УДК 514.765

Д.Н. Оскорбин, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

О вычислении спектра оператора кривизны конформно (полу)плоских римановых метрик*

D.N. Oskorbin, E.D. Rodionov, O.P. Khromova

About Calculation of the Spectrum of the Curvature Operator of Conformally (Half-)Flat Riemannian Metrics

Найден спектр оператора секционной кривизны многообразий с конформно (полу)плоской римановой метрикой, исследован спектр оператора секционной кривизны трехмерных локально однородных римановых многообразий.

Ключевые слова: римановые многообразия, конформные (полу)плоские метрики, оператор кривизны.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-04

The spectrum of the sectional curvature operator on manifolds with conformal (half-)flat Riemannian metrics was found, and the spectrum of the sectional curvature operator on 3-dimensional locally homogeneous Riemannian manifolds was investigated.

Key words: Riemannian manifolds, conformal (half) flat metrics, curvature operator.

Введение. Исследование римановых многообразий с конформно (полу)плоской римановой метрикой, т.е. римановых многообразий, у которых тривиален тензор Вейля или часть его компонент, является актуальной задачей римановой геометрии в целом. Это обусловлено последними результатами по конформно (полу)плоским римановым многообразиям с метрикой Эйнштейна [1].

Спектры дифференциальных операторов на римановых многообразиях интенсивно изучаются в последнее время. В этом направлении известны работы М. Каца, К. Гордон, В.Н. Берестовского, В.А. Шарафутдинова и др. (см. подробнее: [2–4]). В частности, известны исследования по теме: «Как услышать форму барабана?» или насколько однозначно можно восстановить риманову метрику многообразия по спектру дифференциального оператора.

1. Обозначения и факты. Пусть (M,g) – ориентированное риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V – векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z=[\nabla_Y,\nabla_X]Z+\nabla_{[X,Y]}Z$ – тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r(X,Y)=\mathrm{tr}(V\to R(X,V)Y)$ и $s=\mathrm{tr}(r)$. Разделим тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни-Номидзу [1], получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A:

$$R=W+A\owedge g, \qquad (1)$$

где $(A\owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,Z)-A(X,V)g(Y,Z)-g(Y,Z)P(X,V)$ и

$$A=\frac{1}{n-2}\left(r-\frac{sg}{2(n-1)}\right), \qquad (2)$$

или в координатном виде

$$A_{ij}=\frac{1}{n-2}\left(r_{ij}-\frac{sg_{ij}}{2(n-1)}\right). \qquad (3)$$

Определение. *Риманово многообразие (M,g) называется конформно плоским, если его тензор Вейля тривиален.*

Риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в слоях пространства расслоения Λ^pM по правилу

$$\langle X_1\wedge\ldots\wedge X_p, Y_1\wedge\ldots\wedge Y_p\rangle_x=\det(g_x(X_i,Y_j)).$$

Тогда для любого числа p, $0\le p\le n$ определим *оператор Ходжа* $*$ как единственный изоморфизм векторных расслоений $*:\Lambda^p_xM\to\Lambda^{n-p}_xM$, для которого

$$\langle *\alpha,\beta\rangle\,\mathrm{vol}=\alpha\wedge\beta$$

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457) и гранта ФЦПК (Соглашение № 8206, заявка № 2012-1.1-12-000-1003-014), программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» на 2012–2016 годы «Развитие Алтайского государственного университета в целях модернизации экономики и социальной сферы Алтайского края и регионов Сибири».

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda^p_x M$, $x \in M$), где vol — форма объема на M.

При $\dim M = 4$ и $p = 2$ оператор Ходжа задает эндоморфизм на $\Lambda^2_x M$ такой, что $*^2 = \mathrm{Id}$. Отсюда

$$\Lambda^2_x M = \Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x, \tag{4}$$

где Λ^+_x и Λ^-_x обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Риманову тензору кривизны R в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V), \tag{5}$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно разложения (4) можно представить в блочном виде [5]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array}\right), \tag{6}$$

где W^+ и W^- — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W.

Согласно (1) можем записать

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} W^+ & 0 \\ \hline 0 & W^- \end{array}\right), \tag{7}$$

где первая матрица соответствует произведению $A \owedge g$, а вторая — тензору Вейля W.

Определение. *Ориентируемое риманово многообразие (M^4, g) называется конформно полуплоским, если автодуальная или антиавтодуальная составляющая его тензора Вейля тривиальна.*

Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в некоторой точке $x \in M$, в котором одновременно диагонализируемы оператор Риччи и оператор одномерной кривизны. Он существует, так как эти операторы самосопряжены и связаны формулой (2). Имеет место

Теорема 1. *Пусть (M, g) — конформно плоское риманово многообразие, т.е. $W = 0$. Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, в котором диагонализируемы операторы Риччи r и одномерной кривизны A. Тогда в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ диагонализируем оператор кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$, причем спектр оператора $\mathcal{R}$ есть $\{K_{ij}\}_{i<j}$, где $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение оператора кривизны (1) в координатном виде. Тогда, пользуясь формулой (5), а также симметриями тензора кривизны, нетрудно видеть, что в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ матрица оператора кривизны диагонализируема и по главной диагонали стоят секционные кривизны $K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.

Естественно, что результат теоремы 1 позволяет поставить следующие вопросы.

1. Справедливо ли утверждение теоремы 1 в случае, когда метрика не является конформно плоской?

2. Возможно ли «услышать» секционную кривизну конформно плоских римановых метрик или трехмерных римановых многообразий?

2. Спектр оператора кривизны конформно (полу)плоской римановой метрики Далее будем предполагать, что риманово многообразие (M, g) является четырехмерным и ориентированным. Тогда любой ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ пространства $T_x M$ определяет ортонормированный базис

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4), \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2), \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3) \end{aligned} \tag{8}$$

пространства $\Lambda^\pm_x M$ (см., например: [1]).

Отметим, что в ортонормированном базисе (8) компоненты оператора кривизны находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}), \\ \mathcal{R}_{12} &= \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}), \\ \mathcal{R}_{13} &= \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}), \\ \mathcal{R}_{14} &= \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3434}), \\ \mathcal{R}_{15} &= \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} + R_{3413} - R_{3442}), \\ \mathcal{R}_{16} &= \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} + R_{3414} - R_{3423}), \\ \mathcal{R}_{22} &= \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}), \\ \mathcal{R}_{23} &= \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}), \\ \mathcal{R}_{24} &= \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} - R_{3413} - R_{3442}), \\ \mathcal{R}_{25} &= \frac{1}{2}(R_{1313} - R_{2424}), \\ \mathcal{R}_{26} &= \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}), \\ \mathcal{R}_{33} &= \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}), \\ \mathcal{R}_{34} &= \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} - R_{3414} - R_{3423}), \\ \mathcal{R}_{35} &= \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} - R_{4214} - R_{4223}), \\ \mathcal{R}_{36} &= \frac{1}{2}(R_{1414} - R_{2323}), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathcal{R}_{44} = \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}),$$
$$\mathcal{R}_{45} = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}),$$
$$\mathcal{R}_{46} = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}),$$
$$\mathcal{R}_{55} = \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}),$$
$$\mathcal{R}_{56} = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}),$$
$$\mathcal{R}_{66} = \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}).$$

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть G – вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда $W^+ = 0$ в том и только том случае, если $W = 0$; $W^- = 0$ в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий: либо $W = 0$, либо алгебра Ли группы G есть одна из алгебр таблицы 1 (см.: [6]).*

Таблица 1

№	Алгебра Ли	Структурные константы алгебры Ли
1	$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = 2H$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$
2	$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$
3	$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = 2H\alpha$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$
4	$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H\alpha$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -H$, $H > 0$, $\alpha > 0$

Из данной теоремы и теоремы 1 следует

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – вещественная 4-мерная алгебра Ли группы Ли G с конформно полуплоской левоинвариантной римановой метрикой. Тогда в базисе внешних форм (бивекторов) пространства $\Lambda^{\pm}\mathfrak{g}$ в матрице оператора кривизны на диагонали стоят секционные кривизны. Если, более того, $W = 0$, то матрица оператора кривизны диагональная, и на диагонали стоят секционные кривизны.*

Доказательство.

Достаточно последовательно рассмотреть каждую алгебру Ли таблицы 1. Рассмотрим один из типичных случаев, остальные случаи изучены в [7].

$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$, $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$.

Определяем компоненты оператора кривизны

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2H^2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

оператора секционной кривизны

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -H^2 & -H^2 & -4H^2 \\ -H^2 & 0 & -4H^2 & -H^2 \\ -H^2 & -4H^2 & 0 & -H^2 \\ -4H^2 & -H^2 & -H^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

оператора одномерной кривизны

$$A = \begin{pmatrix} -H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

оператора Риччи

$$r = \begin{pmatrix} -6H^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6H^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Переходя к базису внешних форм и используя равенства (9), (10), замечаем, что в данном случае $K_{12} = K_{34}, K_{13} = K_{24}, K_{14} = K_{23}$ и

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{12} \\ 0 & K_{13} & 0 & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & 0 & K_{14} & R_{1423} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{1423} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & 0 & 0 & K_{24} & 0 \\ -K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{34} \end{pmatrix}$$

или

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -H^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & H^2 \\ 0 & -H^2 & 0 & 0 & -H^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4H^2 & -2H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2H^2 & -4H^2 & 0 & 0 \\ 0 & -H^2 & 0 & 0 & -H^2 & 0 \\ H^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H^2 \end{pmatrix}.$$

Доказанная теорема дает ответ на первый вопрос: «Является ли базис из бивекторов собственным для оператора кривизны в случае, когда тензор Вейля не тривиален?»

Теперь рассмотрим более подробно трехмерный случай, так как в этом случае тензор Вейля тривиален, и дадим ответ на второй вопрос: «Можно ли услышать форму кривизны для многообразий с тривиальным тензором Вейля?». Ограничимся случаем локально однородных пространств.

3. Локально однородные трехмерные римановы многообразия Следуя схеме рассуждений [8], нетрудно получить теорему, обобщающую условия существования трехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой с предписанными главными значениями оператора кривизны (см. [7]) на случай локально однородных римановых многообразий.

Теорема 4. *Локально однородное трехмерное риманово многообразие* (M, g) *с главными значениями оператора кривизны* $(\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$ *существует в том и только в том случае, если числа* σ_{ij} *(с точностью до перестановок) удовлетворяют хотя бы одному (возможно, нескольким) из условий:*

1. Два числа σ_{ij} *равны нулю.*

2. $(\sigma_{12} + \sigma_{23})(\sigma_{23} + \sigma_{31})(\sigma_{31} + \sigma_{12}) > 0$, *или по крайней мере два из чисел* $\sigma_{12} + \sigma_{23}, \sigma_{23} + \sigma_{31}, \sigma_{31} + \sigma_{12}$ *нули.*

3. $\sigma_{31}\sigma_{12} \le \sigma_{23}^2 < \left(\frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2}\right)^2, \frac{\sigma_{31}+\sigma_{12}}{2} < \sigma_{23}$.

Доказательство. Применим теорему Секигавы [9] о классификации трехмерных локально однородных римановых многообразий: каждое локально однородное трехмерное риманово многообразие либо локально гомотетично одному из симметрических пространств $H^3, S^3, E^3, H^2 \times E^1, S^2 \times E^1$, либо локально изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда утверждение теоремы сразу следует из теорем (32, 33) в [7]. Условие 1 соответствует симметрическим пространствам, условие 2 – унимодулярному случаю, условие 3 – неунимодулярному.

Замечание. Все полученные результаты можно распространить на метрики, конформно эквивалентные левоинвариантным римановым метрикам на трёхмерных группах Ли.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М., 1990.

2. Кас М. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. – 1966. – №73.

3. Шарафутдинов В.А. Локальная слышимость гиперболической метрики // Сиб. матем. журн. — 2009. — №50.

4. Gordon C.S. Survey of isospectral manifolds. Handbook of differential geometry. – Amsterdam, 2000. – Vol. I.

5. Singer I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analisis. – 1969.

6. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Т. 13, вып. 3.

7. Гладунова О.П., Куркина М.В., Оскорбин Д.Н., Пономарев И.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Математическое моделирование в социально-экономических и естественных науках: монография. – Барнаул, 2012.

8. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemannian 3-manifolds // Geom. Dedicata. – 1996. – № 1.

9. Sekigawa K. On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces // Tensor. – 1977. – V. 31.