УДК 514.75

М.А. Чешкова

Построение листа Мебиуса

M.A. Cheshkova

The Construction of the Moebius Strip

В работе устанавливается формула для задания листа Мебиуса с помощью 4π-периодической вектор-функции. Строятся примеры таких поверхностей, используя математический пакет.

Ключевые слова: лист Мебиуса, плоский лист Мебиуса, 4π-периодическая функция.

We establish a formula for the setting the Mobius strip with a 4π-periodic vector-function The examples of such surfaces are constructed using the mathematical package.

Key words: Mobius strip, flat strip of Mobius, 4π-periodic function.

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3–5] строятся пересекающиеся листы Мебиуса, указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как
$$\rho(v) = \rho(v + 4\pi), \tag{1}$$
то функция
$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v)), \tag{2}$$
где
$$\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi)), \tag{3}$$
есть 2π-периодическая, не равная нулю, а вектор-функция
$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v)) \tag{4}$$
есть 2π-антипериодическая, не равная нулю.

Рассмотрим линейчатую поверхность [6, с. 102] M:
$$r(u, v) = s(v) + ul(v). \tag{5}$$

Когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Рассмотрим вектор нормали $n = [s'(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Если $n \neq 0$, то $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M в этом случае есть односторонняя.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Если гладкая замкнутая неплоская кривая без самопересечения задается 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической, то вектор-функция $r(u, v) = s(v) + ul(v)$, где $l(v) = (\rho(v) - \rho_1(v))1/2$, $s(v) = (\rho(v) + \rho_1(v))1/2$, $\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi)$, определяет лист Мебиуса, для которого $s = s(v)$ – средняя линия, а $\rho = \rho(v) = r(1, v)$ – край.

Приведем несколько примеров построения листа Мебиуса.

Пример 1. Классический лист Мебиуса. Рассмотрим вектор-функцию в E^3
$$\rho(v) = ((a + bcos(\frac{kv}{2})cos(v),$$
$$(a + bcos(\frac{kv}{2}))sin(v), bsin(\frac{kv}{2})). \tag{6}$$

Если k – нечетное число, то вектор-функции: $\rho(v)$–4π-периодическая, $s = s(v)$–2π-периодическая, $l = l(v)$–2π-антипериодическая.

Кривая (6)расположена на торе [6, с. 101]
$$r(u, v) = ((a + bcos(u)cos(v),$$
$$(a + bcos(u))sin(v), bsin(u)). \tag{7}$$

Уравнение
$$r(u, v) = ((a + ucos(\frac{kv}{2})cos(v),$$
$$(a + ucos(\frac{kv}{2}))sin(v), usin(\frac{kv}{2})) \tag{8}$$
есть уравнение листа Мебиуса.

Если $k = 1$, то это уравнение классического листа Мебиуса, полученное Машке ([1]), если нечетное $k \neq 1$, то это уравнение перекрученного k раз листа Мебиуса.

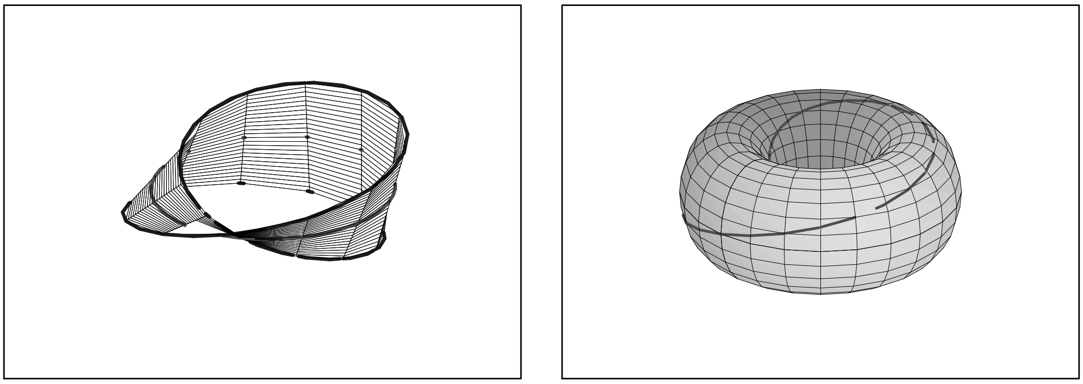

Рис. 1. Классический лист Мебиуса и край на торе

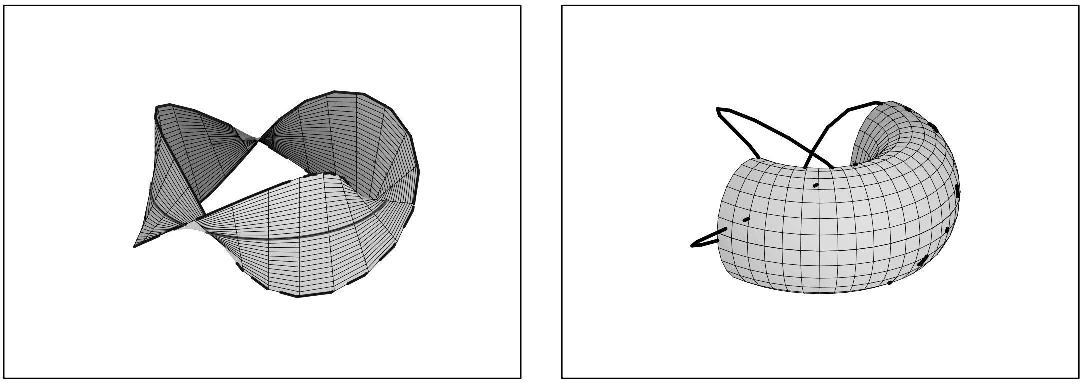

Рис. 2. Перекрученный трижды лист Мебиуса и край на торе

Имеем

$$l = (cos(\frac{kv}{2})cos(v), cos(\frac{kv}{2})sin(v), sin(\frac{kv}{2})). \quad (9)$$

$$s = (acos(v), asin(v), 0). \quad (10)$$

Замечаем, что средняя линия есть окружность, а из равенства $(s'(v), l(v)) = 0$ следует, что образующие прямые пересекают среднюю линию ортогонально.

Используя математический пакет, построим эти поверхности (рис. 1, 2).

Пример 2. Лист Мебиуса-цилиндроид. Пусть кривая $\rho = \rho(v)$ определяется в виде

$$\rho = (cos(v) + sin(\frac{v}{2}), cos(\frac{v}{2}), sin(v)). \quad (11)$$

Тогда

$$\rho_1 = \rho(v + 2\pi) = (cos(v) - sin(\frac{v}{2}), \quad (12)$$

$$-cos(\frac{v}{2}), sin(v)),$$

$$l = (sin(\frac{v}{2}), cos(\frac{v}{2})), 0). \quad (13)$$

$$s = ((cos(v), 0, sin(v)). \quad (14)$$

Уравнение поверхности примет вид

$$r(u, v) = (cos(v) + usin(\frac{v}{2}), ucos(\frac{v}{2}), sin(v)). \quad (15)$$

Средняя линия есть окружность, а из равенства $[s'(v), l(v))] \neq 0$ следует, что поверхность односторонняя. А так как направляющий вектор l параллелен плоскости $z = 0$, то линейчатая поверхность (15) есть цилиндроид [7, с. 91]. Цилиндроид может быть задан двумя направляющими кривыми (лежащими на нем) и направляющей плоскостью (которой параллельны образующие цилиндроида)(рис. 3).

Пример 3. Лист Мебиуса E^4. Рассмотрим кривую в E^4

$$\rho(v) = ((a + bcos(\frac{kv}{2})cos(v), (a + bcos(\frac{kv}{2}))sin(v),$$

$$bsin(\frac{kv}{2})cos(v), bsin(\frac{kv}{2})sin(v)). \quad (16)$$

Если k – нечетое число, то вектор-функции: $\rho(v)$–4π-периодическая, $s = s(v)$–2π-периодическая, $l = l(v)$–2π-антипериодическая.

Уравнение

$$r(u, v) = ((a + ucos(\frac{kv}{2})cos(v),$$

$$(a + ucos(\frac{kv}{2}))sin(v),$$

$$usin(\frac{kv}{2})cos(v), usin(\frac{kv}{2})sin(v)). \quad (17)$$

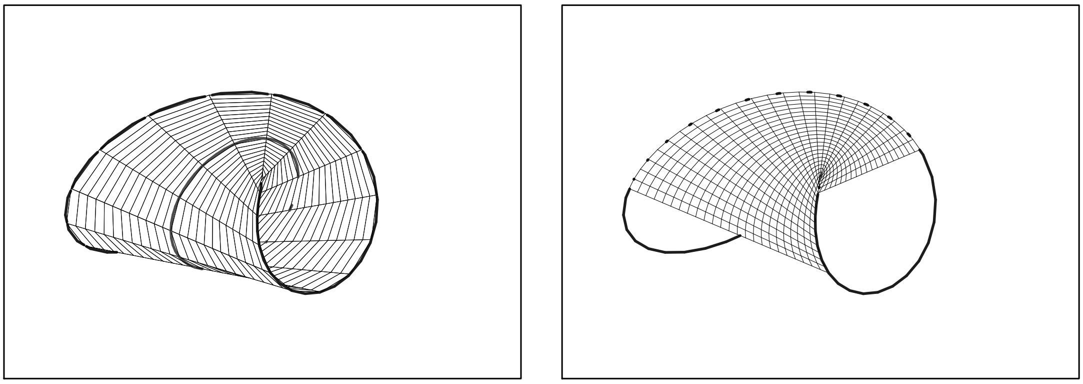

Рис. 3. Лист Мебиуса-цилиндроид

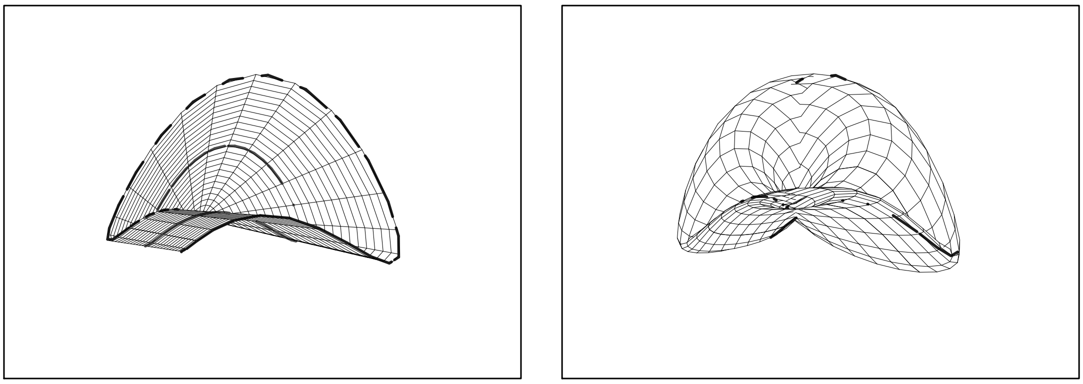

Рис. 4. Плоский лист Мебиуса, средняя линия, край и поверхность, содержащая край

есть уравнение листа Мебиуса в E^4. Имеем

$$l = (cos(\frac{kv}{2})cos(v), cos(\frac{kv}{2})sin(v),$$

$$sin(\frac{kv}{2})cos(v), sin(\frac{kv}{2})sin(v)). \quad (18)$$

$$s = (acos(v), asin(v), 0, 0). \quad (19)$$

Замечаем, что средняя линия есть окружность, а из равенства $(s'(v), l(v)) = 0$ следует, что образующие прямые пересекают среднюю линию ортогонально.

Пример 4. Плоский лист Мебиуса. В работе [2] И.Х. Сабитовым рассмоторен пример плоского листа Мебиуса (рис. 4). Для этой поверхности

$$\rho(v) = (cos(v) + \frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}) - sin(\frac{v}{2}),$$

$$sin(v) + cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}),$$

$$sin(v)cos(v) + \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2}) \quad (20)$$

$$l = (\frac{1}{3}sin(\frac{3v}{2}) - sin(\frac{v}{2}), cos(\frac{v}{2}) - \frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}),$$

$$\frac{1}{3}cos(\frac{3v}{2}) - \frac{1}{5}cos(\frac{5v}{2})), \quad (21)$$

$$s = (cos(v), sin(v), cos(v)siv(v)). \quad (22)$$

Рассмотрим поверхность (рис. 4)

$$r(u, v) = (cos(v) - sin(u) + \frac{1}{3}sin(v + u),$$

$$sin(v) + cos(u) - \frac{1}{3}cos(v + u),$$

$$sin(v)cos(v) + \frac{1}{3}(cos(v + u) - \frac{1}{5}cos(2v + u)). \quad (23)$$

Край (20) листа Мебиуса расположен на поверхности (23), где $u = \frac{v}{2}$.

Если положим $u = \frac{kv}{2}$, где $k \neq 1$ нечетное число, то получим уравнение края листа Мебиуса, для которого средняя линия задается в виде $s = (cos(v), sin(v), cos(v)siv(v))$. Однако этот лист Мебиуса уже не является плоским.

Библиографический список

1. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1900. Vol. 1/1.

2. Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в эвклидовы пространства // Известия РАН. – 2007. – Т. 71, №5.

3. Чешкова М.А. О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. – 2006. – Вып. 6.

4. Чешкова М.А. Самопересечение листа Мебиуса // Математическое образование в регионах России: тр. междунар. науч.-практ. конф. – Барнаул, 2007.

5. Чешкова М.А. О бутылке Клейна // Известия АлтГУ. – 2012.– №1/1.

6. Норден А.П. Теория поверхностей. – М., 1956.

7. Щербаков Р.Н., Лучинин А.А. Краткий курс дифференциальной геометрии. – Томск, 1974.