УДК 532.546 + 536.425

М.А. Токарева

Об одной модели тающего льда*

M.A. Tokareva

A Model of Melting Ice

Тающий лед рассматривается как двухфазная сплошная среда, состоящая из воды и льда. В основу математической модели положены уравнения сохранения массы для воды и льда с учетом фазовых переходов, уравнения движения фаз в форме законов Дарси и уравнение теплового баланса снега. Лед рассматривается как пороупругая среда.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, пороупругость, лед.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-08

Melting ice is considered as a solid two-phase medium consisting of water and ice. The mathematical model is based on the equation of mass conservation for water and ice with phase transitions, equations of motion of the phases in the form of Darcy's law and the equation of heat balance of the snow. Ice is considered as poroelastic medium.

Key words: two-phase filtration, poroelasticity, ice.

Введение. В основу математической модели таяния льда положены уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, закон Дарси, реологический закон типа Максвелла и уравнение энергии системы [1–3]. Вопросы разрешимости одномерных задач для подобной модели без учета фазовых переходов исследовались в работах [4–5].

Постановка задачи. Рассматривается следующая система уравнений составного типа

$$\tfrac{\partial(1-\phi)\rho_i}{\partial t} + div((1-\phi)\rho_i\vec{v}_i) = I_{wi},$$
$$\tfrac{\partial\phi\rho_w}{\partial t} + div(\phi\rho_w\vec{v}_w) = I_{iw}, \quad I_{iw} = -I_{wi}, \tag{1}$$

$$\phi(\vec{v}_w - \vec{v}_i) = -\frac{k(\phi)}{\mu}(\nabla p_w + \rho_w\vec{g}), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\phi(1-\phi)}\frac{d\phi}{dt} = -\left(\alpha p_e + \beta\frac{dp_e}{dt}\right), \tag{3}$$

$$(\rho_w c_w\phi + \rho_i c_i(1-\phi))\tfrac{\partial\theta}{\partial t} + (\rho_i c_i\vec{v}_i + \rho_w c_w\vec{v}_w)\nabla\theta =$$
$$= div(\lambda\nabla\theta) + \nu\tfrac{\partial\rho_i(1-\phi)}{\partial t}, \tag{4}$$

$$p_{tot} = \phi p_w + (1-\phi)p_i, \tag{5}$$

$$p_e = (1-\phi)(p_i - p_w), \rho = \phi\rho_w + (1-\phi)\rho_i,$$

где $\rho_w, \rho_i, \vec{v}_i, \vec{v}_w$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; I_{wi}, I_{iw} – интенсивности перехода массы из воды в лед и изо льда в воду соответственно; ϕ – пористость; $\vec{g} = (0, 0, -g)$– плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; p_{tot} – общее давление (заданная функция); α, β – параметры льда; θ – температура среды ($\theta_i = \theta_w = \theta$), $(c_i, c_w) = const > 0$ – теплоемкости фаз при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ – теплопроводность льда ($\lambda = a + b\rho^2$, $\rho = \rho_w\phi + \rho_i(1-\phi)$, $a = const > 0$, $b = const > 0$) [6]. Задача записана в эйлеровых координатах (t, x, y, z), $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_i\nabla A$ – полная производная. Истинные плотности ρ_i, ρ_w принимаются постоянными. Искомыми являются величины ϕ, $\vec{v}_i$, $\vec{v}_w$, p_w, p_i, θ. В настоящей работе принята гипотеза $(\rho_i, \rho_w, p_{tot}) = const$, $\vec{v}_i = 0$, т.е. $I_{wi} = -\rho_i\frac{\partial\phi}{\partial t}$. Рассматривается случай, когда и при отрицательных температурах присутствует некоторое (малое) количество воды.

Предположим, что в системе координат (x, y, z) входящие в систему (1)–(5) функции зависят от z, t. Для возникшей системы рассмотрим следующую задачу: лед занимает область $(-\infty, ct)$, $t > 0$. При $z = -\infty$ вода и лёд неподвижны ($v_w = 0$, $v_i = 0$), и температура $\theta = \theta^-$ (ниже температуры плавления льда); при $z = ct$ известны скорости воды ($v_w = v^0$), льда ($v_i = v^+$) и задана температура $\theta = \theta^0$ (равная температуре плавления льда). Полагая, что все искомые функции зависят лишь от переменной $\xi = z - ct$ (c – неизвестная постоянная), и складывая уравнения сохранения массы, приходим к следующей системе уравнений относительно искомых функций $\phi, \vec{v}_w, \theta, p_w$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации №1.3820.2011, гранта РФФИ 13-08-01097 и программы стратегического развития Алтайского государственного университета.

$$\frac{d}{d\xi}(c\phi(\rho_w-\rho_i)-\phi\rho_w v_w)=0, \qquad (6)$$

$$\phi v_w=-\frac{k(\phi)}{\mu}\left(\frac{dp_w}{d\xi}-\rho_w g\right), \qquad (7)$$

$$c\frac{1}{\phi(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\xi}=\alpha(p_{tot}-p_w)-c\beta\frac{d}{d\xi}(p_{tot}-p_w), \quad (8)$$

$$\begin{gathered}(-c\phi(\rho_w c_w+\rho_i c_i)+\rho_w c_w v_w)\tfrac{d\theta}{d\xi}=\\ =\tfrac{d}{d\xi}\left(\lambda\tfrac{d\theta}{d\xi}\right)+c\nu\rho_i\tfrac{d\phi}{d\xi}.\end{gathered} \qquad (9)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\phi(0)=\phi^0\in(0,1),\quad \phi|_{\xi\to-\infty}=\phi^+\in(0,1),\\ v_w(0)=v^0,\quad v_w|_{\xi\to-\infty}=0,\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}\theta(0)=\theta^0,\\ \theta|_{\xi\to-\infty}=\theta^-,\quad \tfrac{d\theta}{d\xi}|_{\xi\to-\infty}=0.\end{gathered} \qquad (11)$$

В результате преобразований приходим к распавшейся системе, в которой θ находится из (9), (11) после нахождения ϕ, v_w, p_w из (6)–(8), (10). Основную трудность представляет вопрос разрешимости задачи для функций ϕ, v_w, p_w.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: $g=0, \phi^0>\phi^+$, $(\phi^0,\phi^+)\in(0,1)$, $\rho_w>\rho_i$, $v^0<0$,

$$k(\phi)=\begin{cases}K\phi^n, & 0<\phi<1, \quad n<1,\\ 0, & \phi\le 0.\end{cases}$$

Тогда существует единственное классическое автомодельное решение $(\phi_i(\xi), v_i(\xi), p(\xi)), i=s,f$ задачи (6) – (8), (10).

Интегрируя первое уравнение (6), выводим равенство

$$c\phi(\rho_w-\rho_i)-\phi\rho_w v_w=A=const. \qquad (12)$$

Используя условия (9), из равенства (10) выводим представления для постоянных c и A: $c=\frac{v^0\rho_w\phi^0}{(\rho_w-\rho_i)(\phi^0-\phi^+)}<0$, $A=\frac{\phi^+\phi^0\rho_w v^0}{\phi^+-\phi^0}$. После этого, возвращаясь в (10), приходим к равенству $\phi v_w=\phi\frac{\phi^0 v^0}{\phi^0-\phi^+}$, из которого следует, что $v_w=\frac{\phi^0 v^0}{\phi^0-\phi^+}$ при $\phi\ne 0$. Тогда из (7) получим

$$\frac{dp}{d\xi}=\rho_w g-\frac{\mu\phi\phi^0 v^0}{k(\phi)(\phi^0-\phi^+)}. \qquad (13)$$

Продифференцируем уравнение (8) по ξ. Используя (12) и с учетом, что $g=0$ и $p_{tot}=const$, имеем

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{d\xi}\left(\tfrac{1}{(1-\phi)\phi}\tfrac{d\phi}{d\xi}\right)+\tfrac{\beta\mu(1-n)v^0\phi^0}{\phi^0-\phi^+}\phi^{-n}\tfrac{d\phi}{d\xi}-\\ -\tfrac{\alpha\mu(\rho_w-\rho_i)}{\rho_w k}\phi^{(1-n)}=0.\end{gathered} \qquad (14)$$

Полагая $u(\phi(\xi))=\int\limits_{\phi^+}^{\phi(\xi)}\frac{1}{\phi(1-\phi)}d\tau$, приходим к задаче

$$\begin{gathered}u''+b(u)u'-d(u)u=0,\\ u(0)=\int\limits_{\phi^+}^{\phi^0}\frac{1}{a(\tau)}d\tau\equiv u_0,\quad u(\infty)=0,\end{gathered} \qquad (15)$$

где

$$a(u)=\phi(u)(1-\phi(u)), d(u)=\frac{\alpha\mu(\rho_w-\rho_i)}{\rho_w k}\phi^{1-n}(u)\frac{1}{u},$$

$$b(u)=\frac{\beta\mu(1-n)v^0\phi^0}{\phi^0-\phi^+}\frac{1}{\phi(u)(1-\phi(u))}\phi^{-n}(u).$$

Функции $d(\phi), a(\phi)$ положительны для всех $\phi\in(0,1)$. На отрезке $[0,n]$ рассмотрим вспомогательную задачу для $v(\xi)=\int\limits_{\phi^+}^{\phi(\xi)}\frac{1}{a(\tau)}d\tau$:

$$v''+b(v)v'-d(v)v=0, v(0)=u_0, v(n)=0. \qquad (16)$$

Решения последней в силу принципа максимума удовлетворяют неравенствам $0\le v(\xi)\le u_0$ для всех $\xi\in[0,n]$.

Поэтому функции $b(v)$ и $d(v)$ являются строго положительными и ограниченными.

Производная решения задачи (15) в точке $\xi=n$ неположительна, поскольку предположение $v'(n)>0$, ввиду граничного условия $v(n)=0$, приводит к противоречию с неотрицательностью $v(\xi)$. Представив уравнение (15) в виде

$$\psi'=vd(v)\ge 0,\quad \psi=v'+\int\limits_0^v b(\tau)d\tau, \qquad (17)$$

выводим, что монотонно возрастающая функция $\phi(\xi)$ является неположительной. Поэтому $v'(\xi)\le 0$ для всех $\xi\in[0,n]$.

Из (16) следует $v'+\alpha^*v\le 0$. Отсюда получаем

$$v(\xi)\le v_0\exp(-\alpha^*\xi), \qquad (18)$$

где α^* – минимальное значение функции $b(\tau)$.

Уравнение (15) представим в виде

$$(|v'|+\int\limits_0^v b(\tau)d\tau)'-vd(v)=0$$

и проинтегрируем по ξ от 0 до текущего значения ξ:

$$|v'(\xi)|-|v'(0)|=\int\limits_{v(\xi)}^{v_0}b(\tau)d\tau+\int\limits_0^{\xi}\tau d(\tau)d\tau\equiv\varphi(\xi)\ge 0.$$

Имеем $|v'(0)| - \varphi(\xi) \leq -v'(\xi)$. Интегрируя последнее неравенство по ξ от 0 до n, получим

$$|v'(0)| \leq \frac{1}{n}\left(\int\limits_0^n \varphi(\tau)d\tau + v_0\right) \equiv N < \infty.$$

Поскольку $\psi(0) \leq \psi(\xi) \leq \psi(n)$, то имеем

$$v'(0) + \int\limits_0^{v_0} b(\tau)d\tau \leq v'(\xi) + \int\limits_0^{v(\xi)} b(\tau)d\tau.$$

Учитывая, что $\int\limits_0^{v_0} b(\tau)d\tau \geq \int\limits_0^{v(\xi)} b(\tau)d\tau$, получим:

$$|v'(\xi)| + \int\limits_{v_0}^{v(\xi)} b(\tau)d\tau \leq |v'|.$$

Отсюда следует, что для всех $\xi \in [0, n]$

$$|v'(\xi)| \leq |v'(0)| \leq N. \qquad (19)$$

Пусть $y = |v'(\xi)|$. Уравнение (15) представим в виде

$$y' + b(v)y + d(v)v = 0.$$

В частности, имеем неравенство $y' + b_0 y \leq 0$. Отсюда следует, что

$$|v'(\xi)| \leq N\exp(-b_0\xi). \qquad (20)$$

Представим решение задачи (15) в виде

$$v(\xi) = v_0 - \int\limits_0^{\xi} (|v'(0)| - \varphi(\tau))d\tau \equiv T(v), \qquad (21)$$

где значение $v'(0)$ определяется из соотношения

$$\int\limits_0^n (|v'(0)| + \varphi(\xi))d\xi = v_0.$$

В пространстве непрерывных функций $C[0, n]$ рассмотрим замкнутое, ограниченное, выпуклое множество $M = \{v(\xi)| \quad 0 \leq v(\xi) \leq u_o, \quad \xi \in [0, n]\}$. Оператор T определен на множестве M, и в силу принципа максимума имеет место вложение $T(M) \subset M$.

Проверим непрерывность оператора T. Возьмем произвольную непрерывную функцию $\widetilde{v}(\xi)$, такую, что $\widetilde{v}(0) = v_0$, $\widetilde{v}(n) = 0$. Подставляя $\widetilde{v}(\xi)$ вместо $v(\xi)$ в (21), получим $T(\widetilde{v})$.

Пусть последовательность непрерывных функций $\widetilde{v_i}(\xi)$, таких, что $\widetilde{v_i}(0) = v_0$, $\widetilde{v_i}(n) = 0$, равномерно сходится к $\widetilde{v}(\xi)$ в пространстве $C[0, n]$:

$$|\widetilde{v_i}(\xi) - \widetilde{v}(\xi)| \xi \in [0, n].$$

Рассмотрим последовательность функций $v_i(\xi) = T(\widetilde{v_i})$. Положим

$$f(\xi, v) = \int\limits_0^{\xi} d(v(\tau))v(\tau)d\tau, \quad h(\xi, v) = \int\limits_{v_0}^{v(\xi)} b(v(\tau))d\tau.$$

Тогда

$$|\widetilde{v_i}(\xi) - \widetilde{v}(\xi)| \leq \int\limits_o^{\xi} |f(\sigma, \widetilde{v}) - f(\sigma, \widetilde{v_i})|d\sigma +$$

$$+ \int\limits_o^{\xi} |h(\sigma, \widetilde{v_i}) - h(\sigma, \widetilde{v})|d\sigma,$$

$$|f(\sigma, \widetilde{v}) - f(\sigma, \widetilde{v_i})| =$$

$$= |\int\limits_o^{\xi} [d(\widetilde{v}(\tau))\widetilde{v}(\tau) - d(\widetilde{v_i}(\tau))\widetilde{v_i}(\tau)]d\tau| \leq$$

$$\leq \int\limits_o^{\xi} [|\widetilde{v}(\tau)||d(\widetilde{v}(\tau)) - d(\widetilde{v_i}(\tau))| +$$

$$+|d(\widetilde{v_i}(\tau))||\widetilde{v}(\tau) - \widetilde{v_i}(\tau)|]d\tau,$$

$$|h(\sigma, \widetilde{v_i}) - h(\sigma, \widetilde{v})| =$$

$$= |\int\limits_{v_0}^{\widetilde{v_i}(\xi)} b(\widetilde{v_i}(\tau))d\tau - \int\limits_{v_0}^{\widetilde{v}(\xi)} b(\widetilde{v}(\tau))d\tau| =$$

$$= \left| - \int\limits_{\widetilde{v_i}(\xi)}^{v_0} [b(\widetilde{v}(\tau)) - b(\widetilde{v_i}(\tau))]d\tau - \int\limits_{\widetilde{v_i}(\xi)}^{\widetilde{v}(\xi)} b(\widetilde{v}(\tau))d\tau \right|.$$

Поскольку $d(v)$, $b(v)$ – непрерывные функции, а последовательность $\widetilde{v_i}(\xi)$ равномерно сходится к $\widetilde{v}(\xi)$, то получаем, что

$$|f(\sigma, \widetilde{v}) - f(\sigma, \widetilde{v_i})| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty,$$

$$|h(\sigma, \widetilde{v_i}) - h(\sigma, \widetilde{v})| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty \quad \forall \sigma \in [0, \xi].$$

Поэтому

$$|\widetilde{v_i}(\xi) - \widetilde{v}(\xi)| \longrightarrow 0, \quad i \to \infty \quad \forall \xi \in [0, n].$$

Следовательно, оператор T непрерывен. Из оценок (18), (19), (20) вытекает, что T является вполне непрерывным. По теореме Шаудера на множестве M задача (15) имеет по крайней мере одно решение. Это решение единственно, если $(vd(v))'_v > 0$. Действительно, пусть $f(\xi)$ – достаточно гладкая функция, определенная на интервале [0,n] и равная нулю при $\xi = 0$ и $\xi = n$. Умножим обе части уравнения (15) на $f(\xi)$ и проинтегрируем полученное равенство по ξ от нуля до n, проводя однократное интегрирование по частям.

В результате приходим к следующему интегральному равенству:

$$\int_0^n \left(v'(\xi)f' + f' \int_0^v b(z)dz + fvd(v) \right) d\xi = 0. \quad (22)$$

Пусть v_1 и v_2 – два различных решения уравнения (15). Положим $U = v_1 - v_2$, $U(0) = U(n) = 0$. Из (22) после интегрирования по частям выводим

$$\int_0^n U[(f')' - B_1(\xi)f' - B_2(\xi)f]d\xi = 0,$$

где

$$B_1(\xi) = U^{-1} \int_{v_1}^{v_2} b(z)dz,$$

$$B_2(\xi) = U^{-1}(v_1 d(v_1) - v_2 d(v_2)) > 0.$$

Определим $f(\xi)$ как решение следующей линейной задачи:

$$(f')' - B_1(\xi)f' - B_2(\xi)f = h(\xi), \quad f(0) = f(n) = 0,$$

где $h(\xi)$ – произвольная непрерывная функция. Согласно [7] данная задача разрешима при любой непрерывной правой части. Поэтому $U = 0$.

Решение задачи (10), (14) на бесконечном интервале получим как предел последовательности $\{v_n(\xi)\}$ решений задачи (15) при $n \to \infty$, используя независящие от n оценки (17), (18) и (19).

В силу единственности решений задачи (15) ограниченная последовательность $\{v_n(\xi)\}$ монотонно возрастает и, следовательно, сходится к некоторой функции $u(\xi)$. Осуществляя предельные переходы в равенствах (21), записанных для $\{u_n(\xi)\}$, получим аналогичное равенство для предельной функции. Последнее означает, что $u(\xi)$ является классическим решением задачи (14). Асимптотическое поведение решения определяется неравенствами (18), (20). Таким образом, теорема доказана.

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.

2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

3. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998.

4. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // Известия АлтГУ. – 2010. – №1.

5. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // Известия АлтГУ. – 2011. – №1.

6. Кучмент Л.С., Демидов В.Н, Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. – М., 1983.

7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.