

*А.А. Папин, Л.А. Гагарин, А.Н. Сибин,
Д.П. Хворых, В.В. Шепелев*

**Математическая модель фильтрации
грунтовых вод, контактирующих
с многолетнемерзлыми породами***

*A.A. Papin, L.A. Gagarin, A.N. Sibir,
D.P. Khvorykh, V.V. Shepelev*

**Mathematical Model of Filtration of Ground
Waters in Contact with Permafrost**

Исследуется математическая модель процесса внутренней эрозии грунта при напорном движении вод в окрестности русла реки.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, фазовый переход, пористая среда, суффозия, разрушение грунта.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-06

Введение. Рассматривается движение подземных вод в межмерзлом водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения и образование подземных полостей. В результате увеличения и достижения критических размеров этих полостей происходит обрушение свода многолетнемерзлых пород. На поверхности грунта формируются провальные формы рельефа (суффозионные воронки) [1–4].

Математическая постановка задачи связана с изучением фильтрационных течений [5–7], процессов суффозии [8–13] и обрушения грунта [14–16]. Особенностью задачи является наличие заранее неизвестных границ, которые определяются из решения задачи Стефана.

1. Упругие мерзлые породы. На любом непрерывном движении сплошной среды, описываемой интегральными законами сохранения массы, импульса и энергии, существуют непрерывно дифференцируемые поля симметричного тензора напряжений P и вектора потока тепла \vec{q} , с которыми интегральные законы сохранения равносильны системе дифференциальных уравнений, справедливых для любой точки $(\vec{x}, t) \in W$, где $W = \{(\vec{x}, t) | t \in \tau, \vec{x} \in \Omega_t\} \subset R^4(\vec{x}, t)$ четырех-

The mathematical model of process of an internal erosion of a ground is considered under the pressure of water motion near the river channel.

Key words: multiphase flow, phase transition, porous media, internal erosion, destruction of soil.

мерное пространство [17, 18]:

$$\rho_t + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho(\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = \text{div} P + \rho \vec{f},$$

$$\rho(U_t + \vec{v} \cdot \nabla U) = P : D + \text{div}(\alpha \nabla \theta) + \rho r, \quad (1)$$

где ρ – плотность; \vec{v} – скорость; U – удельная внутренняя энергия; θ – абсолютная температура; $D = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right)^* \right)$ – тензор скоростей деформации; α – коэффициент теплопроводности; r – источник тепла; (x, t) – переменные Эйлера. При этом вектор напряжения, действующего на площадку с нормалью \vec{n} , дается формулой $\vec{p}_n = P < \vec{n} >$, а плотность потока тепла через такую площадку – формулой $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$.

Для упругого тела удобным является лагранжево описание: фиксируется некоторое положение Ω_0 среды в момент t_0 и рассматривается ее переход в положение Ω_t в момент времени $t > t_0$. Лагранжевы переменные (ξ, t) вводятся как решение задачи $x_t = \vec{v}(\vec{x}, t)$, $\vec{x}|_{t=t_0} = \vec{\xi}$. Вводится вектор перемещения $\vec{\omega} = \vec{x} - \vec{\xi}$, тензор дисторсии $T = I + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \xi}$, лагранжев и эйлеров тензора деформации: $2\hat{\varepsilon} = T^* \cdot T - I$, $2\varepsilon = I - T^{*-1} \cdot T^{-1}$. Свободная энергия $\mathcal{F}(\hat{\varepsilon}, \theta) = U - \theta S$ и коэффициент теплопроводности $\alpha(\hat{\varepsilon}, \theta)$ являются изотропными тензорами тензора $\hat{\varepsilon}$, энтропия $S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta}$. В линейном варианте теории величины $\theta - \theta_0$, $T - I$ малы (θ_0 – температура естественного состояния), и в силу соотношения $P = \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon}$ для тензора напряжений скелета мерзлого грунта P^{si} принимается закон Дюамеля–Неймана

$$P^{si} = (-\gamma(\theta - \theta_0) + \lambda I_1(\varepsilon))I + 2\mu \varepsilon, \quad 2\varepsilon = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} \right)^*,$$

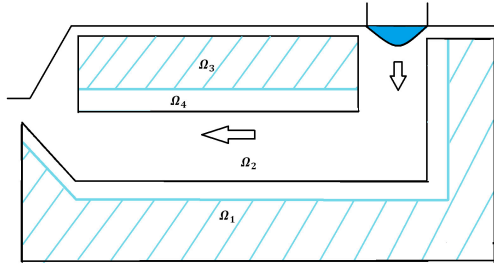
*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства №1.3820.2011, гранта РФФИ 13-08-01097 и программы стратегического развития Алтайского государственного университета.

где γ, λ, μ – постоянные коэффициенты; $I_1(\varepsilon) = \text{div} \vec{\omega}$.

В рассматриваемом случае мерзлый грунт есть пористая среда с пористостью m . Поэтому в уравнениях (1) в качестве ρ берется приведенная плотность скелета $\rho_s = (1 - m)\rho_s^0$, где ρ_s^0 – истинная плотность скелета грунта. Уравнение энергии (1) можно переписать в виде

$$\rho_s [C_\varepsilon(\theta_t + \vec{v} \cdot \nabla \theta) + (\gamma \theta_0 + \lambda \nabla \vec{\omega})(\nabla \vec{\omega}_t + \vec{v} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{\omega}))] + 2\mu \varepsilon : D = P : D + \nabla \cdot (\varkappa \nabla \theta) + \rho_s r, \quad (2)$$

где $C_\varepsilon = -\theta \mathcal{F}_{\theta\theta}$ – коэффициент теплоемкости при постоянной деформации. В качестве тензора напряжений P естественно принять $P = (1 - m)P^{si} + mP^i$, где P^s – тензор напряжений твердого скелета; P^i – тензор напряжений среды, заполняющей поровое пространство (лед или воздух и лед). Система уравнений (1), (2) описывает движение мерзлого грунта в областях Ω_1, Ω_3 (рис.).



Схематическое движение подземных вод в условиях мерзлого грунта. Ω_1 – мерзлый грунт с температурой $\theta \approx -0,2 C^\circ$, Ω_2 – область фильтрации талого грунта; $\theta \approx +0,2 C^\circ$, Ω_3 – мерзлый грунт с температурой $\theta \approx -0,2 C^\circ$; Ω_4 – талый грунт с температурой $\theta \approx 0 C^\circ$

В области Ω_2 движения грунтовых вод, имеющих положительную температуру, в общем случае присутствуют, помимо скелета, подвижные твердые частицы грунта и воздух. Система уравнений трехфазной фильтрации состоит из обобщенного закона Дарси для каждой из фаз, уравнений неразрывности фаз и условий капиллярного равновесия [19]

$$\vec{u}_i - \vec{u}_s = -k \frac{f_i(s_1, s_2)}{\mu_i} \nabla p_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(m\rho_i^0 s_i)_t + \nabla \cdot (\rho_i^0 \vec{u}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 s_i = 1,$$

$$p_3 - p_1 = P_1(s_1, s_2), \quad p_2 - p_3 = P_2(s_1, s_2).$$

Здесь k – проницаемость; m – пористость; s_i – насыщенность (доля пор, занятых фазой); μ_i – вязкость; f_i – относительная фазовая проницаемость;

P_i – давление; \vec{u}_i – скорость фильтрации i -й фазы; \vec{u}_s – скорость скелета; P_f – капиллярное давление; $\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i, \theta_i)$ – истинные плотности фаз.

Уравнения сохранения энергии имеют вид [20]

$$c_i(m s_i \theta_{it} + \vec{u}_i \cdot \nabla \theta_i) = \nabla \cdot (m \lambda_i s_i \nabla \theta_i) - c_i \vec{u}_i \cdot \varepsilon_i \nabla p_i,$$

где c_i – теплоемкость i -й фазы при постоянном давлении; λ_i – коэффициент теплопроводности; ε_i – коэффициент дросселирования.

Давление фильтрующихся фаз определяется как среднее:

$$p^f = - \sum_{i=1}^3 s_i p_i, \quad P^f = p^f I.$$

2. Фазовый переход. Пусть $\rho_0, \vec{v}_0, \vec{\omega}_0, \theta_0, P_0, \varepsilon_0$ – соответственно плотность, скорость, перемещение, температура, тензоры напряжений и деформаций мерзлого грунта, удовлетворяющие уравнениям (1), (2). Граница Γ между мерзлым грунтом и областью подземных вод определяется фазовой диаграммой мерзлого грунта $\theta_0 = \theta_*(p_0)$, $p_0 = \frac{1}{3} \text{tr} P_0$. На фазовой поверхности непрерывны перемещения, скорости, температуры: $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}$, $\vec{v}_0 = \vec{v} = \vec{u}$, $\theta_0 = \theta = \theta_i$. Из сохранения массы, импульса и энергии на фазовой границе $\Gamma = \{(\vec{x}, t) | h(\vec{x}, t) = 0\}$ следуют соотношения [20, 21]

$$\rho_0(\vec{v}_{0n} - D_n) = (1 - m)\rho_s(v_n - D_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 m s_i \rho_i^0(u_{in} - D_n),$$

$$P_0 < \vec{n} > - (1 - m)P^{si} < \vec{n} > - mP^f < \vec{n} > = 0,$$

$$\varkappa_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial n} = \varkappa \frac{\partial \theta}{\partial n},$$

где $\vec{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|}$ – внешняя (в сторону Ω_2) нормаль к поверхности Γ ; $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$, $\frac{\partial \theta}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla \theta$, $D_n = -\frac{h_t}{\vec{n} \cdot \nabla h}$.

3. Суффозия. Явление выноса мелких частиц породы в процессе фильтрации жидкости называется суффозией.

В серии работ о промачивании суффозионных грунтов [8, 9] используется балансовая изотермическая модель процесса совместного движения воды и так называемых неструктурных частиц. Существенно используется понятие критической скорости фильтрации.

В работах о моделировании внутренней эрозии [10, 11] пористая среда рассматривается как упорядоченная структура. Вводится понятие эрозийного потока, который определяется через касательное критическое напряжение. В основе моделирования лежит метод гомогенизации.

При практическом подходе проводятся лабораторные испытания грунтов на суффозионную

устойчивость [12], выделяются основные принципы оценки суффозионной устойчивости грунтов и необходимые условия возникновения суффозии.

В модели суффозии как многофазной среды [13] исследуется объем V сплошной среды, в котором выделяются три области: неподвижный грунт, вода, подвижные частицы грунта (область суффозионного потока), обладающие скоростью $\vec{v}_1 = 0$, $\vec{v}_2 = -k_f(\nabla p + \rho\vec{g})$ и $\vec{v}_3 = \lambda\vec{v}_2$; $\lambda \in (0, 1)$, k_f коэффициент фильтрации соответственно. Вводится пористость $\phi = \frac{V_V}{V}$, где V_V – объем, занимаемый суффозионным потоком, и концентрация $c = \frac{V_{fs}}{V_{ff} + V_{fs}}$, где V_{ff} – объем, занимаемый жидкостью; V_{fs} – объем, занимаемый подвижными частицами грунта.

Приведенные плотности для каждой области записываются следующим образом: $\rho_1 = (1 - \phi)\rho_s$, $\rho_2 = (1 - c)\phi\rho_s$, $\rho_3 = c\phi\rho_s$, где ρ_f и ρ_s – истинные плотности жидкой и твердой фаз соответственно. Общая плотность ρ является суммой плотностей. Суффозионный поток \dot{m} определяется следующим образом: $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\dot{m}}{\rho_s}$.

Причем

$$\dot{m} = \begin{cases} \alpha\rho_s(1 - \phi)c\phi|\vec{v}_2 - \vec{v}_k|, & |\vec{v}_2| \geq |\vec{v}_k|; \\ 0, & |\vec{v}_2| < |\vec{v}_k|. \end{cases}$$

где \vec{v}_k – критическая скорость (заданное значение). В результате приходим к следующей модели относительно неизвестных ϕ , c , $j^{(1)}$, p :

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \phi)\rho_s) = j^{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - c)\phi\rho_f) - \text{div}((1 - c)\rho_f k_f(\nabla p + \rho\vec{g})) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\phi\rho_s) - \text{div}(c\rho_s \lambda k_f(\nabla p + \rho\vec{g})) = -j^{(1)},$$

$$j^{(1)} = -\dot{m},$$

где $j^{(1)}$ – интенсивность перехода неподвижного грунта в область суффозии; p – давление.

4. Обрушение. Существует множество инженерных подходов моделирования деформации грунтов с подземными полостями [14]. В одном из таких подходов грунт рассматривается как упругая среда [15, 16].

Предполагается, что полость расположена горизонтально на глубине H от поверхности земли и имеет круглое сечение. Задача сводится к рассмотрению упругой пластины, имеющей круглый вырез радиуса R_0 и подверженной равномерному сжатию. Для рассматриваемой задачи в полярной системе координат уравнения равновесия и совместности имеют вид [17]:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0; \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_1}{r} + \frac{\partial u_2}{r\partial\theta},$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_1}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r),$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}. \quad (7)$$

Граничные условия берутся в виде

$$(\sigma_r)_{r=R_0} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=H} = -\gamma H. \quad (8)$$

где σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ – соответственно нормальная компонента напряжения в радиальном направлении, нормальная компонента в окружном направлении и касательная компонента напряжения; ε_θ , ε_r – деформации в окружном и радиальном направлениях; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; S и R – компоненты объемной силы в кольцевом и радиальном направлениях.

При симметричном относительно начала координат распределении напряжений можно считать $S = R = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$, а σ_θ и σ_r зависящими только от r . Из (3)–(5) следует:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

где постоянные $A = -R_0^2 H^3 \gamma / (H^2 - R_0^2)$ и $C = H^3 \gamma / (H^2 - R_0^2)$ определяются из граничных условий (8). Используя (7) и (6), легко найдем перемещение $u(u_1, u_2)$

$$u = \left(-\frac{A}{Er}(\nu + 1) + \frac{Cr}{E}(1 - \nu), 0 \right).$$

Последнее соотношение можно применять для оценки объема суффозионной воронки, образовавшейся в результате «исчезновения» полости.

Библиографический список

1. Шепелёв В.В. Надмерзлотные воды криолитозоны. – Новосибирск, 2011.
2. Фельдман Г.М. Термокарст и вечная мерзлота. – Новосибирск, 1984.
3. Фельдман Г.М. Передвижение влаги в талых и промерзающих грунтах. – Новосибирск, 1988.
4. Хусаинова З.Л. Теоретическое исследование процессов термоэрозии и термокарста многолетнемерзлых пород: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Уфа, 2007.
5. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.
6. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009.
7. Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г. Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. – М., 1997.
8. Поляков В.Л. О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности // Прикладная гидромеханика. – Киев, 2006. – Т. 8, № 4.
9. Кузнецов А.Ю., Пославский С.А. Исследование математической модели механической суффозии // Вестник Харьковского национального университета. Сер.: Математика, прикладная математика и механика. – 2009. – №875.
10. Golay F., Bonelli S. Numerical modeling of suffusion as an interfacial erosion process // European Journal of Environmental and Civil Engineering. – 2010.
11. Bonelli S., Marot D. On the modelling of internal soil erosion // The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG). – 2008.
12. Рекомендации по методике лабораторных испытаний грунтов на водопроницаемость и суффозионную устойчивость. – Л., 1983.
13. Vardoulakis I. Sand-production and sand internal erosion: Continuum modeling // Alert School: Geomechanical and Structural Issues in Energy Production. – 2006.
14. Суриков В.В. Механика разрушения мерзлых грунтов. – Л., 1979.
15. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. – М., 1980.
16. Цитович Н.А. Механика мерзлых грунтов. – М., 1973.
17. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М., 1975.
18. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. – Новосибирск, 1976.
19. Зазовский А.Ф. Трехфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Итоги науки и техники. Сер.: Комплексные и специальные разделы механики. – М., 1991.
20. Хабиров В.В., Хабиров С.В. Разработка газогидратов современными технологиями // Труды Института механики УНЦ РАН. – 2010.
21. Цыпкин Г.Г. Математическая модель диссоциации газовых гидратов, сосуществующих с газом в пластах // Доклады РАН. – 2001. – Т. 381, №1.