{16}$$

получим вид градиента функционала (11)

$$J'(p) = div\,\overline{\psi} \in L_2^0(\Omega). \tag{17}$$

Уравнение (16) имеет ту же структуру, что и уравнение (1). Следовательно, верны оценки

$$\frac{1}{2}\left\|div\,\overline{\psi}\right\| \le \left\|\overline{\psi}\right\|_1 \le c\left\|div\,\overline{u}\right\|, \quad \left\|div\,\overline{u}\right\|^2 \le \frac{16\nu}{c_0^4}\left\|div\,\overline{\psi}\right\|^2. \tag{18}$$

Покажем, что $J(p)$ является сильно выпуклым функционалом. Действительно, $\forall\alpha \in [0,1]$, используя оценку (10), получаем

$$J(\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2) = \frac{1}{2}\left\|div\left(\alpha\overline{u}_1 + (1-\alpha)\overline{u}_2\right)\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha\left\|div\,\overline{u}_1\right\|^2 + (1-\alpha)\left\|div\,\overline{u}_2\right\|^2 - \alpha(1-\alpha)\left\|div(u_1 - u_2)\right\|^2\right) \le$$

$$\le \alpha J(p_1) + (1-\alpha)J(p_2) - \alpha(1-\alpha)\frac{c_0^4}{16\nu}\left\|p_1 - p_2\right\|^2,$$

что и доказывает сильную выпуклость функционала. В свою очередь, градиент функционала $J'(p) = div\,\overline{\psi}$ удовлетворяет условию Липшица. Для произвольных давлений $p_1(x)$ и $p_2(x)$, используя оценки (18), получаем неравенство

$$\|J'(p_1)-J'(p_2)\|^2=\int_\Omega (div\overline{\psi}_1-div\overline{\psi}_2)^2dx=$$

$$=\int_\Omega (div(\overline{\psi}_1-\overline{\psi}_2))^2dx\le 4c^2\|div(\overline{u}_1-\overline{u}_2)\|^2\le 16c^4\|p_1-p_2\|.$$

Следовательно, в качестве постоянной Липшица может быть взята постоянная $L=4c^2$.

Эти свойства функционала (11) позволяют организовать итерационный процесс минимизации на основе градиентного метода.

Пусть известно n-е приближение давления $p^n(x)$. Решая уравнение (1) с $p=p^n$, найдем $\overline{u}^n(x)$. Подставляя $\overline{u}^n(x)$ в правую часть сопряженного уравнения (16), найдем $\psi^n(x)$ и, следовательно, $J'(p^n)=div\,\psi^n(x)$.

Следующее приближение $p^{n+1}(x)$ найдем по схеме

$$p^{n+1}(x)=p^n(x)-\alpha_n J'(p^n),$$

где $\alpha_n\ge 0$ — итерационный параметр, который определим по методу скорейшего спуска. Заметим, что $p^{n+1}(x)\in L_2^0(\Omega)$. Введем функцию

$$f^n(\alpha)=J(p^n-\alpha J'(p^n)) \tag{19}$$

и определим α_n из условия:

$$f^n(\alpha_n)=\inf_{\alpha\ge 0} f^n(\alpha). \tag{20}$$

Для данной задачи, в силу ее линейности, α_n можно найти непосредственно следующим образом.

Заметим, что:

$u(x,\alpha p_2+(1-\alpha)p_1)=\alpha u(x,p_2)+(1-\alpha)u(x,p_1)$.

Полагая $p_2=p_1+h$, получим

$u(x,p_1+\alpha h)=u(x,p_1)+\alpha(u(x,p_1+h)-u(x,p_1))$.

Отсюда выражение для функционала примет вид

$$J(p_1+\alpha h)=\frac{1}{2}\left\|div(u(x,p_1))+\alpha\left(u(x,p_1+h)-u(x,p_1)\right)\right\|^2=$$

$$=\frac{1}{2}\|div\,u(x,p_1)\|^2+\alpha\left(div\,u(x,p_1),\ div(u(x,p_1+h)-u(x,p_1)\right)+$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\left\|div\left(u(x,p_1+h)-u(x,p_1)\right)\right\|^2.$$

Из этой формулы при $u(x,p^n)=u^n$, $p_1=p^n, h=-J'(u^n)$ получим явное представление для функции (19):

$$f^n(\alpha)=J(p^n)+\alpha(div(u^n),div(u(x,p^n-J'(p))-u^n))+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha^2\|div(u(x,p^n-J'(p^n))-u^n\|^2.$$

Этот квадратный трехчлен достигает своей нижней грани при

$$\alpha=\alpha_n=-\frac{(div\,u^n,div(u(x,p^n-J'(p^n))-u^n)}{\|div(u(x,p^n-J'(p^n)-u^n)\|^2}.$$

В данном случае можно применить теорему 1 о сходимости [3, стр. 70], которая утверждает, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|J'(p^n)\|=0$ и, следовательно, в силу (18) $\lim\limits_{n\to\infty}J(p^n)=0$;

2) $\{p^n\}$ сходится к единственной точке $p(x)\in L_2^0(\Omega)$, и имеют место неравенства

$$J(p^n)\le J(p^0)\beta^n \text{ и } \|p^n-p\|\le\frac{2}{\mu}\beta^n,$$

где $\beta=1-\dfrac{\mu}{L}$, $\mu>0$ — постоянная, получаемая из условия сильной выпуклости; L — постоянная Липшица.

Данные неравенства дают информацию о скорости сходимости.

Из сходимости $\{p^n\}$ следует сходимость $\{u^n(x)\}$ к функции $u(x)\in H_0^1(\Omega)$.

Следовательно, функции $(u(x),p(x))\in H_0^1(\Omega)\times L_2^0(\Omega)$ являются решением задачи (1) — (3).

Библиографический список

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М., 1970.

2. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. — М., 1981.

3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М., 1981.