УДК 514.75

М.А. Чешкова

О плоском листе Мебиуса

M.A. Cheshkova

The Plane Moebius Strip

Выведена формула для определения плоских листов Мебиуса. Построены примеры таких поверхностей, используя математический пакет.

Ключевые слова: лист Мебиуса, плоский лист Мебиуса, 2π-периодическая функция, 2π-антипериодическая функция.
DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-09

We derive formula for the defining the flat Mebius bands. The examples up such surfaces are constructed using the matematical package.

Key words: Mobius strip, the plane Moebius strip, 2π-periodic function, 2π-antiperiodic function,

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в [2]. В [3–5] строятся пересекающиеся листы Мебиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

Рассмотрим линейчатую поверхность M [6, с. 102]:

$$r(u,v) = s(v) + ul(v), \tag{1}$$

где $s = s(v)$ – 2π-периодическая, а $l = l(v)$ – 2π-антипериодическая вектор-функции.

Когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [s'(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Если $n \neq 0$, то $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае есть односторонняя.

Формула (1) при $v \in [0, 2\pi], u \in [-1, 1]$ задает лист Мебиуса, а кривая $s = s(v)$ есть средняя линия листа Мебиуса.

Линейчатая поверхность (1) имеет нулевую гауссову кривизну, если [6, с. 103].

$$(s(v)', l(v), l(v)') = 0, \tag{2}$$

где $(,,)$ – смешанное произведение трех векторов.

Поверхность в этом случае либо плоскость, либо образующие параллельны некоторой прямой и поверхность есть цилиндрическая, либо образующие проходят через неподвижную точку и поверхность является конической, либо образована касательными к пространственной кривой — ребру возврата. В последнем случае поверхность называется торсом, а точки ребра возврата — фокальными точками.

Плоский лист Мебиуса не может быть ни конусом, ни цилиндром [2]. Лист Мебиуса с краем называют также лентой Мебиуса.

Определим фокальную кривую и торс, на котором расположена лента Мебиуса.

Так как $[s'(v), l(v)] \neq 0$, то из (2) имеем

$$l'(v) = f(v)s'(v) + \mu(v)l(v), \tag{3}$$

где $f(v)$ – 2π- антипериодическая функция, а $\mu(v)$ – 2π-периодическая функция.

Пусть $F(v) = s(v) + t(v)l(v)$ — точка образующей.

Имеем

$$F'(v) = s'(v)(1 + t(v)f(v)) + (t'(v) + t(v)\mu(v))l(v). \tag{4}$$

Требуем, чтобы $F'(v)||l(v)$, т.е. поверхность образована касательными к кривой $F = F(v)$.

Получим $t(v) = -\frac{1}{f(v)}$.

Тогда фокальная линия

$$F(v) = s(v) - \frac{1}{f(v)}l(v) \tag{5}$$

есть ребро возврата торса.

Так как $f(v)$, $(\frac{1}{f(v)})' + \frac{1}{f(v)}\mu(v)$ – 2π-антипериодические функции, то имеет место следующее утверждение. *Фокальная кривая листа Мебиуса имеет асимптоты и особые точки.*

Наиболее простые листы Мебиуса получаются, если средняя линия расположена на цилиндре $s(v) = (cos(v), sin(v), g(v))$, где $g(v)$ – 2π-периодическая функция, а

$$l'(v) = f(v)s'(v). \tag{6}$$

Имеем

$$F'(v) = s'(v) - \frac{1}{f(v)}l'(v) - (\frac{1}{f(v)})'l(v). \tag{7}$$

Формула (7) примет вид

$$F'(v) = -(\frac{1}{f(v)})'l(v). \tag{8}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В качестве примера исследуем фокальную кривую плоского листа Мебиуса, рассмотренного И.Х. Сабитовым в работе [2]. Для этой поверхности

$$s(v) = (cos(v), sin(v), cos(v)siv(v)), f(v) = sin(\frac{v}{2}). \tag{9}$$

Для определения вектора $l(v) = (l_1(v),\ l_2(v),\ l_3(v))$ имеем систему

$$l_1'(v) = -sin(\frac{v}{2})sin(v), l_2'(v) = sin(\frac{v}{2})cos(v),$$

$$l_3'(v) = sin(\frac{v}{2})cos(2v).$$

Решая эту систему, получим

$$l(v) = (\frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}) - sin(\frac{v}{2}), cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}),$$

$$\frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})). \tag{10}$$

Уравнения плоского листа примут вид

$$x = cos(v) + u(\frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}) - sin(\frac{v}{2})),$$

$$y = sin(v) + u(cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2})),$$

$$z = sin(v)cos(v) + u(\frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})).$$

Используя математический пакет, построим эту поверхность (рис. 1), полагая $v \in [0, 2\pi], u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Обозначим его: лента Мебиуса 1.

Плоская лента Мебиуса расположена на торсе [2]. Исследуем ребро возврата этого торса.

Для плоской ленты 1 линия

$$F(v) = s(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}l(v) \tag{11}$$

есть фокальная линия торса.

Имеем

$$F(v)' = -(\frac{1}{sin(\frac{v}{2})})'l(v). \tag{12}$$

Кривая $F(v) = s(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}l(v)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ имеет асимптоты при $v = 0, v = 2\pi$.

Так как $F(v)' = 0$ при $v = \pi$, то на этом промежутке при $v = \pi$ гладкость кривой нарушается.

Поэтому будем рассматривать кривую, полагая $v \in (0, 2\pi)$.

Запишем уравнения, определяющие фокальную кривую, и построим ее (рис. 2).

$$x = cos(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}(\frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}) - sin(\frac{v}{2})),$$

$$y = sin(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}(cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2})),$$

$$z = sin(v)cos(v) -$$

$$\frac{1}{sin(\frac{v}{2})}(\frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})). \tag{13}$$

Запишем уравнение торса, образованного касательными к фокальной кривой (рис. 2).

Имеем

$$x = cos(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})})(\frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}) - sin(\frac{v}{2})),$$

$$y = sin(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})})(cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2})),$$

$$z = sin(v)cos(v) +$$

$$(u - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})})(\frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})). \tag{14}$$

Торс будем строить на промежутках $v \in [1/10, 2\pi - 1/10], u \in [-2, 2]$; $v \in [\pi/4, \pi - \pi/4, u \in [0, 2]$; $v \in [\pi/4, \pi - \pi/4, u \in [0, 2]$ и совмещать с лентой Мебиуса (рис. 2, 3).

Пример 2. Рассмотрим плоский лист Мебиуса с линией центров $s(v) = (cos(v), sin(v), \frac{1}{2}cos(2v))$, что у ленты Мебиуса 1 и функцией $f(v) = sin(\frac{kv}{2})$, где k – нечетное число $k \geq 3$.

Вектор $l(v) = (l_1(v), l_2(v), l_3(v))$ определится из системы

$$l_1(v)' = -sin(\frac{kv}{2})sin(v), l_2(v)' = sin(\frac{kv}{2})cos(v),$$

$$l_3(v)' = sin(\frac{kv}{2})cos(2v).$$

Решение этой системы имеет вид

$$l_1(v) = \frac{1}{2}(\frac{-sin((\frac{k}{2} - 1)v)}{\frac{k}{2} - 1} + \frac{sin((\frac{k}{2} + 1)v))}{\frac{k}{2} + 1}),$$

$$l_2(v) = \frac{1}{2}(\frac{-cos((\frac{k}{2} + 1)v)}{\frac{k}{2} + 1} - \frac{cos((\frac{k}{2} - 1)v)}{\frac{k}{2} - 1}),$$

$$l_3(v) = \frac{1}{2}(\frac{-cos((\frac{k}{2} + 2)v)}{\frac{k}{2} + 2} - \frac{cos((\frac{k}{2} - 2)v)}{\frac{k}{2} - 2}).$$

Построим плоский лист Мебиуса при $k = 3$ с теми же параметрами $v \in [0, 2\pi], u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, что у ленты Мебиуса 1. Обозначим его: лента Мебиуса 2 (рис. 4). Определим фокальную кривую $F(v) = s(v) - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})}l(v)$ для ленты Мебиуса 2 на промежутке $[0, 2\pi]$. Она имеет асимптоты при

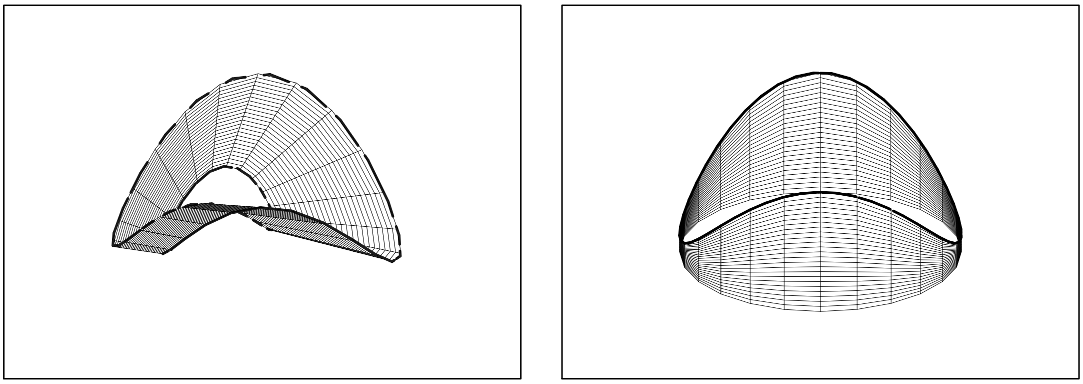

Рис. 1. Лента Мебиуса 1 и средняя линия ленты Мубиуса 1 на цилиндре

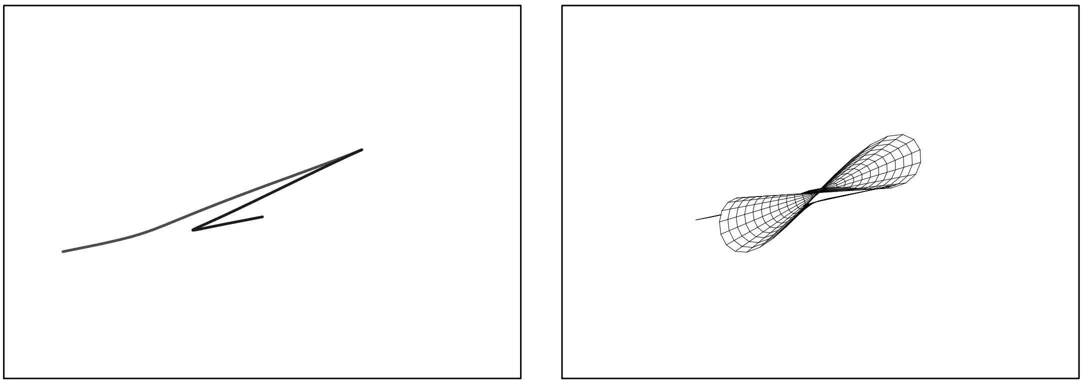

Рис. 2. Фокальная кривая ленты Мебиуса 1 и торс $v \in [1/10, 2\pi - 1/10]$

$v = 0, v = 2\pi/3, v = 4\pi/3, v = 2\pi$ и три особые точки $v = \pi/3, \pi, 5\pi/3$.

Уравнения фокальной кривой для ленты Мебиуса 2 имеют вид

$$x = cos(v) - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})}\frac{1}{2}(\frac{-sin((\frac{3}{2}-1)v)}{\frac{3}{2}-1}+$$

$$+\frac{sin((\frac{3}{2}+1)v))}{\frac{3}{2}+1}),$$

$$y = sin(v) - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})}\frac{1}{2}(\frac{-cos((\frac{3}{2}+1)v)}{\frac{3}{2}+1}-$$

$$-\frac{cos((\frac{3}{2}-1)v))}{\frac{3}{2}-1}),$$

$$z = sin(v)cos(v) - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})}\frac{1}{2}(\frac{-cos((\frac{3}{2}+2)v)}{\frac{3}{2}+2}-$$

$$-\frac{cos((\frac{3}{2}-2)v)}{\frac{3}{2}-2}).$$

Уравнения торса для ленты Мебиуса 2 имеют вид:

$$x = cos(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})})\frac{1}{2}(\frac{-sin((\frac{3}{2}-1)v)}{\frac{3}{2}-1}+$$

$$+\frac{sin((\frac{3}{2}+1)v))}{\frac{3}{2}+1}),$$

$$y = sin(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})})\frac{1}{2}(\frac{-cos((\frac{3}{2}+1)v)}{\frac{3}{2}+1}-$$

$$-\frac{cos((\frac{3}{2}-1)v)}{\frac{3}{2}-1}),$$

$$z = sin(v)cos(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{3v}{2})})\frac{1}{2}(\frac{-cos((\frac{3}{2}+2)v)}{\frac{3}{2}+2}-$$

$$-\frac{cos((\frac{3}{2}-2)v)}{\frac{3}{2}-2}).$$

Построим фокальную кривую (рис. 4)на промежутке $v = [\pi/3 - 1/10, \pi/3 + 1/10]$, и торс (рис. 5, 6) на промежутках $v \in [1/3, 2\pi/3 - 1/3], v \in 2\pi/3 + 1/3, 4\pi/3 - 1/3], v \in [4\pi/3 + 1/3, 2\pi - 1/3], u = [0, 3]$.

Пример 3. Рассмотрим плоский лист Мебиуса с линией центров $s(v) = (cos(v), sin(v), \frac{1}{3}sin(3v))$ и функцией $f(v) = sin(\frac{v}{2})$, что у листа 1, с параметрами $v \in [0, 2\pi], u \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Вектор $l(v) = (l_1(v), l_2(v), l_3(v))$ определится из системы

$$l_1(v)' = -sin(\frac{v}{2})sin(v),$$

$$l_2(v)' = sin(\frac{v}{2})cos(v),$$

$$l_3(v)' = sin(\frac{v}{2})cos(3v).$$

Решение этой системы имеет вид

$$l_1(v) = -sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}),$$

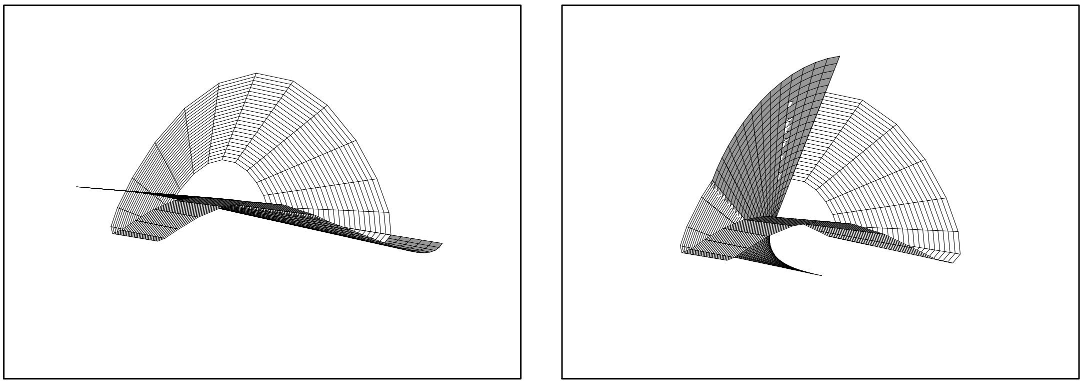

Рис. 3. Лента Мебиуса 1 и торс $v \in [\pi/4, \pi - \pi/4]$, $v \in [\pi + \pi/4, 2\pi - \pi/4]$

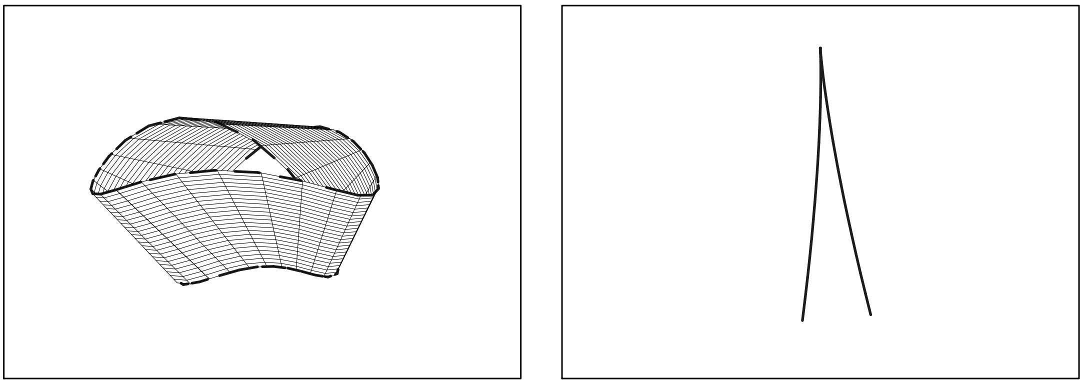

Рис. 4. Лента Мебиуса 2 и фокальная кривая, $v \in [\pi/3 - 1/10, \pi/3 + 1/10]$

$$l_2(v) = cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}),$$

$$l_3(v) = \frac{1}{7}cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2}).$$

Построим плоский лист Мебиуса и среднюю линию. Обозначим: лента Мебиуса 3. Лента Мебиуса 3 и ее средняя линия 3 имеют вид (рис. 6).

Для рассматриваемой поверхности линия

$$F(v) = s(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}l(v) \qquad (15)$$

есть фокальная линия торса.

Имеем

$$F(v)' = -(\frac{1}{sin(\frac{v}{2})})'l(v). \qquad (16)$$

Кривая $F(v) = s(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}l(v)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ имеет асимптоты при $v = 0, v = 2\pi$.

Так как $F(v)' = 0$ при $v = \pi$, то на этом промежутке при $v = \pi$ гладкость кривой нарушается.

Запишем уравнения, определяющие фокальную кривую.

$$x = cos(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}(-sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2})),$$

$$y = sin(v) - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}(cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2})),$$

$$z = \frac{1}{3}sin(3v) -$$

$$- \frac{1}{sin(\frac{v}{2})}(\frac{1}{7}cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})). \qquad (17)$$

Запишем уравнение торса, образованного касательными к фокальной кривой.

Имеем

$$x = cos(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})})(-sin(\frac{v}{2}) + \frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2})),$$

$$y = sin(v) + (u - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})})(cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2})),$$

$$z = \frac{1}{3}sin(3v) +$$

$$+ (u - \frac{1}{sin(\frac{v}{2})})(\frac{1}{7}cos(\frac{7v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})). \qquad (18)$$

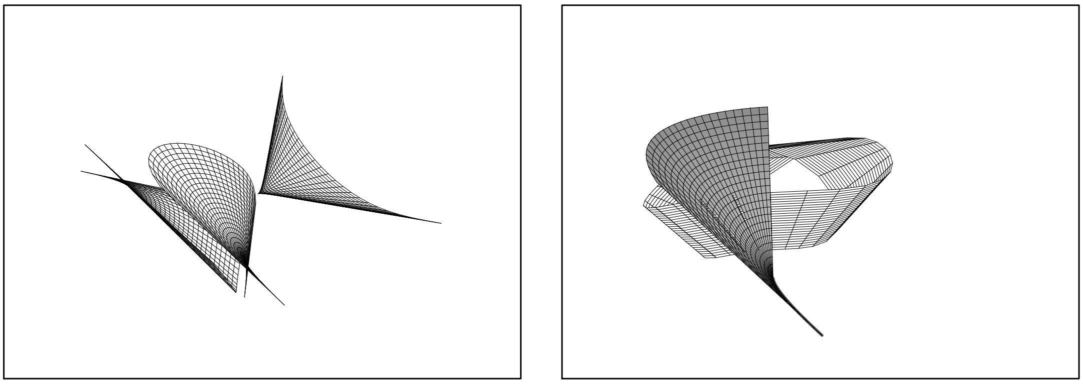

Рис. 5. Торс. Лента Мебиуса 2 и торс $v = [\pi/3, 2\pi/3 - 1/3]$

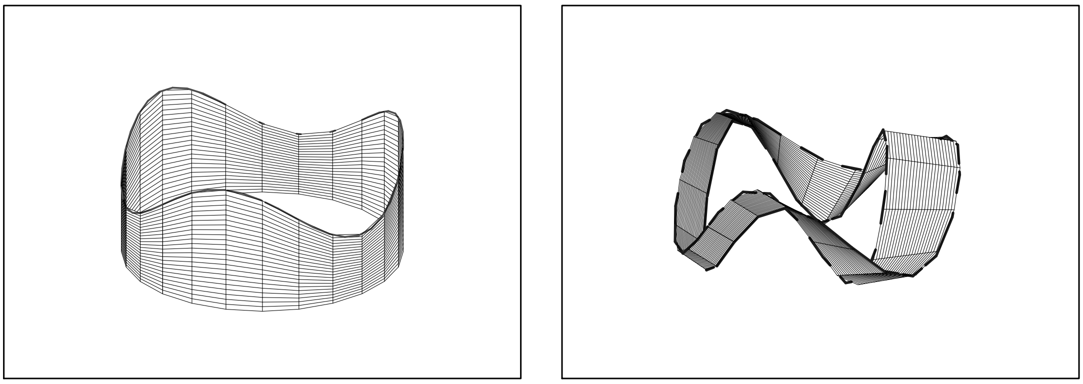

Рис. 6. Средняя линия ленты Мебиуса 3 на цилиндре. Лента Мебиуса 3

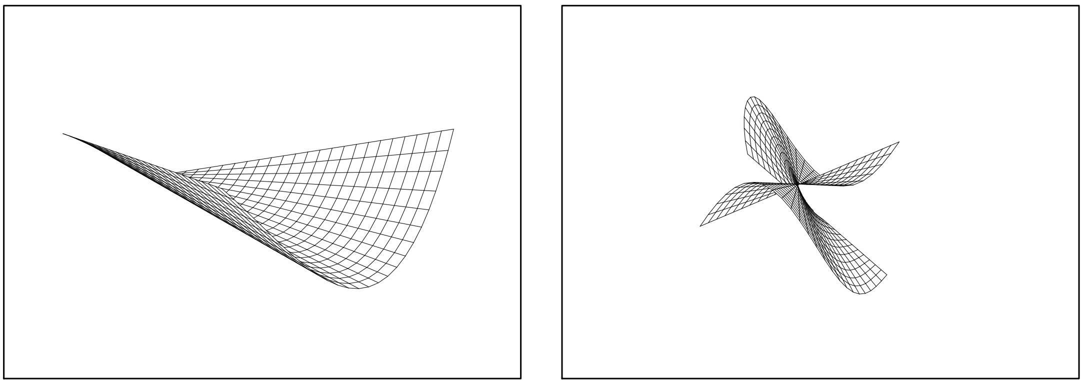

Рис. 7. Торс $v \in [1, \pi - 1], u \in [0, 2]$,$v \in [\pi, \pi + 2], u \in [0, 2]$

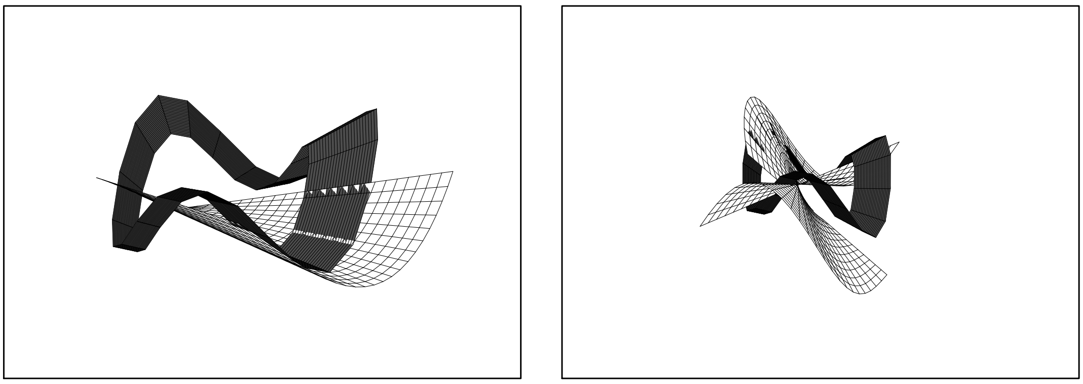

Рис. 8. Лента Мебиуса 3 и торс $v \in [1, \pi - 1], u \in [0, 2],\ v \in [\pi, \pi + 2], u \in [0, 2]$

Построим торс для ленты Мебиуса 3 на интервалах $v \in (1, \pi - 1), u \in (0, 2)$, $v \in (\pi, \pi + 2), u \in [0, 2]$ (рис. 7).

Совместим торс с лентой Мебиуса 3 (рис. 8).

Замечаем, что лента Мебиуса 3 есть перекрученный плоский лист Мебиуса.

Библиографический список

1. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos., 1:1(1900).

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в эвклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5.

3. Чешкова М.А. О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2006. – Вып. 6.

4. Чешкова М.А. Самопересечение листа Мебиуса // Математическое образование в регионах России: тр. междунар. науч.-практ. конф. – Барнаул, 2007.

5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия АлтГУ. – 2012. – №1/1.

6. Норден А.П. Теория поверхностей. – М., 1956.