

*Е.В. Резанова***Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки***E. V. Rezanova***Numerical Investigation of Dynamics of a Spherical Gas-containing Layer**

Численно исследуется задача о динамике жидкой оболочки со свободными поверхностями и процесс диффузии газа в ней. Представлен алгоритм расчета задачи в диффузионном приближении и результаты численных экспериментов, иллюстрирующие основные зависимости решения от параметров модели.

**Ключевые слова:** сферический слой, диффузионное приближение, численное исследование.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-07

**Введение.** Исследование течений жидкости в областях со свободными границами, а также процессов тепло- и массопереноса в них продолжает оставаться сложной и актуальной задачей [1]. Интерес к подобным проблемам особенно возрастает, если требуется изучить поведение жидкостей в условиях тепло- и массопереноса на границах раздела [2]. Построению математических моделей динамики вязкой несжимаемой жидкости с учетом диффузионного потока газа, растворенного в жидкости и считающегося пассивной добавкой, посвящены работы [2–5]. В данных работах предложена модель формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости. Разрешимость задачи в полной постановке в малом по времени доказана в [3]. В [4] построен численный алгоритм решения задачи в диффузионном приближении, а в работе [5] доказаны теоремы существования и единственности гладкого решения для тепловой задачи.

Следуя [3], будет изучаться задача о динамике сферической оболочки со свободными поверхностями, содержащей внутри газовый пузырь. Динамика сферического слоя определяется инерционными, тепловыми, диффузионными факторами,

The problem of dynamics of a spherical layer with free boundaries and a process of gas diffusion in the layer is investigated numerically. In the paper an algorithm of computing of the problem in a diffusive approach and the results of numerical experiments are presented. These results illustrate the main effects of the solution on the parameters of the problem.

**Key words:** spherical layer, diffusive approach, numerical investigation.

а газ, растворенный в жидкости, является пассивной примесью. Условия на свободных поверхностях будут представлять собой кинематические и динамические условия, условия, определяющие баланс энергии на внутренней границе и режим теплообмена с внешней средой на внешней границе. Учитывается диффузионный поток массы через внутреннюю поверхность и закон Генри [3, 6] как соотношение, связывающее концентрацию газа на границе раздела с давлением газа вне области.

В данной работе рассматривается сферически симметричный процесс. Тогда только радиальная составляющая скорости отлична от нуля, и все физические величины зависят от расстояния от начала координат и изменяются со временем. Зависящие только от времени давление, плотность и абсолютная температура внутри газового пузырька связаны уравнением Менделеева-Клапейрона. Основное внимание уделяется построению численного алгоритма решения задачи в условиях, когда именно диффузионные процессы считаются преобладающими и определяющими динамику сферической оболочки.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $R_1$  и  $R_2$  – внутренний и внешний радиусы сферического слоя  $R_1(t) < r < R_2(t)$  (рис. 1);  $v(t, r)$  – радиальная составляющая скорости жидкости;  $T$  – температура;  $C$  – концентрация газа в жидкости.

В безразмерном виде систему уравнений Навье-Стокса, переноса тепла и диффузии газа в жидкости можно записать следующим образом [3]:

Работа выполнена в рамках проекта № 7.3975.2011 Алтайского государственного университета (поддержан Министерством образования и науки РФ) и программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012–2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири», мероприятие «Конкурс грантов» (№2013.312.1.66).

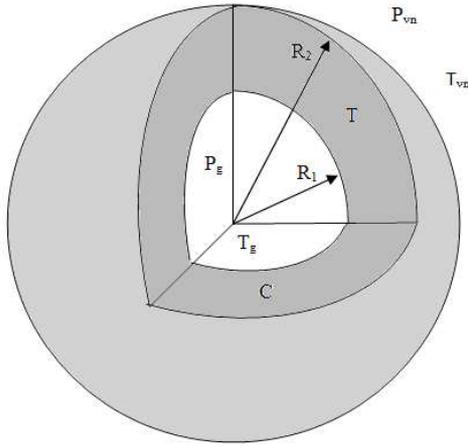


Рис. 1. Геометрия области течения (сферическая оболочка). Здесь  $R_1, R_2$  — внутренний и внешний радиусы оболочки;  $P_{vn}, P_g$  — давление внешнее и внутри пузырька;  $T_{vn}, T, T_g$  — температура внешней атмосферы, температура жидкости и температура газа в пузырьке соответственно;  $C$  — концентрация газа в жидком слое

$$Sh \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -Eu \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \quad (1)$$

$$+ 2 \frac{1}{Re} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \nu(T) \frac{\partial v}{\partial r}) - 2\nu(T)v \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = 0, \quad (2)$$

$$Sh \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r}) + \quad (3)$$

$$+ 2 \frac{1}{S} \alpha_1 \nu(T) \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right],$$

$$Sh \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{Pe_d} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D(T) \frac{\partial C}{\partial r}). \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости;  $P$  — давление;  $\nu, D, \sigma$  — коэффициенты кинематической вязкости, диффузии и поверхностного натяжения соответственно;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности. Отметим, что предполагается зависимость всех коэффициентов переноса от температуры. В результате приведения системы уравнений к безразмерному виду возникли следующие безразмерные комплексы: число Струхала  $Sh = \frac{r_*}{t_* v_*}$ , число Эйлера  $Eu = \frac{P_*}{\rho_* v_*^2}$ , число Рейнольдса  $Re = \frac{v_* r_*}{\nu_*}$ , число Пекле  $Pe = \frac{r_* v_*}{\chi_*}$ , число Пекле диффузионное  $Pe_d = \frac{r_* v_*}{D_*}$ , а также параметры  $S = \frac{r_* P_*}{\rho_* \nu_* v_*}$  и  $\alpha_1 = \frac{P_*}{c T_* \rho_*}$ . Звездочкой обозначены характерные значения физических величин, а  $c$  — теплоемкость жидкости.

Краевые условия на свободных границах также можно записать в безразмерном виде. При  $r = R_1(t)$  имеем:

$$v = Sh \frac{dR_1}{dt}, \quad (5)$$

$$P = P_g - 2Si \frac{\sigma(T)}{R_1} + 2 \frac{1}{S} \rho \nu \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (6)$$

$$T = T_g, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} Sh \alpha_2 P_g \frac{dR_1^3}{dt} + Sh \alpha_3 \frac{d}{dt} (mT) = \quad (8) \\ & = R_1^2 \frac{\partial T}{\partial r} + Sh \alpha_4 \left\{ \frac{d}{dt} [R_1^2 T^2 \frac{d}{dT} \left( \frac{\sigma}{T} \right)] + \sigma \frac{dR_1^2}{dt} \right\}, \end{aligned}$$

$$C = HA(T_g) P_g^n. \quad (9)$$

При  $r = R_2(t)$  имеем:

$$v = Sh \frac{dR_2}{dt}, \quad (10)$$

$$P = P_{vn} - 2Si \frac{\sigma(T)}{R_2} + \frac{2}{S} \rho \nu \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + Nu(T - T_{vn}) = 0, \quad (12)$$

$$C = HA(T_{vn}) P_{vn}^n. \quad (13)$$

Условие, определяющее изменение массы газа в пузырьке, имеет вид:

$$Sh \frac{d\rho_g}{dt} = -Sh \frac{3}{R_1} \rho_g \frac{dR_1}{dt} + \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{Pe_d} \frac{3}{R_1} D(T) \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R_1}.$$

Здесь  $T_g(t)$  — температура газа в пузырьке;  $P_g(t)$  и  $P_{vn}(t)$  — давление газа в пузырьке и внешнее соответственно;  $m = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_g$  — масса газа в пузырьке;  $A$  — коэффициент в законе Генри;  $n$  — показатель в законе Генри;  $Nu = \frac{\beta r_*}{\kappa}$  — число Нуссельта;  $H = \frac{A_* P_*^n}{\rho_*}$ ,  $Si = \frac{\sigma_*}{r_* P_*}$ ,  $\alpha_2 = \frac{P_* r_* v_*}{\kappa T_*}$ ,  $\alpha_3 = \frac{c_V m_* v_*}{4\pi r_*^2 \kappa}$ ,  $\alpha_4 = \frac{v_* \sigma_*}{\kappa T_*}$ , где  $c_V$  — теплоемкость газа (при постоянном объеме);  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $\beta$  — коэффициент теплоотдачи.

Формулы (5) и (10) представляют собой кинематические условия на свободных границах, (6) и (11) — динамические. Закон Генри представлен выражениями (9) и (13), соотношение (7) есть условие непрерывности температуры при переходе через внутреннюю границу оболочки  $r = R_1(t)$ . Теплообмен с внешней средой определен общим условием третьего рода (12) на границе  $r = R_2(t)$ .

Равенство (8) выражает баланс энергии на внутренней границе [3].

При  $t = 0$  задаются начальные значения всех искомых функций:

$$\begin{aligned} R_{10} &= R_1(0) < r < R_2(0) = R_{20}, \quad \rho_{g0} = \rho_g(0), \\ T_{g0} &= T_g(0), \quad v(0, r) = v_0(r), \quad T(0, r) = T_0(r), \quad (15) \\ C(0, r) &= C_0(r). \end{aligned}$$

Внутри пузырька газа  $0 < r < R_1(t)$  задано уравнение состояния:

$$P_g = \tilde{R}' \rho_g T_g, \quad (16)$$

где  $\tilde{R}' = \tilde{R} \rho_* T_* / P_*$ ,  $\tilde{R}$  — универсальная газовая постоянная.

**2. Постановка задач для нахождения концентрации газа, температуры, скорости изменения объема оболочки, положения свободных границ, плотности газа в пузырьке.** С помощью новой безразмерной пространственной переменной  $x = (r^3 - R_1^3(t)) \cdot (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-1}$  может быть осуществлен переход в фиксированную область  $[0, 1]$  на каждом шаге по времени. В новых координатах уравнение диффузии (4) имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} [\bar{D}(t, x) \frac{\partial C}{\partial x}], \quad (17) \\ \bar{D}(t, x) &= 9 P e_d^{-1} (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-2} \cdot \\ &\cdot [R_{20}^3 - R_{10}^3 x + R_1^3(t)]^{4/3} D(T(t)). \end{aligned}$$

Поскольку имеют место следующие начальное и граничные условия для концентрации (см. (9), (13), (15)), для функции  $C(t, x)$  получим:

$$C(0, x) = C_0(x), \quad C|_{x=1} = C_{vn}, \quad C|_{x=0} = C_1,$$

где  $C_{vn} = \tilde{A}(T|_{r=R_2}) P_{vn}^n$ .

Уравнение теплопереноса (3) без учета диссипативной функции в новых пространственных переменных примет вид [7, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\chi}(t, x) \frac{\partial T}{\partial x}], \quad (18) \\ \bar{\chi}(t, x) &= 9 P e^{-1} (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-2} \cdot \\ &\cdot [R_{20}^3 - R_{10}^3 x + R_1^3(t)]^{4/3} \chi(T(t)). \end{aligned}$$

Начальное и граничные условия (15), (7), (12) в данном случае примут вид:

$$T(0, x) = T_0(x), \quad T|_{x=0} = T_g,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} + Nu(T|_{x=1} - T_{vn}) \frac{R_{20}^3 - R_{10}^3}{3(R_{20}^3 - R_{10}^3 + R_1^3)^{2/3}} = 0.$$

$T_g$  — неизвестная функция, зависящая от времени, которая также будет найдена в ходе решения

задачи. Помимо этого, при  $x = 0$  имеет место соотношение (8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} Sh \alpha_2 P_g \frac{dR_1^3}{dt} + Sh \alpha_3 \frac{d}{dt} (mT) &= \quad (19) \\ &= \frac{3R_1^3}{R_{20}^3 - R_{10}^3} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + Sh \alpha_4 \left\{ \frac{d}{dt} [R_1^2 T^2 \frac{d}{dT} (\frac{\sigma}{T})] + \sigma \frac{dR_1^2}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $v = r^{-2} V(t)$  (см. (2)). Тогда рассмотрим следующую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $V(t)$ ,  $R_1(t)$  и  $\rho_g(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{2} V^2 (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1) \frac{1}{R_2^3 R_1^3} + \quad (20) \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{1}{Re} [P'_g - P'_{vn} - 2\bar{S}i \sigma(T) (R_2 + R_1) \frac{1}{R_2 R_1}] \cdot \\ &\cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} - \frac{4}{Re} \nu(T) V \cdot \\ &\cdot (R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2) \frac{1}{R_2^2 R_1^2}, \quad t > 0; \quad V(0) = V_0; \end{aligned}$$

$$\frac{dR_1}{dt} = V \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{dR_2}{dt} = V \frac{1}{R_2^2}, \quad t > 0; \quad (21)$$

$$R_1(0) = R_{10}, \quad R_2(0) = R_{20},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_g}{dt} &= -\frac{3}{R_1} \frac{dR_1}{dt} \rho_g + \frac{9}{Pe_d} \frac{R_1}{R_{20}^3 - R_{10}^3} D(T) \cdot \quad (22) \\ &\cdot \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad t > 0; \quad \rho_g(0) = \rho_{g0}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\tilde{A}(T) = H A(T)$ ,  $P'_g = P_g S$ ,  $\bar{S}i = Si \cdot S$ .

В данной постановке осуществлен переход к новому безразмерному времени делением на число Струхала.

Если выбор характерных значений физических величин осуществлен согласно [4] для системы «жидкость — газ» типа «жидкое стекло — углекислый газ», то характерное время процесса  $t_*$  выбирается равным 1.4 с, характерное значение радиуса жидкой оболочки  $r_* = 0.05$  см, характерная скорость  $v_* = 1$  см/с, характерная температура разогрева внешней среды  $T_* = 1673$  К, характерное внешнее давление  $P_* = 1013250$  дин/см<sup>2</sup> = 1 атм, характерная плотность жидкого стекла в диапазоне температур  $T = 1273\text{К} \div 1673$  К,  $\rho_* = 2$  г/см<sup>3</sup>, значения характерных коэффициентов таковы:  $\nu_* = 36$  см<sup>2</sup>/с, поверхностного натяжения  $\sigma_* = \sigma(T_*) = 280$  дин/см. Показатель в законе Генри выбран равным  $n = 0.5$ . Безразмерные комплексы принимают следующие значения:  $Sh = 0.036$ ,  $Re = 0.0014$ ,  $Pe_d = 1219.5$ ,  $Pe = 5$ ,  $Nu = 0.681$ ,  $Si = 0.0055$ ,  $\tilde{R}' = 6235$ ,  $S = 703.65$ . В случае, если  $v_* = r_*/t_*$ , то  $Sh = 1$ ,  $Pe = 0.18$ ,  $Pe_d = 44$ ,  $S = 19545.7$ ,  $Re = 5 \cdot 10^{-5}$ .

### 3. Общая схема численного решения.

Общая схема решения задачи (17)–(22) состоит в осуществлении следующих этапов:

1. Переход на новый временной слой  $k + 1$  начинается с расчета  $R_1^{k+1}, V^{k+1}, \rho^{k+1}$  методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (20)–(22). Внешний радиус оболочки  $R_2^{k+1}$  вычисляется исходя из закона сохранения объема оболочки  $R_2^3(t) - R_1^3(t) = R_{20}^3 - R_{10}^3$  (см. кинематические условия на свободных границах (5), (10)).
2. С помощью неявной разностной схемы для уравнения (17) вычисляется концентрация газа на временном слое  $k + 1$ .
3. Температура жидкости определяется с помощью неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации для уравнения (18).

Также был протестирован алгоритм, в котором метод Рунге-Кутты применялся для вычисления каждой из функций  $R_1(t), V(t), \rho(t)$  по отдельности. Численные эксперименты показали незначительную разницу в полученных значениях искомых величин.

Численная схема метода Рунге-Кутты расчета функций  $R_1(t), V(t), \rho(t)$  может быть представлена в виде:

$$V^{k+1} = V^k + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$R_1^{k+1} = R_1^k + \frac{\tau}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),$$

$$\rho^{k+1} = \rho^k + \frac{\tau}{6}(w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4),$$

где  $k_i, q_i, w_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) вычисляются следующим образом:

$$k_1 = K(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k),$$

$$k_2 = K(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_1 \frac{\tau}{2}, R_1^k + q_1 \frac{\tau}{2}, \rho^k + w_1 \frac{\tau}{2}),$$

$$k_3 = K(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_2 \frac{\tau}{2}, R_1^k + q_2 \frac{\tau}{2}, \rho^k + w_2 \frac{\tau}{2}),$$

$$k_4 = K(t^k + \tau, V^k + k_3 \tau, R_1^k + q_3 \tau, \rho^k + w_3 \tau),$$

$$q_1 = Q(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k),$$

$$q_2 = Q(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_1 \frac{\tau}{2}, R_1^k + q_1 \frac{\tau}{2}, \rho^k + w_1 \frac{\tau}{2}),$$

$$q_3 = Q(t^k + \frac{\tau}{2}, V^k + k_2 \frac{\tau}{2}, R_1^k + q_2 \frac{\tau}{2}, \rho^k + w_2 \frac{\tau}{2}),$$

$$q_4 = Q(t^k + \tau, V^k + k_3 \tau, R_1^k + q_3 \tau, \rho^k + w_3 \tau),$$

$$w_1 = W(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k),$$

$$w_2 = W(t^k + \tau/2, V^k + k_1 \frac{\tau}{2}, R_1^k + q_1 \frac{\tau}{2}, \rho^k + w_1 \frac{\tau}{2}),$$

$$w_3 = W(t^k + \tau/2, V^k + k_2 \frac{\tau}{2}, R_1^k + q_2 \frac{\tau}{2}, \rho^k + w_2 \frac{\tau}{2}),$$

$$w_4 = W(t^k + \tau, V^k + k_3 \tau, R_1^k + q_3 \tau, \rho^k + w_3 \tau).$$

Для функций  $K, Q, W$  имеют место зависимости вида:

$$\begin{aligned} K(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k) &= \\ &= \frac{1}{2}(V^k)^2((R_2^k)^2 + (R_1^k)^2) \frac{R_2^k + R_1^k}{(R_2^k R_1^k)^3} + \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho^k} [P'_g - P'_{vn} - 2\overline{Si} \cdot \sigma(T^k) \frac{(R_2^k + R_1^k)}{R_2^k R_1^k}], \\ &\cdot \frac{R_2^k R_1^k}{R_2^k - R_1^k} - \frac{4}{Re} \nu(T^k) V^k \frac{(R_2^k)^2 + R_2^k R_1^k + (R_1^k)^2}{(R_2^k)^2 (R_1^k)^2}, \end{aligned}$$

$$Q(t^k, V^k, R_1^k) = V^k \frac{1}{(R_1^k)^2},$$

$$W(t^k, V^k, R_1^k, \rho^k) = -\frac{3}{(R_1^k)^3} \rho^k V^k +$$

$$+ \frac{9}{Pe_d} D(T^k) \frac{C_2^k - C_1^k}{x_2^k - x_1^k} \frac{R_1^k}{R_{20}^3 - R_{10}^3}.$$

На каждом временном слое  $k$  вводится итерационный процесс нахождения концентрации газа  $C$  и температуры  $T$  в оболочке. Для численного решения уравнения диффузии (17) строится неявная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственной переменной [4]:

$$\frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau_C} = \frac{1}{\overline{h}_i} \overline{D}_{i+1} \frac{C_{i+1}^{s+1} - C_i^{s+1}}{h_{i+1}} - \quad (23)$$

$$\overline{D}_i \frac{C_i^{s+1} - C_{i-1}^{s+1}}{h_i},$$

где  $C_i^s$  — значения концентрации на  $s$ -той итерации,  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\overline{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ ,  $\overline{D}_i = 0,5[\overline{D}(t^{k+1}, x_{i-1}) + \overline{D}(t^{k+1}, x_i)]$ ,  $t^{s+1} = t^s + \tau_C$ .

Для реализации схемы (23) используется метод прогонки [1]. Применяется критерий сходимости итерационного процесса вида:

$$\max |C_i^{s+1} - C_i^s| / \max |C_i^{s+1}| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр (см. [4]). Предполагается параболический профиль начального распределения концентрации с максимумом в центре слоя.

Для уравнения переноса тепла (18) строится аналогичная разностная схема

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\tau_T} = \frac{1}{\overline{\chi}_{i+1}} \frac{T_{i+1}^{m+1} - T_i^{m+1}}{h_{i+1}} - \quad (24)$$

$$\bar{\chi}_i \frac{T_i^{m+1} - T_{i-1}^{m+1}}{h_i}].$$

Здесь  $\bar{\chi}_i = 0,5[\bar{\chi}(t^{k+1}, x_{i-1}) + \bar{\chi}(t^{k+1}, x_i)]$ ,  $t^{m+1} = t^m + \tau_T$ . Для вычисления  $\bar{\chi}$  используется выражение (18).

Для реализации схемы (24) применяется метод прогонки с параметром, где в качестве параметра выбирается неизвестное значение температуры  $T$  при  $x = 0$  ( $T_1$ ), совпадающее с  $T_g$  на каждом временном слое. Данной схеме (24) соответствует система линейных алгебраических уравнений

$$-a_i T_{i-1} + b_i T_i - c_i T_{i+1} = d_i, i = 2, \dots, I.$$

Поиск  $T_i$  в виде  $T_i = \gamma_i \bar{T} + \alpha_i T_{i+1} + \beta_i$  позволяет выразить все  $T_i$  через  $\bar{T}$ :

$$T_i = \tilde{\gamma}_i \bar{T} + \tilde{\beta}_i,$$

а уравнение (19) позволяет найти  $\bar{T}$ .

**4. Результаты численных исследований задачи в диффузионном приближении.** Пусть температура жидкости и температура газа в оболочке равна температуре газа вне оболочки  $T_{vn}(t)$ , которая зависит только от времени.

Численные эксперименты проводились таким образом, чтобы выявить влияние внешних и внутренних факторов на динамику оболочки и диффузионные процессы в ней. Пусть  $R_{10} = 0.02$  см,  $R_{20} = 0.05$  см, и имеют место зависимости коэффициентов от температуры следующего вида [4]:

$$\nu = a_\nu \exp(b_\nu/T), \quad D = a_D T + b_D, \\ \sigma = a_\sigma T + b_\sigma, \quad A = \bar{A}/T.$$

Для жидкого стекла имеют место следующие значения безразмерных коэффициентов:  $a_\nu = 0.18 \cdot 10^{-5}$ ,  $b_\nu = 13.23$ ,  $a_D = 1.195$ ,  $b_D = -0.195$ ,  $a_\sigma = 0.299$ ,  $b_\sigma = 1.299$ .

Сферическая оболочка, содержащая газ, помещается в разреженную атмосферу того же газа, поддерживаемую при определенной температуре.

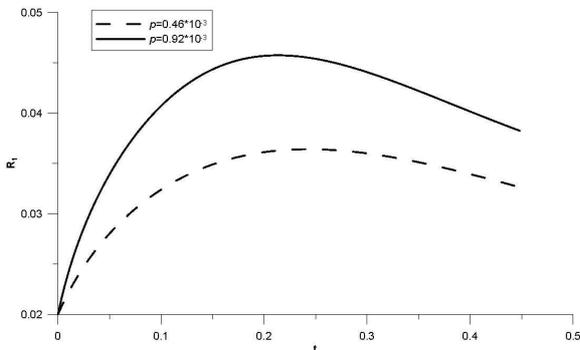


Рис. 2. Графики зависимости внутреннего радиуса оболочки от времени при различном количестве газа внутри пузырька. Внешнее давление  $P=0.03$  атм.

Пусть внешняя атмосфера нагрета до определенной температуры = 1171 К, которая во время протекания процесса не меняется. Внешнее давление будет также постоянным, равным  $P = 0.03$  атм (рис. 2) или  $P = 0.01$  атм (рис. 3).

При больших значениях начальной плотности газа  $\rho_{g0} = 0.92 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> (см. рис. 2 и 3, сплошные линии) динамика сферической оболочки и процессы в ней протекают более интенсивно. Так, например, при  $P = 0.03$  атм максимальное значение внутреннего радиуса оболочки  $R_{max}^1 = 0.045$  см. В случае, если начальная плотность газа в пузырьке имеет значение  $\rho_{g0} = 0.46 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>, то наблюдается менее интенсивные процессы;  $R_{max}^1 = 0.036$  см.

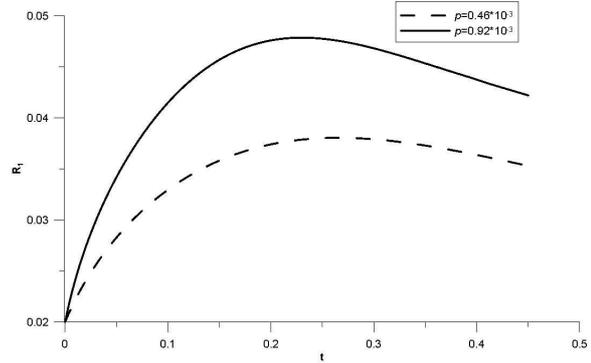


Рис. 3. Графики зависимости внутреннего радиуса оболочки от времени при различном давлении вне пузырька. Внешнее давление  $P=0.01$  атм.

При одних и тех же значениях температуры внешней атмосферы ( $T = 1171$  К) и количестве газа в пузырьке (начальное значение плотности газа в пузырьке равно  $\rho_{g0} = 0.92 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> (рис. 2 и 3, сплошная линия) или  $\rho_{g0} = 0.46 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> (рис. 2, рис. 3, штриховая линия) и различных значениях внешнего давления ( $P = 0.03$  атм,  $P = 0.01$  атм) имеем обратный эффект: с увеличением давления интенсивность процесса снижается, конечные и максимальные значения внутреннего радиуса оболочки уменьшаются. Так, при  $\rho_{g0} = 0.46 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $P = 0.03$  атм максимальное значение внутреннего радиуса оболочки равно 0.036 см, значение на момент времени  $t = 0.5$  с — 0.032 см. В случае, если давление имеет значение  $P = 0.01$  атм, то это максимальное значение больше 0.038 см. Значение внутреннего радиуса оболочки на момент времени  $t = 0.5$  с равно 0.035 см.

**Заключение.** Описан алгоритм численного исследования полной задачи о динамике жидкой сферической оболочки со свободными поверхностями и процессов переноса тепла и газа в ней в условиях невесомости.

Представлены результаты численных исследований задачи в диффузионном приближении.

Проведены численные эксперименты для исследования зависимости динамики оболочки и процесса диффузии в ней от внешнего давления и количества газа в пузырьке.

*Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю О.Н. Гончаровой за постановку задачи и обсуждение результатов.*

### Библиографический список

1. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. Современные математические модели конвекции. — М., 2008.
2. Гончарова О.Н. Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // Известия АлтГУ. — 2012. — №1/2(73).
3. Гончарова О.Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости // Гидродинамика быстропротекающих процессов. — 1987. — Вып. 82.
4. Гончарова О.Н., Пухначёв В.В. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости // Моделирование в механике. — 1990. — Т. 4 (21), №5.
5. Гончарова О.Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов // Вычислительные методы прикладной гидродинамики. — 1993. — Вып. 106.
6. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. — Ижевск, 2001.
7. Гончарова О.Н., Закурдаева А.В., Резанова Е.В. Моделирование динамики и процессов тепло- и массопереноса в сферическом слое жидкости со свободными границами. — Пермь, 2013.
8. Закурдаева А.В., Резанова Е.В. Математическое моделирование процессов диффузии и теплопереноса в газосодержащей оболочке // МАК-2013. — Барнаул, 2013.