

УДК 537.84

А. В. Проскурин, А. М. Сагалаков

Устойчивость течения Озеена возле кругового цилиндра*

A. V. Proskurin, A. M. Sagalakov

A Stability of Oseen Flow by Circular Cylinder

Исследуется устойчивость течения Озеена возле кругового цилиндра. Работа носит методический характер. Изучены возможности метода на основе функций Рвачева. Построена структура, удовлетворяющая граничным условиям и приближенно представляющая решение задачи. Неизвестные коэффициенты находились методом коллокаций. Течение устойчиво в области применимости формулы Озеена. Метод прост и экономичен, имеет высокий порядок точности.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, течение Озеена, уравнения с частными производными, спектральные методы.

A stability of Oseen flow by circular cylinder is investigated. The work has methodical character. Rvachev function is applied for illustrating possibilities of the method. The authors build the structure that satisfies the boundary conditions and represents approximately solution. Unknown factors were found by a collocation method. The flow is stable in the field of applicability of the Oseen formula. The method is simple and exponentially converging.

Key words: hydrodynamic stability, Oseen flow, partial differential equations, spectral methods.

Исследование устойчивости и бифуркаций течений представляет собой сложную и интересную проблему. Классическая постановка задачи устойчивости течений вязкой жидкости приводит к задаче Орра-Зоммерфельда [1, 2] – краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это возможно благодаря наличию однородных направлений, относительно которых возмущение можно представить в виде элементарных волновых решений с определенным набором волновых чисел, например, для течения в плоском канале, течения в круглой трубе, течений между коаксиальными цилиндрами. С другой стороны, есть много течений, в которых картина развития возмущений неоднородна вдоль или поперек потока: течение в прямоугольной трубе, обтекание крыла, обтекание цилиндра. В таких случаях задача устойчивости сводится к краевой задаче для уравнений с частными производными (см. обзор: [3]).

Направим ось x вдоль направления движения жидкости, а ось y — перпендикулярно, обе перпендикулярно оси цилиндра (см. рис. 1). Уравнение Навье-Стокса для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \psi, \quad (1)$$

где ψ – функция тока; $\text{Re} = \frac{Ud}{\nu}$ – число Рейнольдса; U – скорость набегающего потока; d – радиус цилиндра; ν – коэффициент вязкости.

В соответствии с [3], решение (1) ищем в виде

$$\psi = \psi_0 = \psi(x, y) e^{Ct}, \quad (2)$$

где $\psi_0 = y - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f(r)$ – решение Озеена [4],

$$f(r) = \frac{1}{2} M_1 r \ln r + M_2 r + M_3 r^{-1}, \quad M_2 = 1 + \frac{1}{2} M_1, \quad M_3 = -\frac{1}{4} M_1,$$

$$M_1 = \frac{2/\ln 7.406}{\text{Re}}, \quad \psi(x, y) e^{\xi t} - \text{малое возмущение}, \quad \psi(x, y)$$

– амплитуда, $C = X + iY$ – определяет декремент затухания возмущения. Подставляя (2) в (1), получим

$$C(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \frac{1}{\text{Re}} (\psi_{xxxx} + 2\psi_{xyyy} + \psi_{yyyy}) - 2\psi_x - (1 - y^2)(\psi_{xxx} + \psi_{yyx}), \quad (3)$$

где производные обозначены нижними индексами.

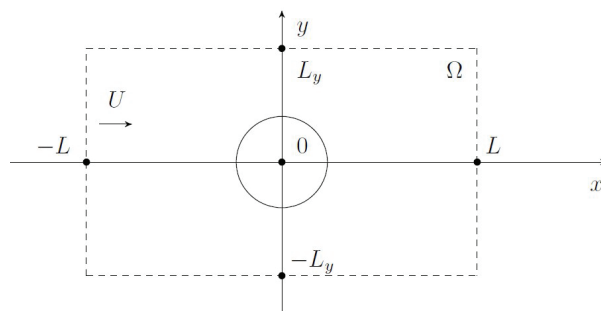


Рис. 1. Конфигурация потока

*Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт 14.740.11.0355).

Зададим условия на границе расчетной области Ω (см. рис. 1). На поверхности цилиндра возмущение скорости обращается в нуль. На входе в Ω возмущение также задано равным нулю. На выходе из расчетной области Ω , следуя [5], можно задать нулевой градиент скорости вдоль оси x . В этом случае возмущение может покидать расчетную область с ненулевой амплитудой. В работах [3, 6], наоборот, использовались нулевые граничные условия. При малых числах Рейнольдса возмущения локализованы возле поверхности цилиндра, так что примем

$$\psi = \psi_x = \psi_y = 0. \quad (4)$$

Решение (3), удовлетворяющее граничным условиям, будем искать в виде

$$\psi = \sigma(\Omega) \sum_{i,j} a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (5)$$

где T – многочлены Чебышева первого рода; a_{ij} – неизвестные коэффициенты; $\sigma(\Omega)$ – уравнение границы. Уравнение границы составим при помощи R -конъюнкции [7]

$$\sigma(\Omega) = \sigma_{sq} + \sigma_{cyl} - \sqrt{\sigma_{sq}^2 + \sigma_{cyl}^2}, \quad (6)$$

где σ_{sq} , σ_{cyl} – уравнения прямоугольника и круга соответственно.

Уравнение круга имеет вид $\sigma_{cyl} = 1 - x^2 - y^2$, уравнение для прямоугольника получим из уравнений полос $\sigma_x = L_x^2 - y^2$ и $\sigma_y = L_y^2 - x^2$ при помощи выражения (6). Аналитические преобразования производились в системе Maxima, выражения для $\sigma(\Omega)$ и особенно его производные громоздки, и мы их приводить не будем.

Определив множество точек коллокации Гаусса-Лобатто $x_i = L \cos(\pi i / n), i = 0, \dots, n$, $y_j = L_y \cos(\pi j / n), j = 0, \dots, k$, получим задачу на собственные значения

$$A\mathbf{v} = C\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (7)$$

где $\mathbf{v} = \{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{n(k-1)}, a_{nk}\}$.

Первоначально задача на собственные значения (7) решалась с использованием QZ алгоритма из библиотеки LAPACK, которая ранее использовалась нами в расчетах устойчивости плоского течения Пуазейля в магнитном поле (см.: [8, 9]) вплоть до чисел Рейнольдса порядка 10^7 . Однако вычислительные затраты этого метода в данном случае оказались очень велики, поэтому для расчетов были использованы методы Крылова [10, 11], реализованные библиотеками SLEPc и ARPACK. Численные эксперименты показали эффективность обратных итераций с нулевым сдвигом.

Как известно [4], формулы Озеена справедливы при числах Рейнольдса меньше единицы и только вблизи цилиндра. Невозможно построить решение,

удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности. Поэтому примем следующие значения параметров: $L_x = 2$, $L_y = 3$. Основываясь на результатах, приведенных в [12], можно предположить, что собственные функции при малых числах Рейнольдса ограничиваются данной областью. Количество точек коллокации по оси x составляло 80, по оси y — 70.

На рисунке 2 представлена зависимость коэффициента затухания X от числа Рейнольдса. При увеличении числа Рейнольдса X увеличивается и при $Re > 1$ стремится к нулю. Значения X меняются при изменении области расчетов, но сама зависимость $X(Re)$ остается монотонно возрастающей, а течение устойчивым.

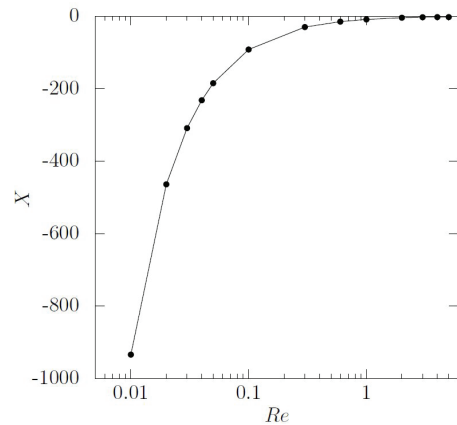


Рис. 2. Зависимости $X(Re)$

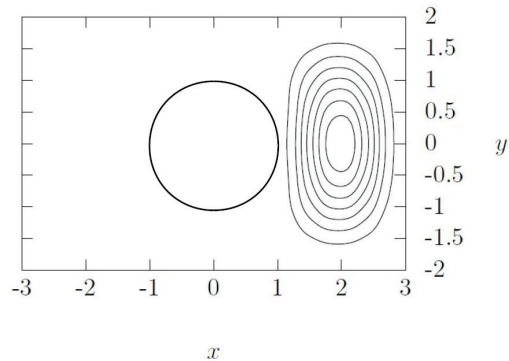


Рис. 3. Действительная часть собственной функции с $m = 0$ при $Re = 0.1$

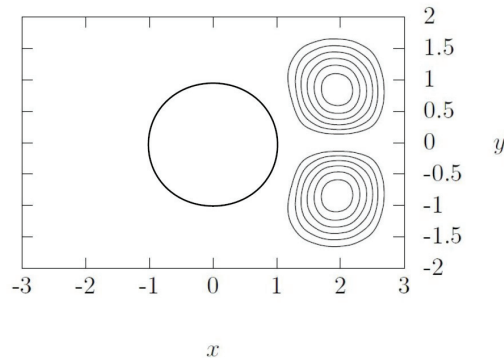


Рис. 4. Действительная часть собственной функции с $m = 2$ при $Re = 0.1$

На рисунках 3–4 представлена действительная часть собственных функций с $m = 0$ и $m = 2$. Так как течение Озеена симметрично относительно осей x и y , то и данные собственные функции попарно симметричны относительно оси цилиндра с собственными функциями $m = 1$ и $m = 3$ соответственно. На рисунке 3 линии тока имеют вид одиночного вихря за цилиндром, а на рисунке 4 — двух вихрей с противоположным вращением.

Из полученных результатов можно сделать вывод об устойчивости течения возле кругового цилиндра в области применимости формулы Озеена. Вид собственных функций соответствует структуре переходных режимов течения, которые хорошо изучены независимыми методами, численными и экспериментальными. Предлагаемый метод намного проще аналогов [3, 5, 6], более экономичен, имеет высокий порядок точности.

Библиографический список

1. Henningson D. S., Schmid P. J. Stability and transition in shear flows. — New York, 2001.
2. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск, 1977.
3. Theofilis V. Advances in global linear instability analysis of non-parallel and three-dimensional flows // Progress in Aerospace Sciences. — 2003. — No 39.
4. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. — М., 1973.
5. Barkley D. Confined three-dimensional stability analysis of the cylinder wake. 2004 [Электронный ресурс]. — URL: <http://arXiv.org/abs/physics/0405153v2>
6. Gonzalez L., Theofilis V., Sherwin S. J. High-order methods for the numerical solution of the BiGlobal linear stability eigenvalue problem in complex geometries // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2011. — Vol. 65. Issue 8.
7. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М., 2006.
8. Проскурин А. В., Сагалаков А. М. Новая ветвь неустойчивости магнитогиродинамического течения Пуазейля в продольном магнитном поле // Письма в журнал технической физики. — 2008. — Т. 34, № 5.
9. Проскурин А. В., Сагалаков А. М. Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля // Журнал технической физики. — 2012. — Т. 82, вып. 5.
10. Saad J. Numerical methods for large eigenvalue problems. — Manchester, 1992.
11. Krylov-Schur methods in SLEPC. SLEPC technical report STR-7/V. Hernandez, J. E. Roman, A. Tomas, V. Vidal. 2007 [Электронный ресурс]. — URL: www.grycap.upv.es/slepc/documentation/reports/str7.pdf.
12. Rogers S., Kwak D. An upwind-differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // NASA Technical Memorandum 101051. — 1988.