УДК 532.546 + 536.425

М.А. Токарева

Двумерная задача фильтрации в тонком пороупругом слое*

M.A. Tokareva

Two-Dimensional Problem of Filtration in Thin Poroelastic Layer

Рассматривается математическая модель фильтрации в тонком пороупругом слое. Для описания процесса используются законы сохранения масс, закон Дарси, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы. Рассмотрены различные режимы движения в зависимости от поведения возникающих в задаче малых параметров.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, пороупругий слой, вязкоупругость.

We consider mathematical model of filtration in thin poroelastic layer. For describing this process we use the laws of conservation of mass, Darcy's law, the rheological Maxwell law and the equation of conservation of momentum for system. We consider the different regimes of motion, depending of the behavior of small parameters arising in problem.

Key words: two-phase filtration, poroelastic layer, viscoelasticity.

Введение. В основу математической модели фильтрации в пороупругом слое положены уравнения сохранения массы для каждой из фаз без учета фазовых переходов, закон Дарси, учитывающий движение твердого скелета, реологический закон типа Максвелла и уравнение сохранения импульса системы [1–3]. Вопросы разрешимости одномерных задач для этой модели исследовались в работах [4–5].

Уравнения модели Рассматривается следующая система уравнений составного типа

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + div((1-\phi)\vec{v_s}) = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} + div(\phi\vec{v_f}) = 0, \tag{1}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{K\phi^n}{\mu}(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \tag{2}$$

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\phi^m}{\nu}p_e - \phi^b\beta_\phi\frac{dp_e}{dt}, \tag{3}$$

$$\rho\vec{g} + div\left((1-\phi)\nu\left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v}_s}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0, \qquad p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \tag{4}$$

$$p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s, \tag{5}$$

где $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_s, \vec{v}_f$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз; ϕ – пористость; $\vec{g} = (0, -g)$– плотность массовых сил; k – проницаемость, μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; ν, β_ϕ, b, m – параметры твердой фазы; p_{tot} – общее давление (заданная функция). Задача записана в эйлеровых координатах (t, x, z). Истинные плотности ρ_s, ρ_f принимаются постоянными. Искомыми являются величины ϕ, v_s, v_f, p_f, p_s.

Проведем обезразмеривание уравнений (1)–(5). Пусть $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$ – безразмерные переменные, определенные равенствами

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{t} = \varepsilon^k\tau_0 t, \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1,$$

где $[L] = [H] =$ [м], $[\tau_0] =$ [1/c]; k – произвольное вещественное число.

Положим:

$$p_f(t,x,z) = \alpha\bar{p}(\bar{t},\bar{x},\bar{z}) = \alpha\bar{p}(\varepsilon^k\tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H}),$$

$$v_s^i(t,x,z) = \beta^i\bar{v}_s^i(\bar{t},\bar{x},\bar{z}) = \beta^i\bar{v}_s^i(\varepsilon^k\tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H}), i = 1, 2,$$

$$v_f^i(t,x,z) = \beta^i\bar{v}_f^i(\bar{t},\bar{x},\bar{z}) = \beta^i\bar{v}_f^i(\varepsilon^k\tau_0 t, \frac{x}{L}, \frac{z}{H}), i = 1, 2,$$

$$p_{tot}(t,x,z) = \alpha\bar{p}_{tot}(\bar{t},\bar{x},\bar{z}),$$

$$\rho_f g = \frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_f\bar{g}, \quad \rho_s g = \frac{\alpha}{H}\bar{\rho}_s\bar{g}.$$

Здесь $[\beta^i]$ =[м/с], $[\alpha]$ =[Па], а все функции с верхней чертой являются безразмерными.

Система (1)–(5) в скалярной форме преобразуется к виду

$$\varepsilon^k\tau_0\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar{t}} + \frac{\beta^1}{L}\frac{\partial\bar{v}_s^1(1-\phi)}{\partial\bar{x}} + \frac{\beta^2}{H}\frac{\partial\bar{v}_s^2(1-\phi)}{\partial\bar{z}} = 0, \qquad \varepsilon^k\tau_0\frac{\partial\phi}{\partial\bar{t}} + \frac{\beta^1}{L}\frac{\partial\bar{v}_f^1(1-\phi)}{\partial\bar{x}} + \frac{\beta^2}{H}\frac{\partial\bar{v}_f^2(1-\phi)}{\partial\bar{z}} = 0, \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации №1.3820.2011.

$$\phi(\beta^1\bar v_f^1-\beta^1\bar v_s^1)=-\frac{K\phi^n}{\mu}\frac{\alpha}{L}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x},$$
$$\phi(\beta^2\bar v_f^2-\beta^2\bar v_s^2)=-\frac{K\phi^n}{\mu}\left(\frac{\alpha}{H}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar z}-\frac{\alpha}{H}\bar\rho_f\bar g\right),\tag{7}$$

$$\frac{1}{1-\phi}\left(\varepsilon^k\tau_0\frac{\partial\phi}{\partial\bar t}+\beta^1\bar v_s^1\frac{1}{L}\frac{\partial\phi}{\partial\bar x}+\beta^2\bar v_s^2\frac{1}{H}\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\right)=$$
$$=-\frac{\phi^m}{\nu}\alpha(\bar p_{tot}-\bar p)-\phi^b\beta_\phi(\varepsilon^k\tau_o\alpha\frac{\partial(\bar p_{tot}-\bar p)}{\partial\bar t}+$$
$$+\beta^1\bar v_s^1\frac{\alpha}{L}\frac{\partial(\bar p_{tot}-\bar p)}{\partial\bar x}+\beta^2\bar v_s^2\frac{\alpha}{H}\frac{\partial(\bar p_{tot}-\bar p)}{\partial\bar z}),\tag{8}$$

$$2\frac{\beta^1}{L^2}\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar x}\right)+\frac{\beta^1}{H^2}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)+$$
$$+\frac{\beta^2}{HL}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar x}\right)=\frac{\alpha}{L\nu}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\bar x},\tag{9}$$

$$-\frac{\alpha}{H\nu}\rho g+\frac{\beta^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar x}\right)+2\frac{\beta^2}{H^2}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar z}\right)+$$
$$+\frac{\beta^1}{HL}\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=\frac{\alpha}{H\nu}\frac{\partial\bar p_{tot}}{\partial\bar z}.\tag{10}$$

Для получения безразмерной формы уравнений следует положить

$$\beta^1=\varepsilon^k\tau_0L,\quad \beta^2=\varepsilon^k\tau_0H.$$

После этого системе (6)–(10) можно придать вид

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar t}+div((1-\phi)\bar v_s)=0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar t}+div(\phi\bar v_f)=0,\tag{11}$$

$$\frac{\varepsilon^k\tau_0\mu L^2}{\alpha K}\phi(\bar v_f^1-\bar v_s^1)=-\phi^n\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x},$$
$$\frac{\varepsilon^{k+2}\tau_0\mu L^2}{\alpha K}\phi(\bar v_f^2-\bar v_s^2)=-\phi^n\left(\frac{\partial\bar p}{\partial\bar z}-\bar\rho_f\bar g\right),\tag{12}$$

$$\frac{\varepsilon^k\tau_0\nu}{\alpha(1-\phi)}\frac{d\phi}{d\bar t}=-\phi^m(\bar p_{tot}-\bar p)-$$
$$-\varepsilon^k\tau_0\nu\beta_\phi\phi^b\frac{d(\bar p_{tot}-\bar p)}{d\bar t},\tag{13}$$

$$2\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar x}\right)+\varepsilon^{k-2}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)+$$
$$+\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar x}\right)=\frac{\alpha}{\nu\tau_0}\frac{\partial p_{tot}}{\partial\bar x},\tag{14}$$

$$\frac{\tau_0\nu}{\alpha}(\varepsilon^{k+2}\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar x}\right)+2\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar z}\right)+$$
$$+\varepsilon^k\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=\bar\rho\bar g+\frac{\partial\bar p_{tot}}{\partial\bar z}.\tag{15}$$

В системе (11)–(15) коэффициенты $\frac{\tau_0\mu L^2}{\alpha K}$, $\frac{\tau_0\nu}{\alpha}$, $\tau_0\nu\beta_\phi$ безразмерные. Параметры $\mu,\nu,\beta_\phi,\tau_0,L,K$ фиксированы. Свободным остается параметр α, от выбора которого будет зависеть вид системы после предельного перехода при $\varepsilon\to0$.

1. Пусть $k\ge2$ и $\alpha=\varepsilon^k\mu\tau_0$. Тогда при $\varepsilon\to0$ приходим к системе

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar t}+div((1-\phi)\bar v_s)=0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar t}+div(\phi\bar v_f)=0,$$
$$\frac{L^2}{K}\phi(\bar v_f^1-\bar v_s^1)=-\phi^n\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x},$$
$$\frac{\partial\bar p}{\partial\bar z}=\bar\rho_f\bar g,$$
$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\bar t}=-\frac{\mu}{\nu}\phi^m(\bar p_{tot}-\bar p),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=0,$$
$$2\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar z}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=$$
$$=\frac{\mu}{\nu}(\rho g+\frac{\partial p_{tot}}{\partial\bar z}).$$

2. Пусть $k=2$ и α не зависит от ε. Тогда после предельного перехода получим следующую систему

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar t}+div((1-\phi)\bar v_s)=0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar t}+div(\phi\bar v_f)=0,$$
$$\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x}=0,\quad \frac{\partial\bar p}{\partial\bar z}=\bar\rho_f\bar g,$$
$$\bar p_{tot}=\bar p$$
$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=\frac{\alpha}{\nu\tau_0}\frac{\partial\bar p_{tot}}{\partial\bar x},$$
$$\bar\rho\bar g=-\frac{\partial\bar p_{tot}}{\partial z}.$$

3. Пусть $k<-2$ и α не зависит от ε. Тогда после предельного перехода приходим к следующей системе

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial\bar t}+div((1-\phi)\bar v_s)=0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar t}+div(\phi\bar v_f)=0,\tag{16}$$
$$\vec v_s=\vec v_f,\tag{17}$$
$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\bar t}=-\alpha\beta_\phi\phi^m\frac{d(\bar p_{tot}-\bar p)}{dt},\tag{18}$$
$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=0,\tag{19}$$
$$2\frac{\partial}{\partial\bar z}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^2}{\partial\bar z}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar x}\left((1-\phi)\frac{\partial\bar v_s^1}{\partial\bar z}\right)=0.\tag{20}$$

Рассмотрим систему (16)–(20). Из (16) следует, что $\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{d\bar{t}} = div\bar{v}_s = 0$. Тогда из уравнения (18) получим $\frac{d(\bar{p}_{tot}-\bar{p})}{d\bar{t}} = 0$, т.е. ϕ и $p_{tot} - p$ сохраняются вдоль характеристик уравнения (16). Для нахождения $\bar{v}_s^1, \bar{v}_s^2$ используется система (19)–(20).

Для линеаризованных уравнений (19) и (20) легко получить представление для компонент скоростей $\bar{v}_s^1, \bar{v}_s^2$ вида $\bar{v}_s^1 = A(\bar{t})\bar{z} + B(\bar{x},\bar{t}), \bar{v}_s^2 = -zB'_{\bar{x}}(\bar{x},\bar{t}) + C(\bar{x},\bar{t})$, где $A(\bar{x},\bar{t}), B(\bar{x},\bar{t}), C(\bar{x},\bar{t})$ – произвольные функции, которые могут быть найдены после задания начальных и краевых условий.

После этого возвращаемся к характеристической системе и получаем представление для ϕ и $\bar{p}$. Тем самым $\phi, \vec{v}_s, \vec{v}_f, p_f$ найдены, а давление p_s находится из соотношения (5).

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М., 1971.

2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск, 1983.

3. Connolly J.A.D., Podladchikov Y.Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. – 1998.

4. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // Известия АлтГУ. – 2010. – №1.

5. Папин А.А., Токарева М.А. Задача о движении сжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде // Известия АлтГУ. – 2011. – №1.