УДК 532.546 + 536.425

И.Г. Ахмерова

Разрешимость изотермической задачи фильтрации воды и воздуха в пористой среде*

I.G. Akhmerova

The Solvability of the Isothermal Problem of Water Filtration and Air Porous Medium

Доказана локальная разрешимость одномерной изотермической задачи фильтрации воды и воздуха в пористой среде для переменных плотностей. Установлена разрешимость в «целом» по времени в случае постоянства истинных плотностей и малости ускорения.

Ключевые слова: изотермическая задача фильтрации, разрешимость, пористая среда.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-01

A local solvability of the isothermal one-dimensional problem of air and water filtration in a porous medium is proved. The research defines solvability “in general’ on time in case of constancy of the true density and the smallness of the acceleration.

Key words: isothermal filtration problem, solvability, porous medium.

Постановка задачи. Рассмотрим движение двухфазной смеси в недеформируемой пористой среде, система уравнений имеет вид [1]:

$$\frac{\partial(\rho_1^0\overline{m}s)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1^0\overline{m}sv_1)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho_2^0\overline{m}(1-s))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2^0\overline{m}(1-s)v_2)}{\partial x}=0, \tag{2}$$

$$\rho_1^0\overline{m}s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\frac{\partial(\overline{m}sp_1)}{\partial x}+$$
$$+\mu_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+F+\rho_1^0\overline{m}sg, \tag{3}$$

$$\rho_2^0\overline{m}(1-s)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-\frac{\partial(\overline{m}(1-s)p_2)}{\partial x}+$$
$$+\mu_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)-F+\rho_2^0\overline{m}(1-s)g, \tag{4}$$

$$F=B(s)(v_2-v_1)+p_2\frac{\partial\overline{m}s}{\partial x},$$
$$p_1-p_2=p_c(s),\quad p_2=R\rho_2^0, \tag{5}$$

рассматривается в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, при краевых и начальных условиях $(i=1,2)$

$$v_i\mid_{x=0,x=1}=0,\quad v_i\mid_{t=0}=v_i^0(x),$$
$$p_2\mid_{t=0}=p^0(x),\quad s\mid_{t=0}=s^0(x). \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации №1.3820.2011, гранта РФФИ 13-08-01097 и программы стратегического развития Алтайского государственного университета.

Здесь $\overline{m}$, ρ_i^0, v_i – соответственно пористость, истинная плотность и скорость i-й фазы ($i=1$ – жидкость, $i=2$ – газ); s – фазовая насыщенность жидкостью порового пространства; p_1 – эффективное давление жидкости; p_2 – внутреннее давление газа; g – плотность массовых сил, $R=const>0$ – универсальная газовая постоянная; кроме того, $\mu_i=const$ – вязкости фаз; $B(s)$ – коэффициент взаимодействия фаз; $p_c(s)$ – разность давлений (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t. Истинная плотность жидкости ρ_1^0 принимается постоянной. Искомыми являются величины s, ρ_2^0, v_i, p_i, $i=1,2$. Следует также отметить, что наличие $\overline{m}$ не вносит никаких принципиальных трудностей в дальнейшие исследования, если $\overline{m}(x)$ – достаточно гладкая функция [2]. Поэтому для краткости ограничимся случаем $\overline{m}=const>0$. Более того, после очевидных преобразований можно считать $\overline{m}=1$.

Система (1)–(5) близка по структуре системе уравнений вязкого газа [3, гл. 2; 4]. Особенностью задачи (1)–(6) является наличие двух скоростей v_1 и v_2, а также необходимость обоснования физического принципа максимума для насыщенности s вида $0\le s\le 1$ и для истинной плотности газа: $0<\rho_2^0<\infty$.

В настоящей работе доказана локальная разрешимость задачи (1)–(6) в случае, когда ρ_2^0 – функция давления, а $\rho_1^0=const$. В предположениях работы [5] установлена разрешимость «в целом». Сформулируем основной результат.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(s(x,t),\ \rho_2^0(x,t),\ v_i(x,t),\ p_i(x,t))$, $i=1,2$ из пространств $(s,\rho_2^0) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $(\frac{\partial s}{\partial t},\frac{\partial \rho_2^0}{\partial t}) \in L_2(Q_T)$, $v_i \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$, $(\frac{\partial v_i}{\partial t},\frac{\partial p_i}{\partial x}) \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющих уравнениям (1)–(5) и неравенствам $0<s<1, 0<\rho_2^0<\infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)–(6) подчиняются следующим условиям гладкости:

$$(v_i^0,s^0,\rho_2^0) \in W_2^1(\Omega), \quad g \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$$

и условиям согласования $v_i^0\mid_{x=0,x=1}=0, i=1,2$. Пусть функции $B(s)$, $p_c(s)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s\in(0,1)$ и удовлетворяют условиям:

$$k_0^{-1}s^{q_1}(1-s)^{q_2} \le p_c(s) \le k_0 s^{q_3}(1-s)^{q_4},$$
$$|(p_c(s))'_s| \le k_0 s^{q_5}(1-s)^{q_6},$$
$$k_0^{-1}s^{q_7}(1-s)^{q_8} \le B(s) \le k_0 s^{q_9}(1-s)^{q_{10}},$$

где $k_0=const>0$; $q_1,...,q_{10}$ – фиксированные вещественные параметры.

Если выполнены условия $0<m_0\le s^0(x)\le M_0<1$, $0<m_1\le p^0(x)\le M_1<\infty$, $x\in\overline{\Omega}$, где m_0, M_0, m_1, M_1 – известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0\in(0,T)$, такое что для всех $t\le t_0$ существует обобщенное решение $s(x,t)$, $\rho_2^0(x,t)$, $v_i(x,t)$, $p_i(x,t)$, задачи (1)–(6).

При $\rho_2^0=0$, $\mu_2=0$ приходим к системе [6]:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial(sv_1)}{\partial x}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(1-s)}{\partial t}+\frac{\partial((1-s)v_2)}{\partial x}=0, \tag{8}$$

$$s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-s\frac{\partial p_2}{\partial x}-\frac{\partial(sp_c)}{\partial x}+$$
$$+\mu_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+B(v_2-v_1)+\rho_1^0sg, \tag{9}$$

$$0=-(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x}+B(v_1-v_2), \quad p_1=p_2+p_c, \tag{10}$$

замкнутой относительно неизвестных функций s, v_i, p_i, $i=1,2$, удовлетворяющих краевым и начальным условиям

$$v_i\mid_{x=0,x=1}=0, \quad v_i\mid_{t=0}=v_i^0(x),$$
$$p_2\mid_{t=0}=p^0(x), \quad s\mid_{t=0}=s^0(x). \tag{11}$$

Обобщенное решение задачи (7)–(11) понимается в смысле определения 1, в котором нужно положить $\rho_2^0=const>0$.

Теорема 2. Пусть $\rho_2^0=const>0$ и данные подчиняются следующим условиям:

1) функции $B(s)$, $p_c(s)$ и их производные непрерывны для $s\in(0,1)$ и удовлетворяют условиям $B(s)=B_0\frac{1}{s^\beta(1-s)^{\beta+1}}$, $B_0=const>0$, $\beta=const\ge1$; $\mid p'_{cs}\mid\le\frac{M_1}{s(1-s)}$, $p_c^2\le M_1(\frac{1}{s^\beta}+\frac{1}{(1-s)^\beta})$;

2) пусть данные задачи (7)–(11) удовлетворяют условиям

$$0<m_0\le s^0(x)\le M_0<1,$$

3) функция g и начальные функции s^0, v_i^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости: $g\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $(s^0,v_i^0)\in W_2^1(\Omega)$, условиям согласования: $v_i^0\mid_{x=0,x=1}=0$ и дополнительно к (11) выполнено условие $\int\limits_0^1 p_2(x,t)\,dx=0$. Тогда для всех $t\in[0,T]$, $T<\infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (7)–(11), причем существуют числа $0<m<M<1$ такие, что $m\le s(x,t)\le M$, $(x,t)\in Q_T$.

Локальная разрешимость. Системе уравнений (1)–(5) можно придать следующий вид

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(sv_1)=0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_2)=0,$$

$$\rho=\rho_2^0(1-s), \quad p_2=R\rho_2^0,$$

$$\rho_1^0s\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-s\frac{\partial p_2}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(sp_c(s))+$$
$$+\mu_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)+B(s)(v_2-v_1)+\rho_1^0sg,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)+$$
$$+B(s)(v_1-v_2)+\rho g.$$

Пусть $y=y(\zeta,x,t)$ – решение задачи Коши: $\frac{\partial y}{\partial \zeta}=v_1(y,\zeta)$, $y|_{\zeta=t}=x$. Положим $\xi=y(\zeta,x,t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $s(\xi,t)=s^0(\xi)J(\xi,t)$, где $J(\xi,t)=\frac{\partial\xi}{\partial x}$ – якобиан перехода [3, с. 47]. Переходя от (ξ,t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x},t)$ по правилу $s^0(\xi)d\xi=d\bar{x}$, $\bar{x}(\xi)=\int\limits_0^\xi s^0(\eta)d\eta\in[0,1]$ и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x, получим

$$\frac{\partial s}{\partial t}+s^2\frac{\partial v_1}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+(v_2-v_1)s\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho s\frac{\partial v_2}{\partial x}=0,$$

$$L_1(s,\rho,v_1,v_2)=\rho_1^0\frac{\partial v_1}{\partial t}+s\frac{\partial p_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(sp_c(s))-$$
$$-\mu_1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v_1}{\partial x})-\frac{B(s)(v_2-v_1)}{s}-\rho_1^0g=0, \tag{12}$$

$$L_2(s,\rho,v_1,v_2)=\frac{\partial v_2}{\partial t}+(v_2-v_1)s\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{s}{\rho}(1-s)\frac{\partial p_2}{\partial x}-$$
$$-\mu_2\frac{s}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v_2}{\partial x})-\frac{B(s)(v_1-v_2)}{\rho}-g=0. \tag{13}$$

Краевые и начальные условия имеют вид

$$v_i\mid_{x=0,x=1}=0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial x}\mid_{x=0,x=1}=0,$$

$$v_i\mid_{t=0}=v_1^0(x), \quad p_2\mid_{t=0}=p^0(x), \quad s\mid_{t=0}=s^0(x).$$

Будем строить локальное обобщенное решение как предел приближенных решений (s^n,ρ^n,v_1^n,v_2^n), где v_1^n,v_2^n представляются в виде конечных сумм: $v_1^n = \sum\limits_{i=1}^n u_i^n(t)\sin(\pi ix)$, $v_2^n=\sum\limits_{i=1}^n v_i^n(t)\sin(\pi ix)$, $n=1,2,...$, с неизвестными коэффициентами $u_i^n(t),v_i^n(t)$, $i=1,2,...,n$. Для определения последних предполагается, что уравнения (12)–(13) выполняются приближенно:

$$\int\limits_0^1 L_1(s^n,\rho^n,v_1^n,v_2^n)\sin(\pi ix)dx=0, \tag{14}$$

$$\int\limits_0^1 L_2(s^n,\rho^n,v_1^n,v_2^n)\sin(\pi ix)dx=0. \tag{15}$$

Функцию $s^n(x,t)$, $\rho^n(x,t)$ определим из решения задач:

$$\frac{\partial s^n}{\partial t}+(s^n)^2\frac{\partial v_1^n}{\partial x}=0, \quad s^n\mid_{t=0}=s^0(x), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t}+(v_2^n-v_1^n)s^n\frac{\partial \rho^n}{\partial x}+\rho^n s^n\frac{\partial v_2^n}{\partial x}=0,$$

$$\rho^n\mid_{t=0}=\rho^0(x). \tag{17}$$

Из (16) для $s^n(x,t)$ получим следующее соотношение

$$s^n(x,t)=s^0(x)(1+s^0(x)\int\limits_0^t v_{1x}^n d\tau)^{-1}. \tag{18}$$

Задаче (17) придадим следующий вид:

$$\frac{\partial R^n}{\partial t}+U^n\frac{\partial R^n}{\partial x}=f_1(v_2^n,s^n,\rho^n)\equiv f_1^n,$$

$$R^n\mid_{t=0}=R^0(x), \tag{19}$$

где $R^n=ln\rho^n$, $U^n\equiv(v_2^n-v_1^n)s^n$, $f_1^n=-s^n\frac{\partial v_2^n}{\partial x}$.

Соответствующая (19) характеристическая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}&\tfrac{dy(t,\xi)}{dt}=U^n(y(t,\xi),t), \quad y\mid_{t=0}=\xi,\\ &\tfrac{d\overline{R}^n}{dt}=f_1^n(y(t,\xi),t,\overline{R}^n), \quad \overline{R}^n\mid_{t=0}=R^0(\xi),\end{aligned} \tag{20}$$

где $y(t,\xi)=x$, $\overline{R}^n(t,\xi)=R^n(y,t)$, $I\equiv\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial\xi}$, имеем

$$I=\exp\int\limits_0^t\frac{\partial U^n(y(\tau,\xi),\tau)}{\partial y}d\tau=$$

$$=\exp\int\limits_0^t(v_2^n-v_1^n)_x s^n+(v_2^n-v_1^n)s_x^n d\tau.$$

Затем (18) подставим в (14)–(15), полагая при этом

$$y_i^n=\int\limits_0^t u_i^n d\tau, \quad i=1,...,n.$$

Тогда $u_i^n(t)$, $v_i^n(t)$, y_i^n находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i^n}{dt}=\Phi_i^n(u_1^n,...,u_n^n;v_1^n,...,v_n^n;y_1^n,...,y_n^n;\rho^n),$$

$$u_i^n(0)=2\int\limits_0^1 u^0(x)\sin(\pi ix)dx,$$

$$\frac{dv_i^n}{dt}=K_i^n(u_1^n,...,u_n^n;v_1^n,...,v_n^n;y_1^n,...,y_n^n;\rho^n),$$

$$v_i^n(0)=2\int\limits_0^1 v^0(x)\sin(\pi ix)dx, \tag{21}$$

$$\frac{dy_k}{dt}=u_k^n, \quad k=1,2,...,n.$$

Здесь $\lambda_0=1$, $\lambda_j=2$, $j=1,2,...,n$,

$$\Phi_i^n=2\int\limits_0^1[\mu_1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v_1^n}{\partial x})-s^n\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\rho^n}{1-s^n}R)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(s^n p_c(s^n))+\frac{B(s^n)(v_2^n-v_1^n)}{s^n}+\rho_1^0 g]\sin(\pi ix)dx,$$

$$K_i^n=2\int\limits_0^1[\mu_2\frac{s^n}{\rho^n}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v_2^n}{\partial x})-\frac{s^n(1-s^n)}{\rho^n}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\rho^n}{1-s^n}R)+\frac{B(s^n)(v_1^n-v_2^n)}{\rho^n}-$$

$$-(v_2^n-v_1^n)s^n\frac{\partial v_2^n}{\partial x}+g]\sin(\pi ix)dx.$$

Таким образом, приближенное решение (v_1^n,v_2^n,s^n,ρ^n) удовлетворяет задаче Коши (16), (17) и (21), локальная разрешимость этой задачи при каждом фиксированном n следует из теоремы Коши-Пикара [7].

Укажем такое значение t_0, для которого данная задача на интервале $[0,t_0]$ разрешима для всех n. Одно из условий, с учетом которого в дальнейшем выбирается величина промежутка t_0, связано с требованием положительности $s^n(x,t)$, $\rho^n(x,t)$. Поскольку $0<m_0\le s^0(x)\le M_0<1$, $0<m_1\le\rho^0(x)\le M_1<\infty$, потребуем, чтобы для $s^n(x,t)$ и $\rho^n(x,t)$ выполнялись соотношения

$$0<\frac{m_0}{2}\le s^n(x,t)\le\frac{M_0+1}{2}<1,$$

$$\frac{m_1}{2} \le \rho^n(x,t) \le 2M_1, \qquad (22)$$

для всех n при $x \in [0,1], t \in [0,t_0]$. Кроме того, из (16), (19) и (22) получим

$$| s_x^n | \le C(1 + \int\limits_0^t | v_{1xx}^n | d\tau), \qquad (23)$$

$$| \rho_x^n | \le C(1 + \int\limits_0^t | s_x^n || v_{2x}^n | d\tau + \int\limits_0^t | v_{2xx}^n | d\tau).$$

Положим

$$z_n(t) = \|v_1^n(t)\|^2 + \|v_2^n(t)\|^2 + \|v_{1x}^n(t)\|^2 + \|v_{2x}^n(t)\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(\int\limits_0^t \|v_{1xx}^n(\tau)\|^2 d\tau + \int\limits_0^t \|v_{2xx}^n(\tau)\|^2 d\tau).$$

Из (14)–(15) с учетом оценок для s_x^n, ρ_x^n из (23) выводим неравенство $\frac{dz_n}{dt} \le C(\|g(t)\|^2 + z_n^5(t))$ с независящей от n постоянной C. Откуда при $t_0 < \frac{1}{C^2}(z_n(0) + C\int\limits_0^T \|g(\tau)\|^2 d\tau)^{-4}$ следует неравенство

$$\max_{0\le t\le t_0} \|v_{1x}^n(t)\|^2 + \max_{0\le t\le t_0} \|v_{2x}^n(t)\|^2 +$$

$$+\int\limits_0^{t_0} (\|v_{1xx}^n(t)\|^2 + \|v_{2xx}^n(t)\|^2) dt \le N, \qquad (24)$$

с постоянной N, не зависящей от n. Тогда из (18), (21) выводим, что

$$\frac{m_0}{1 + 2^{1/2} M_0 N^{1/2} t_0^{3/4}} \le s^n(x,t) \le \frac{M_0}{1 - 2^{1/2} M_0 N^{1/2} t_0^{3/4}},$$

$$m_1 e^{-\frac{M_0+1}{2} 2^{1/2} N^{1/2} t_0^{3/4}} \le \rho^n(x,t) \le M_1 e^{\frac{M_0+1}{2} 2^{1/2} N^{1/2} t_0^{3/4}}.$$

Если выбрать

$$t_0 \le min\{(\frac{1 - M_0}{(1+M_0) 2^{1/2} M_0 N^{1/2}})^{4/3},$$

$$(\frac{2^{1/2} ln2}{(M_0+1) N^{1/2}})^{4/3}, \frac{1}{C^2}(z_n(0) + C\int\limits_0^T \|g(\tau)\|^2 d\tau)^{-4}\},$$

то получаем неравенства (22) при $x \in [0,1]$, $t \in [0,t_0]$.

Оценки (24) позволяют выделить из последовательностей $\{s^n\}$, $\{v_1^n\}$, $\{v_2^n\}$, $\{\rho^n\}$ сходящиеся подпоследовательности. Полученные равномерные оценки по n позволяют выделить слабо сходящиеся подпоследовательности: v_1^n, v_2^n, v_{1x}^n, v_{2x}^n слабо сходятся в $L_2(0,t_0;L_2(\Omega))$, v_{1xx}^n, v_{2xx}^n, v_{1t}^n, v_{2t}^n слабо сходятся в $L_2(Q_{t_0})$, $Q_{t_0} = (0,t_0) \times (0,1)$.

Из равномерных оценок v_1^n, v_2^n в $L_2(0,t_0;L_2(\Omega))$, $W_2^1(Q_T)$ и v_{1t}^n, v_{2t}^n в $L_2(Q_{t_0})$ возможно выделить подпоследовательности v_1^n, v_2^n, сильно сходящиеся к v_1, v_2 в $L_2(0,t_0;L_2(\Omega))$. Из (23), (24), очевидно, вытекает сильная сходимость s^n, ρ^n к s, ρ в $L_2(Q_{t_0})$.

Предельным переходом в равенствах (14)–(17) показывается, что предельные функции s, v_1, v_2, ρ дают обобщенное решение задачи (1)–(6) на промежутке $[0,t_0]$. Теорема 1 доказана.

Случай несжимаемых сред. Глобальная разрешимость. Существование решения на малом промежутке времени $[0,t_0]$ для системы уравнений (7)–(10) доказывается с небольшими изменениями так же, как в теореме 1 данной статьи. Поэтому основная трудность связана с получением глобальных априорных оценок, независящих от величины t_0. После этого локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,T]$.

Следует также отметить, что наличие g в уравнении (9) не вносит никаких принципиальных трудностей в дальнейшие исследования, если $g(x,t)$ – достаточно гладкая функция. Поэтому для краткости ограничимся случаем $g = 0$. При выполнении условий теоремы 2 для решения задачи (7)–(11) для любого $t \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$\int\limits_0^1 (su^2 + \frac{s_x^2}{s} + \frac{1}{s^\beta} + \frac{1}{(1-s)^\beta}) dx +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^1 (su_x^2 + \frac{Bu^2}{(1-s)^2}) dx d\tau \le C_1,$$

$$0 < m \le s(x,t) \le M < 1, \qquad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \| u_x \|^2 dx + \| u_{xx} \|^2 dx \le$$

$$\le C_2(1 + \|u_x\|^2) \le C_3, \qquad (26)$$

где постоянные C_1, C_3, m, M зависят только от данных задачи (7)–(11) и не зависят от t_0.

Для всех $t \in [0,T]$ справедливы оценки

$$\sup_{0\le x\le 1} |R(x,t)| + \sup_{0\le x\le 1} |u(x,t)| \le$$

$$\le C_4[\sup_{0\le x\le 1} |R^0(x)| + \sup_{0\le x\le 1} |u^0(x)|], \qquad (27)$$

где C_4 зависит только от m, M, μ_1, β, ρ_1^0. Следовательно, $u(x,t)$, $R(x,t)$ являются ограниченными функциями. Следствием оценок (25)–(27) является результат теоремы 2.

Библиографический список

1. Ведерников В.В., Николаевский В.Н. Уравнения механики пористых сред, насыщенных двухфазной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1978. – №5.
2. Папин А.А. О локальной разрешимости краевой задачи тепловой двухфазной фильтрации // Сиб. журн. индустр. математики. – Новосибирск, 2009. – Т. 12, №1(37).
3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.
4. Канель Я.И. Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа // Дифферен. уравнения. – 1968. – Т. 4, №4.
5. Göz M. Existence and uniqueness of time-dependent spatially periodic solutions of fluidized bed equations // ZAMM.Z. angew. Math. Mech. – 1991. – №71:6.
6. Gard S.K., Pritchett J. W. Dynamics of gas – fluidized beds // Journal of Applied Phisics. – 1975. – V. 46, №10.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.