УДК 519.6

Д.А. Турсунов

Применение эрмитовых мультивейвлетов седьмой степени для решения дифференциальных уравнений четвертого порядка

D.A. Tursunov

The Solving of the Differential Equations of the Fourth Order by Using Hermite Multiwavelets of Seventh Degree

В данной статье мы используем эрмитовы мультивейвлеты седьмой степени для численного решения дифференциальных уравнений четвертого порядка. Вейвлеты построены в базисе эрмитовых сплайнов седьмой степени. Эти вейвлеты имеют суперкомпактный носитель [— 1,1] и принадлежат пространству C3. Два мультивейвлета симметричные, а остальные антисимметричные. Численные результаты демонстрируют эффективность построенных базисных вейвлетов.

Ключевые слова: вейвлет, мультивейвлет, эрмитов сплайн седьмой степени, дифференциальные уравнения, численное решение, краевая задача, базис Рисса.

In this paper, we use the wavelet bases of Hermite splines of seventh degree [7] for numerical solving the differential equations of forth order. Wavelets are constructed on the basis of Hermite splines of seventh degree. This wavelets are in C3 and supported on [— 1, 1], moreover, two wavelets are symmetric, and the other are anti-symmetric. The computational results demonstrate the advantage of the wavelet basis.

Key words: wavelet, multiwavelet, Hermite spline of seventh degree, differential equation, numerical solution, boundary problem, Riesz basis.

Термин «вейвлет» (*wavelet*), введенный впервые Морле (J. Morlet), образован из двух частей — корня *wave* (волна) и уменьшительного суффикса *-let*. Работа Морле послужила началом интенсивного исследования вейвлетов в последующее десятилетие рядом таких ученых, как Добеши (Dobechies), Мейер (Meyer), Малл (Mallat), Фарж (Farge), Чуи (Chui) и др. Таким образом, непосредственный перевод звучит как маленькая, или короткая, волна. Малость относится к условию, что эта функция имеет конечную длину (компактный носитель). Волна относится к условию, что функция колебательная (осциллирующая). К вейвлету можно применить две операции: сдвиг, т. е. перемещение области его локализации во времени; масштабирование (растяжение или сжатие), т. е. перемещение области его локализации по частоте. Использование этих операций, с учетом свойства локальности вейвлета в частотно-временной области, позволяет анализировать данные на различных масштабах и точно определять положение их характерных особенностей во времени.

Вейвлеты удачно применяются и в численном анализе. Один из ключевых их свойств заключается в том, что вейвлет-система почти диагонализирует очень широкий класс операторов. Это свойство важно в применениях к численному анализу решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Другое ключевое свойство вейвлетов — комбинация их пространственной и частотной локализации, которая используется в таких применениях по обработке сигналов, как сжатие изображения. Третье важное свойство вейвлетов — то, что эквивалентности норм для вейвлетов выполняются для более широких классов функциональных пространств, чем для системы Фурье. Это свойство важно во многих применениях вейвлетов для решения задачи математики [1].

В работе [2] кубические эрмитовы сплайн-вейвлеты применены для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с условием Дирихле. В работах [3, 4] с помощью вейвлетов Лежандра численно решены интегральное уравнение Абеля и дифференциальное уравнение типа Лане-Эмдета. В работе [5] кубические эрмитовы сплайн-вейвлеты применены для решения интегро-дифференциальных уравнений второго порядка, а в работе [6] эти же мультивейвлеты применены для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с условиями Неймана, $u'(0) = u'(1) = 0$ и $u'(0) = u(1) = 0$ ($u(0) = u'(1) = 0$).

В данной работе мы используем эрмитовы мультивейвлеты седьмой степени [7] для решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Эти мультивейвлеты ортогональны с производными второго порядка. Данное свойство удачно подойдет для приближенного решения дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков. Носителем построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 является отрезок [— 1,1], и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W. Кроме, того ψ_1, ψ_3 — симметричны, а ψ_2, ψ_4 — антисимметричны.

Все обозначения те же, что и в работах [2, 5–7].

Напомним, что φ1, φ 2, φ 3 и φ 4 — базисные эрмитовы сплайны седьмой степени (отцовские вейвлеты):

$$\varphi_\alpha(t)=\begin{cases}\omega_\alpha(t) & \text{при} \quad -1\le t\le 0,\\ \xi_\alpha(t) & \text{при} \quad 0\le t\le 1,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

где $\omega_\alpha(t)=(1-t)^4\sum_{\beta=0}^{3-\alpha}\frac{(3+\beta)!}{\alpha!\beta!3!}t^{\alpha+\beta}$,

$\xi_\alpha(t)=(-1)^\alpha\omega_\alpha(-t),\quad \alpha=0,1,2,3.$

А материнские вейвлеты имеют следующий вид [7]:
$\psi_1(t)=64(\varphi_1(2t+1)+\varphi_1(2t-1))+32\varphi_1(2t)+\ldots$
$\ldots+1155(\varphi_2(2t+1)-\varphi_2(2t-1))-3360(\varphi_3(2t+1)+\varphi_3(2t-1))-\ldots$
$\ldots-195090(\varphi_4(2t+1)-\varphi_4(2t-1))$;
$\psi_2(t)=-61(\varphi_1(2t+1)-\varphi_1(2t-1))-917(\varphi_2(2t+1)+\varphi_2(2t-1))+\ldots$
$\ldots+224\varphi_2(2t)+3570(\varphi_3(2t+1)-\varphi_3(2t-1))+\ldots$
$\ldots+166110(\varphi_4(2t+1)+\varphi_4(2t-1))$;
$\psi_3(t)=15(\varphi_1(2t+1)+\varphi_1(2t-1))+196(\varphi_2(2t+1)-\varphi_2(2t-1))-\ldots$
$\ldots-966(\varphi_3(2t+1)+\varphi_3(2t-1))+672\varphi_3(2t)-38220(\varphi_4(2t+1)-\ldots$
$\ldots-\varphi_4(2t-1))$;
$\psi_4(t)=-3(\varphi_1(2t+1)-\varphi_1(2t-1))-35(\varphi_2(2t+1)+\varphi_2(2t-1))+\ldots$
$\ldots+210(\varphi_3(2t+1)-\varphi_3(2t-1))+7350(\varphi_4(2t+1)+\varphi_4(2t-1))+\ldots$
$\ldots+3360\varphi_4(2t)$.

Для начала с помощью этих сплайн-вейвлетов мы построим вейвлет-базис в пространстве $Í_0^2(0,1)$, где $Í_0^2(0,1)$ — замыкание множества

$\{u\in C[0,1]\cap C1[0,1]\cap C2[0,1]: u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0\}$.

Множество

$$\Phi n:=\Phi^{1,n}\cup\Phi^{2,n}=\cup\Phi^{3,n}\cup\Phi^{4,n}, \qquad (1)$$

где $\Phi^{1,n}=\{\varphi_1(2^n\text{–}j): j=1,...,2^n-1\}$, $\Phi^{2,n}=\{\varphi_2(2^n\text{–}j)|_{(0,1)}: j=1,\ldots,2^n-1\}$, $\Phi^{3,n}=\{\varphi_3(2^n\text{–}j)|_{(0,1)}: j=0,\ldots,2^n\}$, $\Phi^{4,n}=\{\varphi_4(2^n\text{—}j)|_{(0,1)}: j=0,\ldots,2^n\}$, является базисом для V^n, где V^n — пространство сплайнов седьмой степени, удовлетворяющих условиям:

1) $v\in C[0,1]\cap C'[0,1]\cap C''[0,1]\cap C'''[0,1]$;

2) $v(0)=v(1)=v'(0)=v'(1)=0$;

3) $v\Big|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)}\in\Pi_7\Big|_{(j/2^n,(j+1)/2^n)}$, $j=\overline{0,2^n-1}$, Π_7 — множество полиномов седьмой степени, $n\in N$; 4) $V_1\subset V_2\subset\ldots\subset H_0^2(0,1)$; 5) множество $\bigcup_{n=1}^\infty V_n$ является плотным в $H_0^2(0,1)$.

Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1,\ldots, v_{2^{n+2}}\}$, размерность этого пространства dim $(V_n)=2^{n+2}$. Пусть Ψ_n множества вейвлетов:

$$\psi_n:=\psi^{1,n}\cup\psi^{2,n}=\cup\psi^{3,n}\cup\psi^{4,n}, \qquad (2)$$

$\psi^{1,n}=\{\psi_1(2^n\text{–}j)|_{(0,1)}: j=1,\ldots,2^n-1\}$, $\psi^{2,n}=\{\psi_2(2^n\text{–}j)|_{(0,1)}:\ldots$
$\ldots: j=1,...,2^n-1\}$,
$\psi^{3,n}=\{\psi_3(2^n\text{–}j)|_{(0,1)}: j=0,...,2^n\}$, $\psi^{4,n}=\{\psi_4(2^n\text{–}j)|_{(0,1)}: j=0,...,2^n\}$.

W_n — линейное пространство, натянутое на ψ_n, очевидно, что dim $(W_n)=2^{n+2}$. Очевидно, что ψ_n является базисом в W_n. Элементы Ψ_n обозначим через $\{w_{2^{n+2}+1},...,w_{2^{n+3}}\}$, $n\in N$.

Лемма. Справедливо равенство:

$$\int_0^1 w''(x)v''(x)dx=0,\ \forall w\in\Psi_n,\ \forall v\in\Phi_n . \qquad (3)$$

Доказательство. Предположим, что
$w=\psi_i(2^n\cdot -j),\ i=1,2,3,4;\ j=\overline{1,2^n-1}$,

$v=\varphi_s(2^n\cdot -k),\ s=1,2,3,4;\ k=\overline{1,2^n-1}$.

Тогда $\operatorname{supp}\psi_i''(2^n\cdot -j)=[0,1]$, $\operatorname{supp}\varphi_s''(2^n\cdot -k)=[0,1]$. Если вспомнить, что наши сплайн-вейвлеты ортогональны с производными второго порядка на всей оси, т. е. $\int_R\psi_i''(2^nt-j)\varphi_s''(2^nt-j)dt=0$, то из этого равенства следует равенство:

$$\int_0^1\psi_i''(2^nt-j)\varphi_s''(2^nt-k)dt=0 .$$

Таким образом, для того чтобы полностью завершить доказательство (3), остается рассмотреть случай $w=\psi_i(2^n\cdot -j)\big|_{(0,1)},\ i=1,3;\ j=\{0,2^n\}$ и $v=\varphi_s(2^n\cdot -k)\big|_{(0,1)},\ s=1,3;\ k=\{0,2^n\}$. Если $j=0$ и $k=2^n$, или $j=2^n$ и $k=0$, то мы получим $v''(x)w''(x)=0$ при $x\in(0,1)$. Следовательно, (3) остается в силе и в этом случае. Допустим $j=k=0$. Так как ψ_1, ψ_3, φ_1, φ_3 — симметрические, поэтому вторые производные этих функций тоже являются симметрическими функциями. Следовательно, произведение $\psi''_i\varphi''_s$ $i, s=1,3$ симметрично. Из этого следует равенство $\int_{-1}^0\psi_i''(x)\varphi_s''(x)dx=\int_0^1\psi_i''(x)\varphi_s''(x)dx$. Но, по определению вейвлетов, отцовские и материнские вейвлеты ортогональны с производными второго порядка, т. е. $\int_{-1}^1\psi_i''(x)\varphi_s''(x)dx=0$. Поэтому $\int_0^1\psi_i''(x)\varphi_s''(x)dx=0$.

Следовательно,

$$\int_0^1\psi_i''(2^nx)\varphi_s''(2^nx)dx=2^{-n}\int_0^{2^n}\psi_i''(2^nx)\varphi_s''(2^nx)=0,\quad i,s=1,3.$$

$$\int_0^1\psi_i''(2^nx-2^n)\varphi_s''(2^nx-2^n)dx=2^{-n}\int_{-2^n}^0\psi_i''(x)\varphi_s''(x)dx=0\ldots\quad i\ s=1\ 3$$

$\ldots=0,\quad i,s=1,3.$

Доказательство леммы завершено.

Из этой леммы следует, что $V_n\cap W_n=\{0\}$. Кроме этого, $V_{n+1}\supseteq V_n+W_n$ и
$\dim(V_n+W_n)=\dim(V_n)+\dim(W_n)=2^{n+2}+2^{n+2}=2^{n+3}=\dim(V_{n+1})$.

Отсюда видим, что $V_{n+1}=V_n\oplus W_n$. Следовательно, мы получим разложение пространства функций с суммируемой второй производной $H_0^2(0,1)$:

$$H_0^2(0,1)=V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots .$$

Предположим, что $v\in V_1,\ w_n\in W_n,\ n\in N$. Так как $\forall n\in N<v'',w_n''>=0$. Поэтому

$$\left\|v''+\sum_{n=1}^{\infty}w''_n\right\|^2_{L_2(0,1)}=\left\|v''\right\|^2_{L_2(0,1)}+\left\|\sum_{n=1}^{\infty}w''_n\right\|^2_{L_2(0,1)}. \qquad (4)$$

Нормируем базисные функции $\{v_1,\ldots,v_8\}$ и $\{w_{2^{n+2}+1},\ldots,w_{2^{n+3}}\}$, $n\in N$ в $L_2(0,1)$:

$$\phi_{1,1}(t)=\frac{1}{\sqrt{407,373}}\phi_1(2t-1),\ \phi_{1,2}(t)=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{\sqrt{124,675}}\phi_2(2t-1),\phi_{1,3}(t)=\frac{1}{\sqrt{1,732}}\phi_3(2t),$$

$$\phi_{1,4}(t)=\frac{1}{\sqrt{3,463}}\phi_3(2t-1),\phi_{1,5}(t)=\frac{1}{\sqrt{1,732}}\phi_3(2t-2),\ldots$$

$$\ldots,\phi_{1,6}(t)=\frac{1}{\sqrt{0,005}}\phi_4(2t),$$

$$\phi_{1,7}(t)=\frac{1}{\sqrt{0,009}}\phi_4(2t-1),\ \phi_{1,8}(t)=\frac{1}{\sqrt{0,005}}\phi_4(2t-2),$$

$$\psi_{n,j}(t)=\frac{2^{-3n/2+1}}{1528.37}\psi_1\left(2^n t-\frac{j}{2}\right), j=2,4,\ldots,2^{n+1}-2;$$

$$\psi_{n,j}(t)=\frac{2^{-3n/2+1}}{14.447}\psi_3\left(2^n t-\frac{j-1}{2}\right), j=3,5,\ldots,2^{n+1}-1;$$

$$\psi_{n,j+4}(t)=\frac{2^{-3n/2+1}}{188.83}\psi_2\left(2^n t-\frac{j}{2}\right), j=2,4,\ldots,2^{n+1}-2;$$

$$\psi_{n,j+4}(t)=\frac{2^{-3n/2+1}}{0.5436}\psi_4\left(2^n t-\frac{j-1}{2}\right), j=3,5,\ldots,2^{n+1}-1;$$

$$\psi_{n,1}(t)=\frac{2^{-3n/2}}{5.108}\psi_3(2^n t),\ \psi_{n,2^{n+1}}(t)=\frac{2^{-3n/2}}{5.108}\psi_3(2^n t-2^n);$$

$$\psi_{n,5}(t)=\frac{2^{-3n/2}}{0.1922}\psi_4(2^n t),\ \psi_{n,2^{n+2}}(t)=\frac{2^{-3n/2}}{0.1922}\psi_4(2^n t-2^n).$$

Отсюда

$$\left\|\phi''_{1,j}(t)\right\|_{L_2(0,1)}=1,\ j=\overline{1,8};\ \left\|\psi''_{n,j}(t)\right\|_{L_2(0,1)}=1,\ j=\overline{1,2^{n+2}}, n\in N\cdot$$

Теорема. Последовательность $\{\psi''_{n,j}\}$, $n\in N, j=\overline{1,2^{n+2}}$ является последовательностью Рисса, т.е. существуют постоянные C_1 и C_2 при которых имеет место неравенство:

$$C_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{n+2}}\left|c_{n,j}\right|^2\right)^{1/2}\le\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{n+2}}c_{n,j}\psi''_{n,j}(t)\right\|_{L_2(0,1)}\le C_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{n+2}}\left|c_{n,j}\right|^2\right)^{1/2},$$

для любой последовательности $\{c_{n,j}\}$, $n\in N, j=\overline{1,2^{n+2}}$.

Доказательство. Из (4) имеем:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{n+2}}c_{n,j}\psi''_{n,j}(t)\right\|^2_{L_2(0,1)}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{j=1}^{2^{n+2}}c_{n,j}\psi''_{n,j}(t)\right\|^2_{L_2(0,1)}.$$

$\forall k\in Z$, в интервале $(k,\ k+1)$ сдвиги $\psi''_1(t),\psi''_2(t),\psi''_3(t),\psi''_4(t)$ линейно независимы.

Действительно, при $t\in[0,\ 1/2]$ мы имеем:

$\psi_1''(t)=4543560t^5-4672500t^4+1466640t^3-134820t^2$;

$\psi_2''(t)=640200t^5-676080t^4+220680t^3-21600t^2$;

$\psi_3''(t)=59088t^5-64900t^4+22560t^3-2480t^2+4$;

$\psi_4''(t)=2872t^5-3360t^4+1312t^3-192t^2+8t$;

$\psi_1''(t-1)=-2608200t^5+2454900t^4-687120t^3+54180t^2$;

$\psi_2''(t-1)=302280t^5-282360t^4+78360t^3-6120t^2$;

$\psi_3''(t-1)=-2224t^5+20620t^4-5680t^3+440t^2$;

$\psi_4''(t-1)=824t^5-760t^4+208t^3-16t^2$;

а при $t\in[1/2,\ 1]$ имеем:

$\psi_1''(t)=2608200t^5-10586100t^4+16949520t^3-$
$-13359780t^2+5174400t-786240$;

$\psi_2''(t)=302280t^5-1229040t^4+1971720t^3-1557600t^2+$
$+604800t-92160$;

$\psi_3''(t)=22224t^5-90500t^4+145440t^3-115120t^2+$
$+44800t-6844$;

$\psi_4''(t)=824t^5-3360t^4+5408t^3-4288t^2+1672t-256$;

$\psi_1''(t-1)=-4543560t^5+17507700t^4-27674640t^3+$
$+21235620t^2-8010240t+1182720$;

$\psi_2''(t-1)=640200t^5-2256120t^4+3657240t^3-2776680t^2+$
$+1044480t-153600$;

$\psi_3''(t-1)=-59088t^5+176780t^4-303920t^3+226360t^2-$
$-85120t+12480$;

$\psi_4''(t-1)=2872t^5-6520t^4+12752t^3-9104t^2+3456t-504$.

Следовательно, в интервале (0, 1) сдвиги вейвлетов $\psi''_1(t),\psi''_2(t),\psi''_3(t),\psi''_4(t)$ линейно независимы. Поэтому существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, независящие от n, при которых имеет место неравенство:

$$C_1^2\sum_{j=1}^{2^{n+2}}\left|c_{n,j}\right|^2\le\left\|\sum_{j=1}^{2^{n+2}}c_{n,j}\psi''_{n,j}(t)\right\|^2_{L_2(0,1)}\le C_2^2\left(\sum_{j=1}^{2^{n+2}}\left|c_{n,j}\right|^2\right)\cdot$$

Теорема доказана.

Так как $H_0^2(0,1)=V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots$, то $H_0^2(0,1)$ является натянутым на $\phi_{1,j}(t),\ j=\overline{1,8};\psi_{n,j}(t),\ j=\overline{1,2^{n+2}}, n\in N\cdot$

Введем новую функцию:

$$g_j(t)=\phi_{1,j}(t),\ j=\overline{1,8};\ g_{2^{n+2}+j}=\psi_{n,j},\ n\in N,\ j=\overline{1,2^{n+2}}.$$

Из теоремы следует, что последовательность $\{g''_k\}, k\in N$ является последовательностью Рисса в $L_2(0,1)$, т.е. существуют две такие положительные постоянные C_1 и C_2, при которых имеет место неравенство:

$$C_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2\right)^{1/2}\le\left\|\sum_{n=1}^{\infty}c_n g''_n(t)\right\|_{L_2(0,1)}\le C_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2\right)^{1/2},$$

для любой последовательности $\{c_{n,j}\}$, $n\in N, j=\overline{1,2^{n+2}}$.

Применение. Рассмотрим теперь применение построенного базиса к решению обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$Lu(t)=u^{\mathrm{IV}}(t)+a_3(t)u'''(t)+a_2(t)u''(t)+$$
$$+a_1(t)u'(t)+a_0(t)u(t)=f(t),\quad 0<t<1\ , \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0 \qquad (6)$$

Здесь $f(t)$, $a_i(t)$ (i=0, 1, 2, 3) — заданные вещественные функции, и мы хотим найти решение $u(t)$.

Отметим, что L может быть дифференциальным оператором с переменными коэффициентами, потому что коэффициенты $a_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) не обязательно константы. Мы предполагаем, что $f(t)$, $a_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) — непрерывные функции в интервале (0, 1), а также оператор — равномерно эллиптический. Согласно результатам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, существует единственная функция u, являющаяся решением задачи (5) — (6).

Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму:

$$a(u,v)=\int_0^1\left(u''v''+a_3u'''v+a_2u''v+a_1u'v+a_0uv\right)dx,$$

$u,\ v\in H_0^2(0,1)$.

Тогда вариационная запись (5) — (6) имеет следующий вид:

$$a(u,v)=\langle f,v\rangle,\ \forall v\in H_0^2(0,1).$$

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n \in V_n$, при котором

$$a(u_n, v) = \langle f,v\rangle\ \forall v\in V_n. \qquad (10)$$

Задача (10) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G = \{g_1,\ldots, g_{2^{n+2}}\}$ как базис для V_n. С этим базисом для V_n задача (10) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+2}} a(g_j,g_k)c_k=\langle f,g_j\rangle,\ j=1,\ldots,2^{n+2}.$$

Число обусловленности матрицы A_n равномерно ограничено,

$$A_n = (a(g_j,g_k))_{1\le j,k\le 2^{n+2}}.$$

Рассмотрим примеры.

1) $y^{(IV)}(t) = -5000(t-1)^2\cos(10t)+600\cos(10t)-$ $-4000(t-1)\sin(10t)$,

с условием $y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0$.

точное решение $y(t)=(t-1)^2\sin^2(5t)$.

$\|u(t)-u_8(t)\|_2=2.861\times10^{-4}$, $\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=1.306\times10^{-6}$, $\|u(t)-u_{32}(t)\|_2=1.291\times10^{-9}$.

2) $y^{(IV)}(t)=8e^{2t}-e^{t+1}-3808\cos(10t)e^{2t}-3840\sin(10t)e^{2t}+$ $+9401\cos(10t)e^{t+1}+3960\sin(10t)e^{t+1}-5000\cos(10t)e^2$,

с условием $y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$.

точное решение $y(t) = (e^t - e)^2\sin^2(5t)$.

$\|u(t)-u_8(t)\|_2=1.607\times10^{-3}$, $\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=2.700\times10^{-6}$, $\|u(t)-u_{32}(t)\|_2=1.021\times10^{-10}$.

Вычисления проведены в системе Mathcad15.

Библиографический список

1. Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / пер. с анг. — М., 2010.

2. Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. — 2006. — V. 25.

3. Sohrab ali Yousefi. Numerical solution of Abel's integral equation by using Legendre wavelets // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — V. 175.

4. Sohrab ali Yousefi. Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane — Emden type // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — V. 181.

5. Турсунов Д. А. Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений // Известия АлтГУ. — 2011. — №1.

6. Турсунов Д. А. Применение кубических мультвейвлетов к численному решению дифференциальных уравнений второго порядка с условием Неймана // Вестник ОшГУ. — 2012. — №3.

7. Турсунов Д. А., Шумилов Б. М., Кудуев А. Ж., Турсунов Э. А. Мультивейвлеты седьмой степени, ортогональные с производными второго порядка // Вестник ОшГУ. — 2012. — №3.