УДК 532.375

А.А. Папин

О точном решении одной задачи гидроразрыва*

A.A. Papin

About Exact Solution of one Problem of Hydraulic Fracturing

Рассмотрена осесимметрическая задача о течении вязкой и идеальной жидкостей в плоской круговой трещине. Получены аналитические зависимости параметров трещины от данных задачи.

Ключевые слова: гидравлический разрыв, вязкая жидкость, идеальная жидкость, трещина, аналитическое решение.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-05

The axially simmetric problem about a current of viscous and ideal liquids in a flat circular crack is considered. Analytical dependences of parameters of a crack on task data are received.

Key words: hydraulic fracturing, viscous fluid, perfect liquid, crack, analytical solution.

Введение. В математическом отношении задача о разрыве горных пород при помощи жидкости (гидроразрыв) в общем случае представляет собой весьма сложную проблему, требующую совместного решения уравнений гидродинамики, фильтрации и теории упругости (теории разрушения). Изучение задач такого типа было начато в работе [1], в которой была дана физическая постановка задачи и получено приближенное решение при следующих основных предположениях: давление жидкости в трещине заменялось статически эквивалентным, действующим на части поверхности трещины, берега которой плавно смыкаются; жидкость заполняет лишь часть трещины, при этом глубина проникновения жидкости в трещину оказывается неизвестным параметром; размер трещины определяется из условия С.А. Христиановича [1] без учета сил сцепления. Появившееся затем значительное число работ (подробная библиография имеется в [2, 3]) в методологическом плане в основном исследовано в [1]. Как отмечено в [4], в рамках условия С.А. Христиановича отказаться от неполного проникновения жидкости в трещину нельзя; сделать это можно, если учесть силы сцепления [5] и вызванное последними неплавное смыкание поверхностей трещины. В случае полного заполнения жидкостью трещины задача рассматривалась, например, в работах [4–7]. В то же время, как показывают расчеты, проведенные в [1, 8], при тех условиях, при которых гидроразрыв осуществляется на практике, величина сил сцепления пренебрежимо мала. Это отмечено и в работе [9], в которой проведен численный анализ задачи в случае неполного проникновения жидкости в трещину. В этой работе, однако, априори предполагалось, что величина проникновения жидкости в трещину мало отличается от радиуса трещины, а давление, как и в [1, 2], заменялось статически эквивалентным.

Модели гидроразрыва на основе неньютоновских жидкостей рассматривались в [10, 11]. Трехмерные задачи изучались в [12].

Цель настоящей работы состоит в постановке корректных задач о гидроразрыве горных пород на основе простейших моделей линейной теории упругости и динамики идеальной и вязкой жидкостей. Показано, что при движении вязкой жидкости в трещине могут реализовываться два типа течений: с полным заполнением трещины жидкостью и со свободной границей. В классе гладких решений возможна априорная классификация этих течений, а именно: если в начальный момент времени (момент страгивания трещины) имеет место полное проникновение жидкости в трещину, то и в последующий промежуток времени (возможно, что этот промежуток весьма мал) жидкость полностью заполняет трещину. В противном случае жидкость лишь частично заполняет трещину. Изучение второго типа течений приводит к вопросу об определении неизвестного параметра из работы С.А. Христиановича [1] (глубина проникновения жидкости в трещину). В данной работе этот вопрос решается постановкой разрывных начальных условий, которые моделируют начальный скачок трещины. Постановка разрывных начальных условий естественна еще и потому, что сам технический метод воздействия на горную породу основан именно на разрыве последних. Такой подход позволяет получить функциональное

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Минобрнауки №1.3820.2011 и гранта РФФИ (проект №13-08-01097).

соотношение на искомый параметр и сформулировать для определенного вида течений условие, гарантирующее наличие свободной границы или ее отсутствие. Детально рассматривается движение при полном заполнении трещины жидкостью: выводятся уравнения движения кончика трещины, а также рассматриваются задачи о развитии трещины при заданном расходе или давлении нагнетаемой жидкости.

1. Разрыв непроницаемых горных пород вязкой жидкостью

1.1. Постановка задачи. Для описания течения жидкости в трещине используется уравнение гидродинамики в приближении Буссинеска [13]. Основным здесь является предположение о постоянстве давления и малости массовых сил и ускорений частиц жидкости в направлении оси, нормальной к плоскости трещины. Для осесимметрического течения жидкости в плоской круговой трещине раскрытия 2ω и радиуса R эти предположения приводят к тому, что давление p является лишь функцией пространственной переменной r и времени t, причем [4, 9]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -12\mu\frac{u}{\omega^2}, \quad r \geq r_0, \tag{1}$$

где $u(r,t)$ – радиальная скорость жидкости; μ – вязкость; r_0 – радиус скважины, через которую жидкость подается в трещину. Осреднение по z уравнения неразрывности приводит к соотношению вида [9]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(u\rho) = 0, \quad \rho = r\omega(r,t). \tag{2}$$

Если $\eta(t)$ – глубина проникновения жидкости в трещину ($\eta < R$), то из кинематического и динамического условий на свободной границе следует, что

$$\frac{d\eta}{dt} = u(\eta,t), \quad p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r = \eta(t). \tag{3}$$

Система (1)–(3) дополняется граничной задачей теории упругости [14], описывающей процесс развития плоской осесимметрической трещины под действием горного давления P и давления $p(r,t)$, приложенного на части берегов трещины $0 \leq r \leq \eta \leq R$. Решение указанной задачи, полученное в предположении о малости инерциальных членов, имеет вид [15]

$$\omega(r,t) = k\int\limits_r^{R(t)} \frac{d\xi}{(\xi^2 - r^2)^{1/2}} \int\limits_\xi^{r_0} \frac{y\overline{p}(x,y)}{(\xi^2 - y^2)^{1/2}}dy, \tag{4}$$

$k = 4(1-\nu^2)/\pi E$, а радиус трещины $R(t)$ определяется из условия С.А. Христиановича [14]

$$\pi K\left(\frac{R}{2}\right)^{1/2} = \int\limits_{r_0}^{R(t)} \frac{r\overline{p}(r,t)}{(R^2 - r^2)^{1/2}}dr, \tag{5}$$

где

$$\overline{p}(r,t) = \begin{cases} p(r,t) - P, & r_0 \leq r \leq \eta \\ -P, & \eta \leq r \leq R, \end{cases}$$

E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; K – критическое значение коэффициента интенсивности напряжений; πK – модуль сцепления горной породы, который связан с плотностью поверхностной энергии γ известной зависимостью $\gamma E = \pi K^2(1-\nu^2)$.

1.2. Классификация течений. В дальнейшем будем считать, что радиус скважины пренебрежимо мал по сравнению с начальным радиусом трещины ($r_0 << R$), а в момент разрыва давление жидкости в скважине совпадает с давлением на трещине: $p(r,t) = p_1(t) \equiv p(r_0,t), \quad r_0 \leq r \leq \eta$, т.е.

$$p(r,0) = p_1(0) \quad r_0 \leq r \leq \eta_0 \equiv \eta(0). \tag{6}$$

Условие (5) представим в виде

$$S(R) \equiv \pi K\left(\frac{R}{2}\right)^{1/2} + P(R^2 - r_0^2)^{1/2} = \\ = \int\limits_{r_0}^{\eta} \frac{yp(y,t)}{(R^2-y^2)^{1/2}}dy.$$

Откуда при $t = 0$ с учетом (6) имеем

$$p_1(0) = \frac{S(R_0)}{B(r_0,\eta_0)}, \quad B(R_0,\eta_0) = (R_0^2 - r_0^2)^{1/2} - \\ -(R_0^2 - \eta_0^2)^{1/2}. \tag{7}$$

Разрешая (7) относительно η_0/R_0, получим

$$\left(\frac{\eta_0}{R_0}\right)^2 = 1 - [1 - (P + \pi K(2R_0)^{-1/2})p_1^{-1}(0)]^2. \tag{8}$$

Из (8) следует, что в случае, когда $p_1(0)$ незначительно превышает величину $a \equiv P + \pi K(2R)^{-\frac{1}{2}}$, значения η_0 и R_0 отличаются также незначительно. Если же $p_1(0) >> a$, то $\eta_0 << R_0$. Следует отметить, что последнее условие принято в [14]. Остановимся подробнее на случае $\eta_0 = R_0$. Тогда $q \equiv p_1(0) - P = \pi K(2R)^{-1/2}$ и, согласно (5), $\omega_0 \equiv \omega(r,0) = kq(R_0^2 - r^2)^{1/2}$. Предположим теперь, что в последующий момент времени $t > 0$ происходит такой рост трещины, что в процессе движения имеется свободная поверхность $\eta(t) < R(t)$, и тем самым течение жидкости в трещине описывается уравнениями (1)–(3). Кроме того, будем считать, что единственным нулем функции $\omega(r,t)$ является точка $r = R(t)$, т.е. справедлива оценка

$$a(r,t)(R_0^2 - r^2)^{1/2} \leq \omega(r,t), \tag{9}$$

где $a(r,t)$ – ограниченная положительная для всех $r \le R$ и t функция. В области течения жидкости $r_0 \le r \le \eta(t)$ вместо ω введем новую искомую функцию J по формуле

$$J(r,t) = \int\limits_r^{\eta(t)} \rho\omega(\rho,t)d\rho.$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial J}{\partial t} + u(r,t)\frac{\partial J}{\partial r} = 0 \tag{10}$$

и начальному условию

$$J_0(r) = J(r,0) = \frac{1}{3}qk[(R_0^2 - r^2)^{3/2} - (R_0^2 - \eta_0^2)^{3/2}]. \tag{11}$$

при $r \le \eta_0$. Решение задачи (10), (11) имеет вид $J(r,t) = J_0(\xi)$, $r_0 \le \xi \le \eta_0$, где параметр ξ определяется из решения задачи Коши

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(r(t),t), \quad r|_{t=0} = \xi.$$

Тем самым для раскрытия $w(r,t)$ при $r_0 \le r \le \eta_0$ имеем

$$\rho(r,t) = rw(r,t) = -\frac{\partial J}{\partial r} = \frac{\partial J_0}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} = \rho_0(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial r},$$

$$\rho_0(\xi) = qk\xi(R_0^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \eta_0 = R_0.$$

Но, согласно уравнению (3),

$$\eta = \eta_0 + \int\limits_0^t u(\eta(t),\tau)d\tau,$$

т.е.

$$\rho(\eta,t) = kq\eta_0(R_0^2 - \eta_0^2)^{1/2}\frac{\partial \xi}{\partial r}\Big|_{r=\eta(t)}.$$

Если величина $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ не обращается в нуль при $r = \eta(t)$ (что при достаточно гладкой функции u имеет место хотя бы на малом промежутке времени), то $\rho = 0$ при $\eta_0 = R_0$. Отсюда, в силу (9), получим $\eta(t) = R(t)$, что противоречит исходному предположению $\eta(t) < R(t)$. Таким образом, если в начальный момент времени имело место полное проникновение жидкости в трещину и раскрытие $2w$ удовлетворяет (9), то и в дальнейшем жидкость полностью проникает в трещину. Как отмечалось выше, задача при полном заполнении рассматривалась в работах [2, 3].

Однако, в работах [1, 2, 9, 14] в рамках этой же модели изучались задачи, в которых предполагалось неполное проникновение жидкости в трещину. Из вышеизложенного следует, что такая ситуация возможна лишь в том случае, когда в момент разрыва справедливо неравенство $\eta_0 < R_0$, а следовательно, и неравенство $p_1(0) > P + \pi k(2R_0)^{-1/2}$. Последнее, по-видимому, возможно в том случае, когда разрывающая жидкость имеет значительную вязкость, не позволяющую ей проникнуть в носик трещины и полностью его заполнить, а давление, необходимое для полного заполнения трещины, больше давления разрыва горной породы.

2. Разрыв непроницаемых горных пород идеальной жидкостью

2.1. Постановка задачи. Предполагая, как и в разделе 1.1, малость массовых сил и ускорений в направлении оси, нормальной к плоскости трещины, получим, что давление жидкости p является функцией лишь переменных r, t. В силу этого уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости принимают вид

$$\frac{du_1}{dt} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial r}(\frac{p}{\rho}), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_1) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_2) = 0, \tag{13}$$

где u_1, u_2 – компоненты вектора скорости $\vec{u}(r,z,t)$.

Плотность жидкости ρ без ограничения общности считаем равной единице. Условия непротекания через стенки трещины и условия на свободной границе имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_1\frac{\partial w}{\partial r} \mp u_2(z,r,t) = 0, \quad z = \mp w(r,t), \tag{14}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = u_1(\eta,t), \quad p[\eta(t),t] = 0. \tag{15}$$

При полном заполнении трещины жидкостью второе условие в (15) игнорируется, а первое (условие в особой точке $r = R(t)$) – необходимо для выделения единственного решения. Поскольку первая компонента скорости u_1 зависит, в силу (12), лишь от r,t и, следовательно, u_2 – линейная функция от z , то вводя вместо u_2 новую искомую функцию $v(r,t)$ по формуле $u_2 = -zv$, уравнения (12)–(14) представим в виде

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_1) = 0, \quad \rho = rw(r,t), \tag{17}$$

$$v = -\frac{\partial}{\partial r}(ru_1), \quad u_2 = -zv(r,t). \tag{18}$$

Система (4), (5), (16)–(18) является еще довольно сложной для исследования. Преследуя цель перенести основную тяжесть вычислений с гидродинамической части задачи (уравнения Эйлера) на упругую (условие С.А. Христиановича и решение Снеддона), будем в дальнейшем искать поле скоростей в виде

$$u_1(r,t) = v(t) + \frac{u(t)}{r}, \quad u_2 = -z\frac{v(t)}{r}.$$

Кроме того, считая течение достаточно медленным, отбросим в интеграле Коши-Лагранжа квадрат скорости. Тогда получим следующее представление для давления жидкости

$$p(r,t) = p(r_0,t) - u' \ln \frac{r}{r_0} - v'(r - r_0). \qquad (19)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по времени.

2.2. Преобразование уравнений. В области течения жидкости $\Omega(t) = \{r_0 \le r \le \eta(t), |z| \le w(r,t)\}$ формулы (4), (5) с учетом (19) и при постоянном горном давлении P можно представить в виде

$$k^{-1}w(r,t) = qC - a_1 u' - a_0 v', \qquad (20)$$

$$S \equiv q\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{1/2} - \pi K (2R)^{-1/2} = q_1 u' + q_0 \frac{\eta}{2} v',$$

где (i=0,1).

$$q = p_1(t) - P, \quad p_1(t) = p(r_0,t),$$

$$C(r,\eta,R) = \int\limits_r^\eta \left(\frac{\xi^2 - r_0^2}{\xi^2 - r^2}\right)^{1/2} d\xi,$$

$$a_i(r,\eta,R) = \int\limits_r^R \frac{d\xi}{(\xi^2 - r^2)^{1/2}} \int\limits_{r_0}^\xi \frac{(\xi^2 - x^2)^{1/2}}{x^i} dx +$$

$$+ \int\limits_{r_0}^R \frac{d\xi}{(\xi^2 - r^2)^{1/2}} \int\limits_{r_0}^\eta \frac{(\xi^2 - x^2)^{1/2}}{x^i} dx,$$

$$g_0(\eta,R) = \frac{2}{\eta R} \int\limits_{r_0}^\eta (R^2 - r^2)^{1/2} dr,$$

$$g_1(\eta,R) = \frac{1}{R} \int\limits_{r_0}^\eta \frac{(R^2 - r^2)^{1/2}}{r} dr.$$

С учетом (20) объем жидкости в трещине есть

$$V^0(t) = 4\pi \int\limits_{r_0}^\eta \rho(x,t) dx =$$

$$= 4\pi k [qC_0 - b_1 u^{'} - b_0 v^{'}], \qquad (21)$$

где (i=0,1).

$$C_0 = \int_{r_0}^\eta rC(r,t)dr, \quad b_i(R,\eta) = \int\limits_{r_0}^\eta r a_i(r,t) dr.$$

Объемный приток жидкости в трещину Q^0 и объем V^0 связаны отношением

$$Q^0 = \frac{dV^0}{dt} = 4\pi \frac{d}{dt} \int\limits_{r_0}^\eta \rho(x,t) dx =$$

$$= 4\pi \left[\rho(\eta,t)\frac{d\eta}{dt} + \int\limits_{r_0}^\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\right],$$

из которого, используя (15) и (18), выводим два следующих равенства

$$r_0 W(t) u_1(r_0,t) = Q(t), \quad \frac{dV}{dt} = Q(t), \qquad (22)$$

где

$$4\pi k Q = Q^0, \quad 4\pi k V = V^0, \quad W(t) = k^{-1}\omega(r_0,t).$$

Отметим, что раскрытие в точке $r = r_0$ равно (i=0,1)

$$W(t) = q(R - r_0) - B_1 u' - B_0 v', \quad B_i = a_i(r_0,\eta,R).$$

В дальнейшем величины Q, V, W будем называть соответственно приведенным расходом, объемом и максимальным раскрытием трещины.

Задача 1. По заданному расходу Q требуется определить радиус трещины R, положение свободной границы η, скорость $\vec{u}$ и давление жидкости p, которые при $t > 0$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$S = q_1 u' + q_0 \frac{\eta}{2} v', \qquad (23)$$

$$\frac{dV}{dt} = Q(t), \quad (u + r_0 v)W(t) = Q(t), \qquad (24)$$

$$p(r,t) = p_1(t) - u' \ln \frac{r}{r_0} - v'(r - r_0), \qquad (25)$$

$$p(\eta,t) = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = v + \frac{u}{\eta}. \qquad (26)$$

Задача 2. По известному давлению p_1 жидкости в скважине требуется определить функции $R, \eta, \vec{u}$ и p, удовлетворяющие уравнениям (23), (25), (26) и уравнению

$$\frac{dV}{dt} = (u + r_0 v)W(t).$$

Здесь V и W определены формулами (21), (22).

Сформулируем начальные условия. Считаем, что момент времени $t = -0$ соответствует начальной стадии разрыва, когда трещина находится в предельно равновесном состоянии. В этот момент радиус трещины равен R_0, давление в скважине p^0 – критическое и начинает поступать жидкость с расходом Q_0. Будем считать, что распределение давления в трещине при $t = -0$ мало отличается от значения давления в скважине, т.е. $p(r,0) = p_1(0) = p^0$. Тогда необходимо, чтобы $u' = u = v' = 0$ при $t = -0$. Из второго уравнения в (24) в этом случае получим $v(-0) = Q_0/r_0 W(-0)$, а из условия разрушения (23) следует, что $S(-0) = 0$. Если пренебречь величиной r_0/R, то последнее равенство приводит к следующим известным зависимостям

$$p_1(-0) = P + \pi K(2R_0)^{-1/2}, \quad W(-0) = \pi K \left(\frac{R_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$V(-0) = \frac{\pi k C_0}{(2R_0)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (27)$$

Таким образом, при $t = -0$ задаются следующие начальные условия

$$R(-0) = R_0, \quad u(-0) = u^{'}(-0) = v^{'}(-0) = 0,$$

$$v(-0) = \frac{Q_0}{r_0 W_0(-0)}.$$

Прежде чем сформулировать условия в конечной стадии разрыва при $t = 0$, преобразуем уравнения (23)–(27). Проинтегрировав второе уравнение в (24) по времени, разрешим полученное равенство и (23) относительно u' и v'

$$u' = \frac{1}{\Delta}(g_0 \frac{\eta}{2} F - b_0 S) \equiv f_1(V, R, \eta, p_1), \qquad (28)$$

$$v' = \frac{1}{\Delta}(b_1 S - q_1 F) \equiv f_2(V, R, \eta, p_1), \qquad (29)$$

где

$$\Delta = g_0 b_1 \frac{\eta}{2} - g_1 b_0, \quad F = qC_0(R) - V_0 - \int\limits_0^t Q(t) d\tau$$

и в дальнейшем предполагается, что $\Delta \neq 0$. Используя далее (25), (28) и (29), получим соотношение, связывающее V, p_1,R, η:

$$p_1 = f_1 \ln \frac{\eta}{r_0} + f_2(\eta - r_0). \qquad (30)$$

В момент $t = +0$ будем предполагать, что скачки давления, расхода и объема жидкости равны нулю, а фронт жидкости занимает исходное положение, т.е.

$$[p_1] = p_1(+0) - p_1(-0) = 0, \;\; [V] = [\eta] = [Q] = 0.$$

Тогда уравнение (30), разрешенное относительно радиуса трещины, определяет $R(+0)$ в момент $t = +0$ и значения функций $u'(+0)$ и $v'(+0)$ в этот момент времени. Тем самым определены производные $u'(+0)$, $v'(+0)$, которые должны быть отличные от нуля. В самом деле, если попрежнему считать $u' = v' = 0$, то в силу (30) получим $p_1 = p(0, r) = 0$, $r_0 \leq r \leq \eta$, т.е. давление в трещине падает до нуля и, следовательно, трещина должна смыкаться. Относительно u и v считаем, что $u(+0) = 0$, $v(+0) = Q_0/r_0 W(+0)$, где $W(+0)$ вычисляется по формуле (22) при $t = +0$.

Коэффициенты C_0, b_i, B_i, g_i, $i = 0, 1$, входящие в уравнение (23), (24), могут быть вычислены явно. Ввиду громоздкости выкладок здесь они не приводятся. Предположим, что $r_0 \ll \eta \leq R$ и ограничимся лишь старшими членами в представлениях для названных коэффициентов. Тогда

$$B_0 = \frac{\pi}{8}\eta^2, \quad B_1 = R \ln \frac{\eta}{r_0}, \quad b_0 = \frac{\pi}{24}\eta^4, \quad C_0 = \frac{1}{3}R\eta^2,$$

$$g_0 = \frac{\pi}{2}\frac{\eta}{R}, \quad g_1 = \ln \frac{\eta}{R}, \quad b_1 = \frac{1}{3}\eta^2 R \ln \frac{\eta}{r_0}.$$

Поэтому

$$f_1 = \left(\ln \frac{\eta}{r_0}\right)^{-1} \left[p_1 - \left(P + \frac{\pi K}{(2R)^{1/2}} + 2\sigma s\right)\right], \; s = \frac{\eta}{R},$$

$$f_2 = \frac{8}{\pi\eta}\sigma, \quad \sigma = \frac{3V}{\eta^3} - \frac{1}{s}\frac{\pi K}{(2\eta)^{1/2}}, \quad W = \frac{3V}{\eta^2}.$$

и условие (30) принимает вид

$$2z^3 - \frac{\pi K}{W}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{1/2} z^2 + (\overline{P} - \alpha)z + \frac{\pi K}{W}\left(\frac{\eta}{2}\right)\alpha = 0, \qquad (31)$$

где

$$\overline{P} = P\frac{\eta}{W}, \quad \alpha = \frac{8}{\pi\eta}(\eta - r_0), \quad z^2 \equiv s.$$

В начальный момент времени $\pi K/W = 1$ и (31) определяет $R(+0)$ как решение уравнения

$$2z^3 - z^2 + (\overline{P} - \alpha)z + \alpha = 0, \quad t = +0.$$

Если корень последнего уравнения лежит в интервале $(0, 1)$, то справедливо неравенство $R(+0) > \eta(+0) = \eta_0$, т.е. имеется начальный отрыв жидкости от носика трещины. Так, если пренебречь величиной $\overline{P}(+0)$, то легко проверить, что для отрыва достаточно, чтобы радиус зародышевой трещины был близок к радиусу трещины.

Опишем возможную схему решения задачи 1. Разрешая уравнение (31) относительно R, получим зависимость R от η и Q. Выразим u и v из (24), (26):

$$v = \frac{\eta}{\eta - r_0}\left(\eta' - \frac{Q}{3V}\eta\right), \qquad (32)$$

$$u = \frac{\eta}{\eta - r_0}\left(\frac{Q}{3V}\eta^2 - r_0\eta'\right).$$

Объединяя (28), (32), получим уравнение для $\eta(t)$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\eta}{\eta - r_0}\left(\frac{Q}{3V}\eta - \eta'\right)\right\} = f_2(\eta, R),$$

$$\eta'(0) = \frac{Q_0\eta_0^2}{3V_0}, \; \eta(0) = \eta_0,$$

решив которое, найдем $\eta(t)$, а затем $R(t)$, $v(t)$, $u(t)$. После этого давление на скважине найдем из (28)

$$p_1(t) = u' \ln \frac{\eta}{r_0} + P + \frac{\pi K}{(2R)^{1/2}} + 2s\sigma.$$

Замечание (полное заполнение трещины). Вывод уравнений движения полностью заполненной трещины аналогичен приведенному в разделе 2.2. При этом, так как свободная граница отсутствует, уравнение (15) игнорируется (первое уравнение в (15) заменяется на условие $R' = u_1(R,t)$, необходимое для выделения единственного решения). Начальные условия, сформулированные в разделе 2.2 при $t = -0$, полностью переносятся на данный случай. Коэффициенты $C_0,\ b_i,\ B_i,\ g_i,\ i = 0,1$, вычисляются как и в разделе 2.2 (просто нужно положить $\eta \equiv R$). После аппроксимации последних приходим к следующей системе уравнений

$$u' = f_1 \equiv \left(\ln\frac{2R}{r_0}\right)^{-1}\left[p_1 - \left(P + \frac{\pi K}{(2R)^{1/2}} + 2\sigma\right)\right],$$

$$u' = f_2 \equiv \frac{8}{\pi R}\sigma, \quad \sigma = \frac{2V}{R^3} - \frac{\pi K}{(2R)^{1/2}},$$

$$R' = v + \frac{u}{R}, \quad u + r_0 v = \frac{Q}{W},$$

$$WR^2 = 3V, \quad V = V_0 + \int\limits_0^t Q(\tau)d\tau. \qquad (33)$$

Последнее соотношение устанавливает зависимость между радиусом трещины, приведенным максимальным раскрытием и общим приведенным объемом жидкости в трещине. Оно может быть использовано для определения радиуса по раскрытию, если только условия на скважине смоделированы таким образом, что в процессе движения имеет место полное заполнение трещины жидкостью. Соотношение (33) можно использовать также для определения коэффициента интенсивности напряжений.

Библиографический список

1. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. – №5.
2. Желтов Ю.П. Деформация горных пород. — М., 1966.
3. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. — М., 1975.
4. Зазовский А.Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1973. – №2.
5. Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // ПММ. — 1959. – Вып. 23.
6. Сарайкин В.А. Квазистатический рост трещин под действием равномерного давления // ФТПРПИ. — 1981. – №5.
7. Песляк Ю.А. Развитие трещины в горном массиве при нагнетании в нее жидкости // ПМТФ. — 1975. – №3.
8. Баренблатт Г.И., Христанович С.А. О модуле сцепления в теории трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1968. – №2.
9. Abe H., Mura T., Keer L.M. Groroth rate of penny-shaped crack in hjdraulic bracturing of rocks // J.Geophys. Res. — 1976. – V. 81, №29.
10. Линьков А.М. Аналитическое решение задачи о гидроразрыве для неньютоновской жидкости // ФТПРПИ. — 2013. – №1.
11. Mitchell S.L., Kuske R., Peirce A.P. An asymptotic framework for finite hydraulic fractures including leak-off // A SIAM J. Appl. Math. — 2007. — V. 67, №2.
12. Гарипов Т.Т. Математическое моделирование задач пороупругости и проблема гидроразрыва: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 2005.
13. Ломизе Г.М. Фильтрация в трещиноватых породах. – М., 1951.
14. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтяного пласта // ПММ. — 1956. – Т. 20, №20.
15. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М., 1955.