

Е.В. Понькина, Ю.А. Захарова

Модель рассредоточенного рынка при асимметрии распределения транспортных расходов между агентами

E.V. Ponkina, Yu.A. Zakharova

Model of the Market with Spatially Distributed Agents when the Transportation Costs between them are Asymmetric

Рассматривается многоагентная модель рассредоточенного рынка, учитывающая возможность асимметричного распределения издержек транспортировки и сбыта продукции между агентами. В результате исследования получено аналитическое решение в общем виде для одного потребителя и n производителей. На основе модели показано влияние форм рассредоточенности агентов и степени асимметрии транспортных издержек между ними на уровень дифференциации равновесных цен и результаты их функционирования при различных вариантах поведения участников рынка.

Ключевые слова: рассредоточенный рынок, асимметрия транспортных издержек, эффективность рынка, поведение агентов, дифференциация равновесных цен.

DOI 10.14258/izvasu(2013)1.2-18

Введение. Рассмотрим модель рынка промежуточных продуктов, выступающих в качестве основного сырья при производстве некоторых товаров, на котором действует множество агентов, подразделяемых по виду деятельности на две группы: *агенты-потребители* $N = \{1, \dots, N\}$ (потребители промежуточных продуктов, производящие товары, реализуемые на потребительском рынке) и *агенты-производители* $M = \{1, \dots, M\}$ (производители промежуточных продуктов). Все агенты существенно рассредоточены в пространстве, т. е. издержки транспортировки и сбыта продукции (t_{ij}) оказывают значительное влияние на экономическую эффективность их деятельности (прибыль) и, соответственно, принятие решений о выборе контрагента. Месторасположение агентов в пространстве фиксировано. Обобщенная структура модели рассматриваемого сырьевого рынка приведена на рисунке 1.

Сделки купли-продажи продукции заключаются индивидуально между агентами по договорным ценам c_{ij} ($i \in N; j \in M$), при этом отсутствуют какие-либо препятствующие этому ограничения. Главным критерием выбора контрагента и формирования связи выступает разность предлагаемой цены реализации и транспортных издержек — $(c_{ij} - t_{ij})$. Связь между контрагентами описывается композицией векторов спроса, предложения и договорных цен — (y_{ij}, x_{ij}, c_{ij}) . Арбитраж между агентами не рассматривается. Аналогом данной рыночной структуры может

The model of the multi-agent system is discussed taking into account a possible asymmetric distribution of transportation costs and product distribution among the agents. As a result, the analytical solution in its general form was obtained for a consumer and n manufacturers. The model shows the influence of the forms of agents' spatial distribution and the degree of the asymmetry of transportation costs among them on the differentiation of equilibrium prices and the results of their functioning in different behaviors of the market participants.

Key words: market with spatially distributed agents, asymmetry of transportation costs, efficiency of market, agents' behavior, differentiation of equilibrium prices.

выступать рынок зерна и продуктов его переработки, рынок молока и т. п. Модели подобной структуры основаны на сетевом принципе взаимодействия агентов и исследуются в рамках методологии моделирования социальных сетей (*social network*) [1–2], теории игр (игры согласия) [3–4] и рассредоточенных рынков [5]. В настоящее время недостаточно исследованы следующие вопросы: каково влияние различных пространственных, поведенческих и договорных факторов на дифференциацию равновесных цен на рынке, экономические результаты функционирования агентов и общую эффективность рынка? В частности, каково влияние формы рассредоточенности агентов в пространстве, распределения транспортных издержек между контрагентами по сделкам купли-продажи и политики по сбыту и закупке продукции на исследуемые рыночные характеристики?

Обобщенная многопродуктовая модель. Пусть каждый агент-производитель i ($i \in N$) выпускает промежуточный продукт (далее — продукцию или сырье) в объемах $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^S)$, используя при этом ресурсы $r_i = (r_i^1, \dots, r_i^V)$, минимальные издержки производства при выпуске x_i описываются функцией $z_i(x_i)$. Агент-потребитель j ($j \in M$) — предприятие, производящее конечную продукцию в объемах $Y_j = (Y_j^1, \dots, Y_j^K)$, используя при этом сырье, приобретаемое у агентов-производителей $y_j = (y_j^1, \dots, y_j^S)$. Выход готовой продукции предприятия-потребителя сырья описывается производственной функцией $Y_j = F(y_j, c_j, q)$, в которой

$c_j = (c_j^1, \dots, c_j^s)$ — вектор договорных цен на сырье, $q = (q^1, \dots, q^k)$ — цены готовой продукции. Предполагаем, что спрос на готовую продукцию не эластичен по объему предложения Y_j , т.е. $q = const$. Связи взаимодействия между агентами формируются в результате согласования объемов поставок промежуточного продукта и цен (x_i^s, y_j^s, c_{ij}^s) . Очевидно, что фактический объем поставок (поток продукции в направлении от производителя i до потребителя j) составит $x_{ij}^s = \min\{x_i, y_j\}$ по договорной цене c_{ij}^s .

Пусть издержки транспортировки и сбыта на единицу продукции от i -го производителя до j -го

потребителя определены функцией $t_{ij}^s(\rho_{ij}, xy_{ij}^s)$ и зависят от расстояния между агентами ρ_{ij} и объемов xy_{ij}^s . Введем параметр φ_{ij} , отвечающий за распределение затрат по реализации продукции между контрагентами ($\varphi_{ij} \in [0,1]$). Издержки транспортировки и сбыта продукции определяются для производителя i как $\sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^S t_{ij}^s(\rho_{ij}, x_{ij}^s) x_{ij}^s \varphi_{ij}$, а для потребителя j — как $\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^S t_{ij}^s(\rho_{ij}, y_{ij}^s) y_{ij}^s (1 - \varphi_{ij})$, при условии что $y_{ij}^s = x_{ij}^s$.

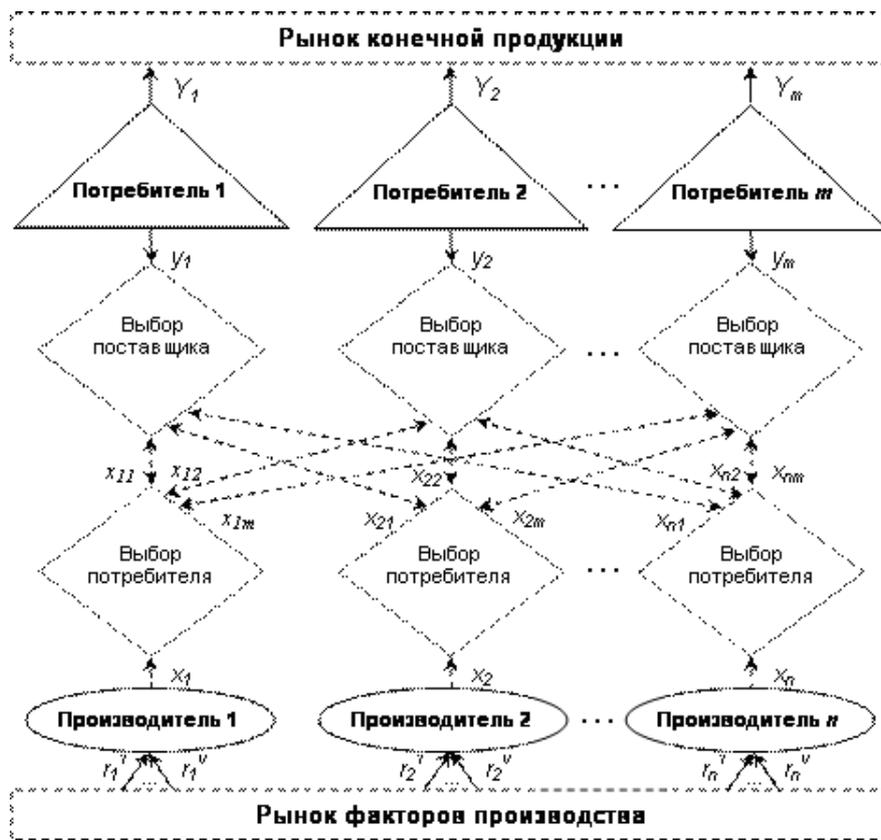


Рис. 1. Структура моделируемого рынка при рассредоточенности агентов в пространстве и в условиях их сетевого взаимодействия

Задача производителя ($i \in M$) заключается в получении максимальной прибыли от производства и реализации продукции:

$$\pi_i(x_i, c_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^S (c_{ij}^s - t_{ij}^s(\rho_{ij}, x_{ij}^s) \varphi_{ij}) x_{ij}^s - z_i(x_i) \rightarrow \max_{x_i \in X_i^0} \quad (1)$$

$$X_i^0 = \{x_i \in R_+^{m+S} : g_i(x_i) = 1\},$$

где X_i^0 — множество допустимых решений производителя, на котором выполнены правила принятия решений, описываемые функцией $g_i(x_i)$.

Задача потребителя ($j \in M$) состоит в получении максимальной прибыли от производства и реализации готовой продукции:

$$\Pi_j(y_j, c_j) = \sum_{k=1}^K q^k F_j^k(Y_j, c_j, q) - \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n ((c_{ij}^s + (1 - \varphi_{ij}) t_{ij}^s(\rho_{ij}, y_{ij}^s)) y_{ij}^s) - Z_j(y_j) \rightarrow \max_{y_j \in Y_j^0} \quad (2)$$

$$Y_j^0 = \{y_j \in R_+^{n+S} : G_j(y_j) = 1\},$$

где $Z_j(y_j)$ — затраты на производство готовой продукции без учета издержек на закупку сырья и его доставку.

Решением задач (1)–(2) являются оптимальные объемы предложения продукции агентом-производителем $x_{ij}^s = x_{ij}^s(c_i, \varphi_{ij}, \rho_{ij})$ и спроса на сырье агента потребителя $y_{ij}^s = y_{ij}^s(q, c_j, \varphi_{ij}, \rho_{ij})$ при договорных ценах

c_{ij}^s , пространственной рассредоточенности ρ и распределении издержек транспортировки и сбыта между контрагентами φ .

Обязательным условием адекватности и оптимальности взаимоотношений участников рынка в сетевой модели (1)–(2) является условие продуктового баланса (доказательство данного утверждения, например, рассмотрено в [4]):

$$y_{ij}^s(q, c_j, \varphi_j, \rho_j) = x_{ij}^s(c_i, \varphi_i, \rho_i), \quad \forall i \in N; \forall j \in M. \quad (3)$$

Система (1)–(3) описывает многоагентную, многопродуктовую модель рассредоточенного рынка и рассматривается в качестве базовой для исследования поставленных вопросов.

Эффективность взаимодействия агентов (эффективность рынка, социальное благосостояние [4, с. 21]) характеризуется общей суммой прибылей участников рынка: $W = \sum_{i=1}^n \pi_i + \sum_{j=1}^m \Pi_j$.

В агрегативной форме модель (1)–(3) может быть представлена как:

$$\mathfrak{R}(\rho) = \left\langle \left\{ X_i^0, \pi_i(\cdot) \right\}_{i \in N}, \left\{ Y_j^0, \Pi_j(\cdot) \right\}_{j \in M}, Q, \rho, C \right\rangle,$$

$$C = \left\{ c \in R_+^{N+M+S} : y_{ij}^s(q, c_j, \varphi_j, \rho_j) = x_{ij}^s(c_i, \varphi_i, \rho_i), \forall i \in N; \forall j \in M, s = 1, \dots, S \right\},$$

где $q \in Q$, $c \in C$, $\rho = (\rho_{ij})$ — общесистемные параметры; C — множество цен, обеспечивающих баланс оптимальных интересов участников.

Частный случай модели: монополия. Рассмотрим частный случай модели (1)–(3) рассредоточенного рынка в случае производства одного продукта, присутствии одного потребителя и n производителей

лей, конкурирующих между собой по сбыту сырья. Для изучения характера воздействия исследуемых факторов на уровень дифференциации равновесных цен рассмотрим такой вариант модели, в которой все производители являются равными по технологической эффективности, выпускают продукцию однородную по качеству, имеют равный доступ к рынкам ресурсов, т. е. функции минимальных производственных издержек, обеспечивающих выпуск продукции в объеме x_i , для всех агентов одинаковы $z_i = x_i^2$.

Затраты агента-потребителя (Z), объем выхода готовой продукции (F) определены функциями $Z = (\sum_{i \in N} y_i)^2$, $F = a \sum_{i \in N} y_i$, где a — технологический параметр. Расходы на транспортировку и сбыт зависят линейно от расстояния $t_i = \rho_i b$, где b — параметр (стоимость транспортировки груза в расчете на 1 т-км).

Модель взаимодействия агентов в условиях монополии описывается системой (4)–(6):

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (qa - (1 - \varphi_i)t_i - c_i)y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \rightarrow \max_{y_i \geq 0}, \quad (4)$$

$$\pi_i = c_i x_i - x_i^2 - \varphi_i t_i x_i \rightarrow \max_{x_i \geq 0}, \quad (5)$$

$$y_i(c) = x_i(c), \quad \forall i \in N. \quad (6)$$

Варианты пространственной рассредоточенности агентов исчерпываются следующими случаями (рис. 2): а) равная удаленность агентов-производителей от рынка сбыта; б) дифференциация агентов по степени удаленности; в) средоточенный рынок — все агенты лоцируются на одной территории, расстояния несутельственны при принятии решений.

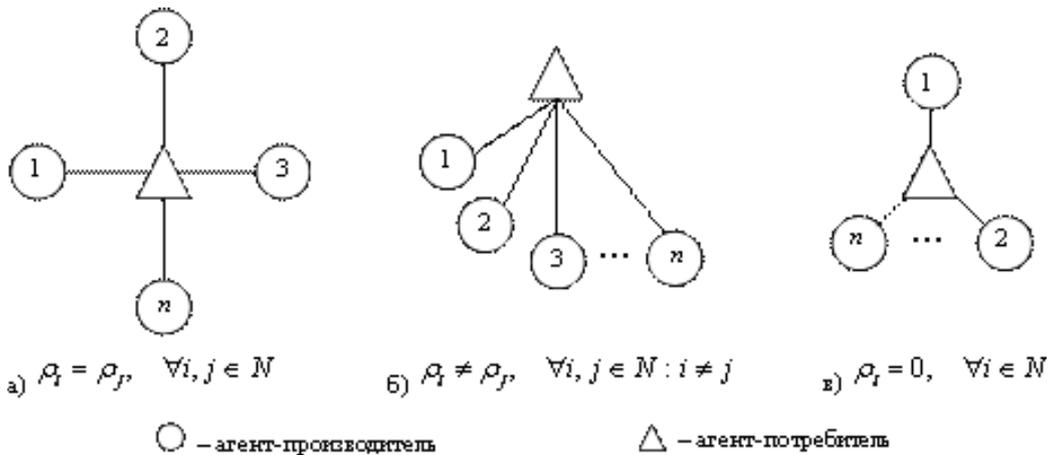


Рис. 2. Формы рассредоточенности агентов в пространстве

В качестве главного исследуемого аспекта поведения агентов рассматривается политика проведения закупочной или сбытовой деятельности, с одной стороны, характеризующая «жесткость» договорных условий поставки продукции, а с дру-

гой — различные формы управления ценами. Предполагая, что цена является первичным фактором, обуславливающим выпуск продукции x_i , независимость и рациональность поведения агентов, отсутствие лидеров, исследованы три формы взаи-

модействия: **F0** — обоюдные договорные взаимоотношения; **F1** — заказ на производство продукции по ценам производителей и **F2** — заказ на поставку продукции по цене потребителя.

F0: Обоюдные договорные взаимоотношения. Принципы принятия решений при такой форме поведения на рынке описываются системой (4)–(6) (рис. 3), при этом оба контрагента являются активными в плане поиска и инициирования связей, устанавливая взаимовыгодные договорные цены.

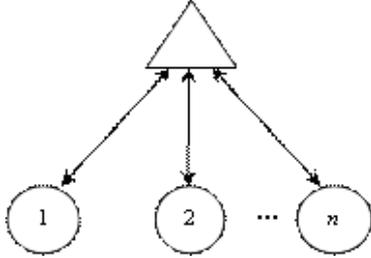


Рис. 3. Поведение агентов в рамках политики F0

Равновесное решение в задаче (4)–(6) имеет вид:

$$x_i^0 = y_i^0 = \frac{qa - nt_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{2(n+1)}; \quad c_i^0 = \frac{qa + t_i((n+1)\varphi_i - n) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{n+1};$$

$$\pi_i^0 = \left(\frac{qa - nt_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{2(n+1)} \right)^2; \quad \Pi^0 = \left(\frac{nqa - \sum_{i=1}^n t_i}{2(n+1)} \right)^2.$$

F1: Заказ на производство продукции по ценам производителей. Предположим, что $x_i = y_i$ и инициация этого условия вызвана согласием производителя выпустить любой объем продукции $x_i = y_i(c)$ в соответствии с заказом на производство y_i по цене производителя c_i (рис. 4). Форма такого взаимодействия описывается задачей (7)–(8):

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (qa - (1 - \varphi_i)t_i - c_i)y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \rightarrow \max_{y_i \geq 0}, (7)$$

$$\pi_i = c_i y_i - y_i^2 - \varphi_i t_i y_i \rightarrow \max_{c_i \geq 0}, \quad \forall i \in N. \quad (8)$$

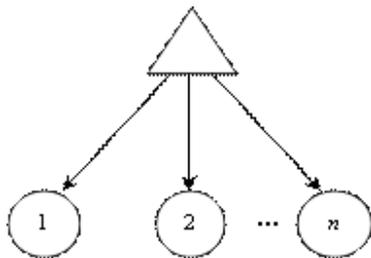


Рис. 4. Поведение агентов в рамках политики F1

Равновесное решение задачи (7) — (8):

$$x_i^1 = y_i^1 = \frac{2qa - (n+1)t_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{4(n+2)}; \quad c_i^1 = \frac{2qa + t_i((n+2)\varphi_i - (n+1)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{n+2};$$

$$\pi_i^1 = 3 \left(\frac{2qa - (n+1)t_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{4(n+2)} \right)^2; \quad \Pi^1 = \left(\frac{nqa - \sum_{i=1}^n t_i}{2(n+2)} \right)^2.$$

F2: Заказ на поставку продукции по цене потребителя. Асимметричная ситуация поведения к F1, при которой условие продуктового баланса (6) выполнено со стороны потребителя, т. е. закупаются все предлагаемые объемы сырья $y_i = x_i(c)$ по цене потребителя $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_n)$ (рис. 5). Ситуация описывается системой (9)–(10):

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (qa - (1 - \phi_i)t_i - c_i)x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \rightarrow \max_{c_i \geq 0}, (9)$$

$$\pi_i = c_i x_i - x_i^2 - \varphi_i t_i x_i \rightarrow \max_{x_i \geq 0}, \quad \forall i \in N \quad (10)$$

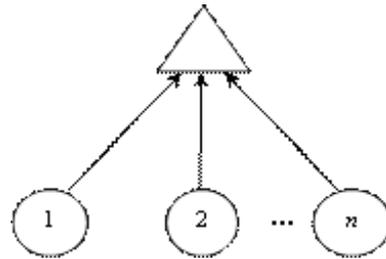


Рис. 5. Поведение агентов в рамках политики F2

Равновесное решение в задаче (9)–(10):

$$x_i^2 = y_i^2 = \frac{2qa - (n+1)t_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{4(n+2)}; \quad c_i^2 = \frac{2qa + t_i((2n+4)\varphi_i - (n+1)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{2(n+2)};$$

$$\pi_i^2 = \left(\frac{2qa - (n+1)t_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_j}{4(n+2)} \right)^2; \quad \Pi^2 = \frac{qa \left(nqa - 2 \sum_{i=1}^n t_i \right) + 2 \sum_{i=1}^n t_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n t_i t_j}{4(n+2)},$$

где $t_i t_j = t_j t_i$.

Анализ полученных аналитических решений позволяет сделать следующие выводы:

1. Степень и форма рассредоточенности агентов на рынке оказывают существенное воздействие на результаты их функционирования. Так, оптимальный уровень прибыли агента i (π_i^*) и объем предложения продукции зависят не только от собственных транспортных издержек t_i , но и от транспортных издержек агентов-конкурентов t_{-i} . Возрастание числа агентов-производителей, лоцирующихся вблизи единственно-

го потребителя, приводит к уменьшению как оптимальных объемов производства, так и прибыли более удаленных агентов, приводя, таким образом, к увеличению концентрации производственных мощностей на некоторой территории, формируя границу рынка.

2. В условиях средоточенного рынка ($\rho = 0$) или равной удаленности агентов ($\rho = const$) при фиксированных φ и любых формах поведения (F0 — F2) дифференциация цен на рынке отсутствует, а объемы выпуска продукции распределяются равными долями ($c_i^* = c_j^*$; $x_i^* = x_j^*$; $y_i^* = y_j^*$).

3. Наиболее привлекательной, с точки зрения прибыли, формой поведения агентов-производителей является F1, т. е. ситуация, в которой они получают заказ на производство продукта по оптимальным для них ценам, менее привлекательная — F2 (диктат цен со стороны потребителя) ($\pi_i^2 \leq \pi_i^0 \leq \pi_i^1$). Для потребителя ситуация F2 является более привлекательной, чем другие.

4. Объемы выпуска/закупа продукции, прибыль производителей и потребителя, а также уровень общественного благосостояния W не зависят от асимметрии распределения транспортных расходов φ .

5. Параметр асимметрии транспортных издержек φ влияет на равновесную рыночную цену c_i , которая возрастает, в случае если издержки транспортировки полностью лежат на производителях.

6. Цена i -го агента c_i напрямую зависит и от транспортных издержек конкурентов t_j , но не зависит от φ_j ($j \neq i$). Следовательно, договорные условия между агентами-конкурентами и потребителем не оказывают влияния на индивидуальную равновесную цену i -го агента.

Данные выводы подтверждаются наблюдениями состояния рынка сахарной свеклы в Алтайском крае, который, по сути, является монополией и абсолютно точно удовлетворяет условиям взаимодействия агентов F2.

Утверждение 1. Степень дифференциации равновесных цен в модели (4)–(6) и ее модификациях $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_n)$, характеризуемая дисперсией

$$D(c) = \frac{\sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2}{n-1}, \quad \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n},$$

имеет характер линей-

ной возрастающей зависимости от дисперсии расстояний $D(\rho)$ между агентами при условии $\varphi_i = 0, \forall i \in N$:

$$F0, F1: D(c) = b^2 D(\rho);$$

$$F2: D(c) = \frac{1}{4} b^2 D(\rho).$$

Таким образом, возрастание конкуренции между агентами-производителями на единственном рынке сбыта влечет существенное снижение дифференциации цен, стремление к средоточенному рынку либо равной удаленности агентов приводит к отсутствию дифференциации цен.

Утверждение 2. Дисперсия цен на рынке $D(c)$, описываемом системой моделей (4)–(6), имеет характер линейной возрастающей зависимости от дисперсии параметра распределения транспортных расходов между участниками сделки $D(\varphi)$ при условии $\rho_i = const, \forall i$. Для различных форм взаимодействия агентов зависимость имеет вид: $D(c) = b^2 \rho^2 D(\varphi)$.

Доказательства данных утверждений следуют из полученного аналитического решения.

Заключение. Выявление особенностей пространственно-сетевое взаимодействия субъектов экономической деятельности, функционирующих в рыночной среде в условиях изменяющихся институциональных и инфраструктурных факторов, с учетом ограниченности производственного потенциала, естественных мотивов и критериев эффективности деятельности, обуславливающих их поведение и результаты, является одной из фундаментальных проблем экономической теории, в исследовании которой необходимо базироваться на экономико-математическом моделировании многоагентных систем с учетом рассредоточенности агентов в пространстве, фиксируя состояние одних и варьируя состояние других факторов. Новым аспектом проведенного исследования является выявление роли асимметрии транспортных издержек между агентами при заключении сделок купли-продажи продукции и форм пространственной рассредоточенности на уровень дифференциации цен на рассмотренном классе моделей рассредоточенного рынка.

Библиографический список

Bala V., Goyal S. A noncooperative model of network formation // *Econometrica*. — 2000. — Vol. 68, № 5.
 Bloch F., Jackson M. The formation of networks with transfers among players // *Journal of Economic Theory*. — 2007. — Vol. 133.
 Губко М. В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. Обзор теории сетевых игр // *Автоматика и телемеханика*. — 2004. — № 8.

Губко М. В. Рыночное равновесие в задаче формирования торговой сети // *Управление большими системами*. — 2004. — Вып. 7.

Коваленко А. Г. Анализ существования и устойчивости равновесного состояния однопродуктового рассредоточенного рынка // *Математический журнал*. — Алматы, 2009. — Т. 9, № 4. (34).