УДК 532.546 + 536.425

А.А. Папин

Математические вопросы динамики снежного покрова*

A.A. Papin

The Mathematical Theory of Snow Cover Dynamics

Тающий снег рассматривается как трехфазная среда, состоящая из воды, воздуха, льда. Математическая модель, учитывающая фазовые переходы и капиллярный скачок, строится на основе уравнений сохранения массы, энергии, законов Дарси и формулы Лапласа. Рассматриваются вопросы обоснования модели.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, капиллярный скачок, тепломассоперенос.

Melting snow is considered as a three-phase medium consisting of water, air and ice. A mathematical model taking into account the phase transitions and capillary jump, is based on the equations of conservation of mass, energy, Darcy's law and the Laplace formula. The problems of model validation are considered.

Key words: two-phase filtration, capillary jump, heat and mass transfer.

Введение. В последнее время возрос интерес к задачам, связанным с динамикой снежного покрова, – движение снежных лавин [1, 2], формирование стока на речном водосборе [3–5], распространение загрязнений в тающем снеге [6]. В этих задачах снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют частички льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды, воздуха и льда [3, 7, 8].

Следуя [5–8], будем рассматривать тающий снег как сплошную среду, состоящую из подвижной (w) и связанной (b) воды, льда (i) и воздуха (a). Подвижная вода фильтруется в снеге, а связанная – неподвижна относительно порового скелета, движением водяного пара пренебрегают.

Каждая компонента ν ($\nu = w, b, i, a$) смеси занимает объемную долю ϕ^ν (в единице объема смеси). По определению имеем

$$0 \le \phi^\nu \le 1, \quad \phi^i + \phi^w + \phi^b + \phi^a = 1.$$

Пористость (доля пор в единице объема) может быть выражена из равенства

$$\phi^p = \phi^w + \phi^b + \phi^a = 1 - \phi^i.$$

Объемные доли подвижной воды, связанной воды и воздуха (на единицу объема пор) вводятся следующим образом

$$\theta^w = \phi^w/\phi^P, \quad \theta^b = \phi^b/\phi^P, \quad \theta^a = \phi^a/\phi^P.$$

Также вводятся общая насыщенность воды $S_w = \theta^w + \theta^b$, остаточная насыщенность воды $S_{wi} = \theta^b$ и эффективная насыщенность воды

$$S_e = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}} = \frac{\theta^w}{1-\theta^b}.$$

По определению приведенные (ρ^i, ρ^w, ρ^b, ρ^a) и истинные (ρ^I, ρ^W, ρ^A) плотности для каждой компоненты связаны равенствами:

$$\rho^i = \phi^i\rho^I, \quad \rho^w = \phi^w\rho^W, \rho^b = \phi^b\rho^W, \quad \rho^a = \phi^a\rho^A.$$

Уравнение баланса массы для компоненты ν:

$$\frac{\partial\rho^\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho^\nu v^\nu) = m^\nu,$$

где $m^\nu = \sum_j m^{\nu j}$, $m^{\nu j}$ – интенсивность перехода массы из j-й в ν-ю составляющую в единице объема в единицу времени; v^ν – скорость фазы.

В медленном потоке, который преобладает в тающем снеге, ускорениями пренебрегают. Уравнения сохранения импульса для каждой компоненты ν представляют в виде:

$$-\frac{\partial p^\nu}{\partial z} + \rho^\nu g + \rho\mathcal{B}^\nu = \frac{1}{2}\sum_\omega m^{\nu\omega}(v^\nu - v^\omega),$$

где g – ускорение силы тяжести; $\rho = \sum_j \rho^j$ – плотность смеси; p^ν – давление; B^ν – тормозящая сила, возникающая из-за межфазного взаимодействия.

Предполагается, что температура T является общей для всех фаз и уравнение сохранения энергии имеет вид

$$\sum_\nu \left[\rho^\nu C_p^{\mathcal{N}} \frac{D_\nu T}{Dt} - \rho^\nu r^\nu - \frac{p^\nu}{\phi^\nu}\frac{D_\nu\phi^\nu}{Dt}\right] =$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации №1.3820.2011 и гранта РФФИ (проект 13-08-01097).

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{\nu}\phi^{\nu}K^{\mathcal{N}}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + (m^{iw}+m^{ib})L_{iw}.$$

Здесь $\frac{D_\nu}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^{\nu}\frac{\partial}{\partial z}$, $C_p^{\mathcal{N}}$ – теплоемкость при постоянном давлении смеси; r^{ν} – внешний поток тепла; $K^{\mathcal{N}}$ – теплопроводность смеси; L_{iw} – удельная теплота плавления льда.

Движение воды и воздуха трактуется как движение двух несмешивающихся жидкостей, подчиняющихся закону Дарси:

$$\rho\mathcal{B}^{w} = p^{W}\frac{\partial\phi^{w}}{\partial z} - \frac{\mu^{w}}{k^{w}}(\phi^{w})^{2}(v^{w}-v^{i}),$$

$$\rho\mathcal{B}^{a} = p^{A}\frac{\partial\phi^{a}}{\partial z} - \frac{\mu^{a}}{k^{a}}(\phi^{a})^{2}(v^{a}-v^{i}),$$

где μ^w, μ^a – вязкости воды и воздуха; k^w, k^a – проницаемости, связанные с эффективными проницаемостями k^{rw}, k^{ra} равенствами $k^{rw} = k^w/k$, $k^{ra} = k^a/k$; k – внутренняя проницаемость ($k = a\exp b\phi^p$; a, b, p – параметры). Предполагается, что $k^{rw} = k^{rw}(S_e)$ (в частности, $k^{rw} = (S_e)^n$).

Согласно формуле Лапласа разность давлений воды и воздуха связана с капиллярным давлением p^C:

$$p^C = p^A - p^W > 0.$$

Капиллярное давление также зависит от S_e, т.е. $p^C = p^C(S_e)$.

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений сохранения массы для каждой фазы и уравнений сохранения импульса

$$\rho^{I}\left\{\frac{\partial\phi^{i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi^{i}v^{i})\right\} = m^{i};$$

$$\rho^{W}\left\{\frac{\partial\phi^{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi^{w}v^{w})\right\} = m^{wb} - \eta m^{i};$$

$$\rho^{W}\left\{\frac{\partial\phi^{b}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi^{b}v^{i})\right\} = -m^{wb} - (1-\eta)m^{i};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi^{a}\rho^{A}) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi^{a}\rho^{A}v^{a}) = 0;$$

$$-\frac{\partial p^{W}}{\partial z} + \rho^{W}g - \frac{\mu^{W}}{k^{w}}\phi^{w}(v^{w}-v^{i}) = \frac{1}{2\phi^{w}}(\eta m^{i} -$$

$$-m^{wb})(v^{i}-v^{w}) - \frac{\partial p^{A}}{\partial z} + \rho^{A}g - \frac{\mu^{A}}{k^{a}}\phi^{a}(v^{a}-v^{i}) = 0.$$

После некоторых преобразований полученной системы и привлечения соотношения

$$T = T_M + 8\times10^{-7}p^C - 5\times10^{-7}d^{-1}$$

приходим к следующему уравнению для эффективной насыщенности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi^{e}S_e) + \frac{\rho^{W}g}{\mu^{W}/k}\frac{\partial}{\partial z}(k^{rw}) + \frac{1}{\mu^{W}/k}\frac{\partial}{\partial z}\left(k^{rw}\frac{\partial p^{C}}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\phi^{e}S_e v^{i}) = m^{wb} - \eta m^{i}.$$

Данное уравнение является параболическим и вырождается на решении (при $S_e = 0$). После нахождения S_e можно определить и другие параметры задачи. Рассматривается упрощенная модель, которая подразумевает, что лед неподвижен и отсутствуют фазовые переходы изо льда и в лед $v^i \equiv 0$, $\quad m^i \equiv 0$. При этих предположениях численные расчеты задач изотермической фильтрации воды в снеге проводились в работе [8].

Таким образом, при построении математических моделей снежного покрова в период снеготаяния используются общие принципы динамики многофазных сред. Особенностью этих моделей является обязательный учет фазовых переходов и, как правило, использование фильтрационного приближения (малые скорости и ускорения протекающих процессов).

В настоящей работе рассматривается математическая модель, состоящая из уравнений сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов, уравнений двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта и уравнения теплового баланса для снега:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + div(\rho_i\vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3}I_{ji}, \quad i = 1,2,3,$$

$$I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3}I_{ij} = 0; \tag{1}$$

$$\vec{v}_i = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0\vec{g}), \quad i = 1,2,$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1,\theta), \quad \sum_{i=1}^{2}s_i = 1; \tag{2}$$

$$(\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0c_i\alpha_i)\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\sum_{i=1}^{3}\rho_i^0c_i\vec{v}_i)\nabla\theta =$$

$$= div(\lambda_c\nabla\theta) + \nu\frac{\partial\rho_3^0\alpha_3}{\partial t}. \tag{3}$$

Здесь $\vec{u}_i$ – скорость i-й фазы; ρ_i – приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i\rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i = 1$ является следствием определения ρ_i); I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\vec{v}_i = ms_i\vec{u}_i$ – скорости фильтрации воды и воздуха; m – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = ms_1$, $\alpha_2 = ms_2$, $\alpha_3 = 1-m$); K_0 – тензор фильтрации; k_{0i} – фазовые проницаемости ($k_{0i} = k_{0i}(s_i) \geq 0$, $k_{0i}\big|_{s_i=0} = 0$); μ_i – динамическая вязкость; p_i – давление фаз; p_c – капиллярное давление, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1,2,3$,

$c_i = const > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность снега ($\lambda_c = a_c + b_c\rho_c^2$, $\rho_c = \sum_{i=1}^{3}\rho_i^0\alpha_i$, $a_c = const > 0$, $b_c = const > 0$).

Система дополняется гипотезами [5]

$$\vec{u_3} = 0, \quad I_{13} = I_{13}(\theta), \quad I_{12} = 0,$$
$$I_{23} = 0, \quad \rho_i^0 = const. \tag{4}$$

После этих гипотез из уравнения неразрывности для льда следует $\frac{\partial\rho_3^0(1-m)}{\partial t} = I_{31}(\theta)$. В частности, можно считать, что пористость – функция температуры.

Классические задачи фильтрации о движении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пористой среде основаны на модели Маскета-Леверетта [9]. В большинстве задач пористость считается постоянной либо заданной функцией точки [10]. В [10, 11] построена теория для системы (1)–(3) в случае $m = m(x)$. Важным моментом этой теории является доказательство классического принципа максимума для насыщенности $0 \le s \le 1$.

В общем случае задача (1)–(4) является очень сложной и изучена лишь в автомодельной постановке [12–14]. Целью работы является анализ разрешимости системы (1)–(4) при заданной температуре $\theta(x,t)$, т.е. в случае зависимости пористости от x, t.

Задача двухфазной фильтрации в тающем снеге

Преобразование уравнений. Считая температуру заданной, систему (1)–(2) с учетом дополняющих гипотез (4) можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1\rho_1^0) + div(\rho_1^0\vec{v_1}) = I_{31}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_2\rho_2^0) + div(\rho_2^0\vec{v_2}) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_3^0(1-m)) = I_{13} = -I_{31}, \tag{7}$$

$$v_i = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0 g), \quad i = 1, 2,$$
$$p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta). \tag{8}$$

Сложив уравнения (5) и (7), получим преобразованное уравнение неразрывности первой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(ms_1\rho_1^0 + \rho_3^0(1-m)) + div(\rho_1^0\vec{v_1}) = 0.$$

Складывая уравнения неразрывности (5) и (6), предварительно поделенные на ρ_1^0 и ρ_2^0 соответственно, и учитывая равенство $s_1 + s_2 = 1$, приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m + \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}(1-m)\right) + div\vec{v} = 0, \tag{9}$$

в котором $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ – вектор суммарной скорости фильтрации.

Введем новую искомую функцию [2]

$$p = p_1 - \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{02}}{\mu_2}\frac{1}{\frac{k_{01}}{\mu_1} + \frac{k_{02}}{\mu_2}}d\xi, \tag{10}$$

где $s = s_1$, $k = \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}$, $\bar{k}_{0i} = \frac{k_{0i}}{\mu_i}$. Чтобы объяснить такой выбор искомой функции, выразим предварительно вектор $\vec{v}$ из уравнений (8) через ∇p_1 и ∇s

$$-\vec{v} = K_1(\nabla p_1 + \rho_1^0\vec{g}) + K_2(\nabla p_2 + \rho_2^0\vec{g}),$$

где $K_i = K_0\bar{k}_{0i}$, и с учетом $p_2 = p_1 + p_c$ получим

$$\begin{aligned} -\vec{v} &= K_1(\nabla p_1 + \rho_1^0\vec{g}) + K_2(\nabla(p_1 + p_c) + \rho_2^0\vec{g}) = \\ &= K_0 k\left(\nabla\left(p_1 - \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi\right) + \right. \\ &\left. + \int_s^1 \nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi + \frac{\bar{k}_{02}}{k}\nabla p_c\right) + \left(\sum_{i=1}^{2}K_i\rho_i^0\vec{g}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что соотношение (11) получено с использованием следующих равенств

$$\nabla p_c(\vec{x}, s) = \nabla p_c + \frac{\partial p_c}{\partial s}\nabla p_c,$$

$$\nabla\int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi = \int_s^1 \nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi - \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}\nabla s,$$

где в ∇p_c символ ∇ применяется только по переменной $\vec{x}$, входящей явно (например, при $n = 3$, $\nabla p_c(\vec{x}, s) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}p_c, \frac{\partial}{\partial x_2}p_c, \frac{\partial}{\partial x_3}p_c\right)$). Таким образом,

$$\vec{v} = -(K\nabla p + \vec{f}) \equiv \vec{v}(s, p), \tag{12}$$

где $\vec{f} = K\int_s^1 \nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi + K_2\nabla p_c + \left(\sum_{i=1}^{2}K_i\rho_i^0\vec{g}\right)$, $K = kK_0$, с помощью подстановки (10) в уравнение (11) вектор $\vec{v}$ представляется через ∇p и s и не зависит от ∇s.

Аналогично с учетом (10) выразим вектор $\vec{v}_1$ из уравнений (8) через ∇p и ∇s

$$\begin{aligned} -\vec{v}_1 &= K_1(\nabla p_1 + \rho_1^0\vec{g}) = \\ &= K_1\left(\nabla\left(p + \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi\right) + \rho_1^0\vec{g}\right) = \\ &= K_1\left(\nabla p + \int_s^1 \nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi - \frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}\nabla s + \rho_1^0\vec{g}\right), \end{aligned}$$

откуда, полагая $a = -\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}}{k}$ и
$\vec{f_0} = K_1\int\limits_s^1 \nabla\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{\bar{k}_{02}}{k}d\xi + K_1\rho_1^0\vec{g}$, получим

$$-\vec{v}_1 = K_1\nabla p + K_0 a\nabla s + \vec{f_0} \equiv -\vec{v}_1(s,p). \qquad (13)$$

Пользуясь (12), найдем

$$K_1\nabla p = -K_1K^{-1}(\vec{v}+\vec{f}),$$
$$K_1K^{-1} = \bar{k}_{01}K_0(kK_0)^{-1} = \bar{k}_{01}k^{-1} \equiv b(s) \in (0,1),$$

следовательно, представлению (13) можно придать эквивалентную форму

$$-\vec{v}_1 = K_0 a\nabla s - b\vec{v} + \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{f_0} - b\vec{f}. \qquad (14)$$

Подстановкой (13) в уравнение неразрывности для первой фазы и (12) в соотношение (9) приходим к системе уравнений относительно s, p

$$div(K\nabla p + \vec{f}) = \frac{\partial m\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1\right)}{\partial t}, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1^0 ms\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_3^0 m) + $$
$$+ div(\rho_1^0(K_1\nabla p + K_0 a\nabla s + \vec{f_0})), \qquad (16)$$

а при подстановке (14) в (6) – к эквивалентной системе относительно $s, p, \vec{v}$

$$div(K\nabla p + \vec{f}) = \frac{\partial m\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1\right)}{\partial t}, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_1^0 ms\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_3^0 m\right) + $$
$$+ div(\rho_1^0(K_0 a\nabla s - b\vec{v} + \vec{F})). \qquad (18)$$

Капиллярное давление и относительные фазовые проницаемости обладают свойствами

$$\frac{\partial p_c}{\partial s} < 0, \quad k = \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02} > 0, \quad \bar{k}_{0i}|_{s=0,1} = 0,$$

и поэтому $a(\vec{x}, s) > 0$ при $s \in (0,1)$ и $a(\vec{x}, 0) = a(\vec{x}, 1) = 0$.

Таким образом, (15)–(16) (или (17)–(18)) представляет собой систему, состоящую из эллиптического уравнения для $p(\vec{x}, t)$ и вырождающегося при $s = 0, 1$ параболического уравнения для $s(\vec{x}, t)$.

Пусть снег занимает конечную область Ω с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma = \Gamma_1\bigcup\Gamma_2$, где Γ_1 – граница с непроницаемой поверхностью, Γ_2 – граница с воздухом.

Положим $\Omega_T = \Omega\times[0,T]$, $\Gamma_{1T} = \Gamma_1\times[0,T]$, $\Gamma_{2T} = \Gamma_2\times[0,T]$, $\Gamma_T = \Gamma_{1T}\bigcup\Gamma_{2T}$. Граничные условия на Γ_{1T} берутся в виде

$$\vec{v} = (K\nabla p + \vec{f}) = \vec{v_1} = (K_1\nabla p + K_0 a\nabla s + \vec{f_0}) = 0,$$

$$(\vec{x}, t) \in \Gamma_{1T}, \qquad (19)$$

На Γ_{2T} заданы приведенное давление и насыщенность

$$p = p_0(\vec{x}, t), \quad s = s_0(\vec{x}, t), \quad (\vec{x}, t) \in \Gamma_{2T}. \qquad (20)$$

Начальное условие для насыщенности имеет вид

$$s(x, 0) = s_0(\vec{x}, 0), \quad \vec{x} \in \Omega. \qquad (21)$$

Определение решения. Предположим, что все заданные функции $k_{0i}(s)$, $m(\vec{x}, t)$, $p_c(\vec{x}, s)$ и $K_0(\vec{x})$, через которые выражаются коэффициенты уравнений (15)–(16), определены при всех $(\vec{x}, s)$ и удовлетворяют условиям

$$(i) \quad \|k_{01}(s), k_{02}(s),\|_{C[0,1]} \le M. \|\nabla p_c\|_{\infty,\Omega} \le M;$$

$$(ii) \quad M^{-1} \le [m, k, (K_0\xi, \xi)] \le M;$$

$$(iii) \quad m_t \ge 0;$$

$$(iv) \quad 0 < (a, k_{01}, k_{02}), s \in (0,1);$$
$$a|_{s=0,1} = k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0.$$

Функции $p_0(\vec{x}, t)$ и $s_0(\vec{x}, t)$, входящие в граничные условия, предполагаются заданными при $(\vec{x}, t) \in \Omega\times[0,T]$.

$$(v) \left(\left\|\frac{\partial s_0}{\partial s}\right\|_{1,\Omega_T}; \|\nabla s\|_{2,\Omega_T}; \|p_0, \nabla p_0\|_{2,\infty,\Omega_T}\right) \le M;$$

$$(vi) \quad 0 \le s_0(\vec{x}, t) \le 1;$$

Отметим, что в силу определения a, $\vec{f}$, $\vec{f_0}$ и $\vec{F}$ имеем

$$\left| ln\frac{a}{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}}; \frac{\vec{f}}{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}}; \frac{\vec{f}}{\bar{k}_{02}}; \frac{\vec{F}}{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}} \right| \le M_0(M).$$

Ограниченные измеримые в $\Omega\times[0,T]$ функции $s(\vec{x}, t), p(\vec{x}, t)$ назовем обобщенным решением задачи (15)–(16), (19)–(21) если выполнены следующие условия:

а) $0 \le s \le 1$ почти всюду в Ω_T;

б) $\nabla p \in L_{2,\infty}()$, $\quad a\nabla s \in L_2(\Omega_T)$, где при $0 \le s \le 1$ (в этом случае $a \ge 0$) функция $a\nabla s$ определяется формулой

$$a\nabla s = \left|\frac{\partial P_c(z,s)}{\partial s}\right|\nabla u,\ u(s) = \int\limits_0^s k_{02}bd\xi,\ u \in L_2(\Omega_T);$$

в) $p = p_0(x, t)$, $s = s_0(x, t)$ при $(\vec{x}, t) \in \Gamma_2\times[0,T]$;

г) для произвольных допустимых функций φ, ψ, таких что

$$\varphi(\vec{x}, t) \in W_2^1(\Omega_T), \quad \psi(\vec{x}) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = 0,\ \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (\vec{x}, t) \in \Gamma_{2T}, \quad \varphi(\vec{x}, T) = 0,$$

при почти всех $t \in [0,T]$ выполняются равенства

$$\pounds_1 \equiv (v, \nabla\psi)_\Omega = \left(\frac{\partial m}{\partial t}\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}-1\right), \psi\right)_\Omega, \qquad (22)$$

$$\pounds_2 \equiv ((ms))t, \varphi)_{\Omega_t} = \\ = \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} m, \varphi\right)_{\Omega_t} + (\vec{v}_1, \nabla\varphi)_{\Omega_t}. \quad (23)$$

Соотношения (22)–(23) получены путем домножения (15)–(16) на ψ и φ и интегрированием по соответствующим областям. В дальнейшем будем называть задачу (15)–(16), (19)–(21) задачей I.

Принцип максимума. Продолжим каждую функцию в равенстве (23) вне промежутка [0, 1] согласно формуле

$$f_*(\vec{x}, s) = \begin{cases} f(\vec{x}, 0), & s \le 0, \\ f(\vec{x}, s), & 0 < s < 1, \\ f(\vec{x}, 1), & s \ge 1, \end{cases}$$

и, кроме того, заменим $a(\vec{x}, s)$ на $\bar{a}(\vec{x}, s) = a_*(\vec{x}, s) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а $\vec{v}$ и b на их усреднения $\vec{v}_h$ и b_{h_0} по $\vec{x}$ и s соответственно. Тогда (23) преобразуется к виду

$$\pounds_2 \equiv ((ms)_t, \varphi)_{Q_t} = \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} m, \varphi\right)_{Q_t} - \\ - (K_0 \bar{a} \nabla s + \vec{F}, \nabla\varphi)_{Q_t} - (c\vec{v}_h \nabla s, \varphi)_{Q_t} - \\ - \left(b_{h_0}\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}-1\right) m_t, \varphi\right)_{Q_t}, \quad (24)$$

где $c = (b_s^0)_*$, $b^0 = b_{h_0}$.

Ограниченные измеримые функции $s(x,t), p(x,t)$ назовем обобщенным решением вспомогательной задачи I_ε, если они обладают свойствами (б–г) определения обобщенного решения, в котором (23) заменено на (24).

Лемма 1. Пусть выполнены условия $(i) - (vi)$ обобщенного решения; s, p – обобщенное решение вспомогательной задачи I_ε. Тогда почти всюду в $\Omega \times [0,T]$ для s выполнено следующее неравенство

$$0 \le s \le 1.$$

Доказательство. В уравнении (24) положим $\varphi = \bar{s} = \max\{s-1, 0\}$. Тогда

$$(m_t s, \bar{s})_{\Omega_t} + (m s_t, \bar{s})_{\Omega_t} = (\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} m_t, \bar{s})_{\Omega_t} - (K_0 \bar{a} \nabla s + \\ + \vec{F}, \nabla\bar{s})_{\Omega_t} - (c\vec{v}_h \nabla s, \bar{s})_{\Omega_t} - (b_{h_0}(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}-1) m_t, \bar{s})_{\Omega_t},$$

Из последнего равенства выводим ($\vec{F} = 0$ при $s > 1$)

$$\frac{1}{2}(m_t \bar{s}^2)_\Omega + \|\sqrt{m}\bar{s}\|^2_{2,\Omega} + (K_0 \bar{a} \nabla\bar{s}, \nabla\bar{s})_{\Omega_t} + (c\bar{v}\nabla\bar{s}, \bar{s})_{\Omega_t} + \\ + ((1-b_{h_0})(1-\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}) m_t, \bar{s})_{\Omega_t} = 0.$$

Оценивая третье слагаемое снизу, а четвертое сверху, с учетом знаков остальных приходим к неравенству

$$\|\sqrt{m}\bar{s}\|^2_{2,\Omega} \le c \int_0^t \|\sqrt{m}\bar{s}\|^2_{2,\Omega} d\tau, \quad \bar{s}(0) = 0,$$

откуда следует, что $\bar{s} \equiv 0$ и, следовательно, $s \le 1$.

Аналогично проводится доказательство $s \ge 0$. Рассмотрим вместо φ функцию $\underline{s} = \max\{-s, 0\}$. Полагая $y = -s$, $\bar{y} = max\{y, 0\}$ получим

$$\frac{1}{2}(m_t, \bar{y}^2)_{\Omega_t} + \frac{1}{2}\|\sqrt{m}\bar{y}\|^2_{2,\Omega} + (K_0 \bar{a} \nabla\bar{y}, \bar{y})_{\Omega_t} + \\ + \left((\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - b\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}-1\right)\right) m_t, \bar{y}) = 0.$$

Отсюда, проводя аналогичные доказательству $s \le 1$ оценки слагаемых, получаем, что $\bar{y} \equiv 0$ и, следовательно, $s \ge 0$.

Разрешимость. Сначала будет установлена разрешимость регуляризованной задачи I_ε, а затем предельным переходом по ε и h в тождестве (24) доказана и теорема существования решений исходной задачи I. Задача I исследуется в общем случае, когда в области течения допускаются застойные зоны ($s = 0$ или $s = 1$) и тем самым уравнение (16) может вырождаться.

Теорема. При выполнении условий $(i) - (vi)$ определения решения существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи I.

Доказательство теоремы следует [2] и проводится в несколько этапов.

1. Построение галеркинских приближений вспомогательной задачи I_ε в виде

$$s^N(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^N a_k^N(t)\varphi_k(\vec{x}) + s_0(\vec{x}, t),$$

$$p^N(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^N b_k^N(t)\psi_k(\vec{x}) + p_0(\vec{x}, t),$$

где функции φ_k, ψ_k нормированы следующим образом

$$(\varphi_k, \varphi_i)_\Omega = \delta_i^k, \quad (\nabla\psi_k, \nabla\psi_i)_\Omega = \delta_i^k.$$

Для определения неизвестных a_k^N, b_k^N получаем следующую нелинейную систему уравнений

$$\frac{da_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j^N \alpha_{jk} + \beta_k, \quad a_k^N(0) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_j^N \mu_{jk} + \nu_k = 0,$$

в которой

$$\alpha_{jk} = -(m_t\varphi_j, \varphi_k)_\Omega - \\ - (c\vec{v}_h \nabla\varphi_j, \varphi_k)_\Omega - (K_0\bar{a}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_k)_\Omega,$$

$$\beta_k = \left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} m, \varphi_k\right)_\Omega - \left(\vec{F}, \nabla\varphi_k\right)_\Omega - \\ - \left(b_{h_0}\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1\right) m_t, \varphi_k\right)_\Omega - \\ - \left(\frac{ds_0}{dt} m, \varphi_k\right)_\Omega - (m_t s_0, \varphi_k)_\Omega,$$

$$\mu_{jk} = (k\nabla\psi_j, \nabla\psi_k)_\Omega,$$

$$\nu_k = -\left(\vec{f}_0, \nabla\psi_k\right)_\Omega + \\ + \left(\frac{\partial m\left(\frac{\rho_3^0}{\rho_1^0} - 1\right)}{\partial t}, \psi_k\right)_\Omega - (K\nabla p_0, \nabla\psi_k)_\Omega.$$

Для определения b_k^N получаем линейную алгебраическую систему уравнений, а для a_k^N приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Установление компактности галеркинских приближений, предельный переход по N, последующее получение априорных оценок, не зависящих от h, и предельный переход по ε завершают доказательство теоремы.

Библиографический список

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. — М., 1971.

2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск, 1983.

3. Blagovechshenskiy V., Eglit M., Naaim M. The calibration of avalanche mathematical model using field data // Natural Hazards. — 2002. – N. 2.

4. Naaim M., Gurer I. Two-phase Numerical Model of Powder Avalanche Theory and Application. // Natural Hazards — 1998. – N. 117.

5. Кучмент Л.С., Демидов В.Н., Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока. Физико-математические модели. — М., 1983.

6. Anderson E.A. Hydro-17 – Snow Model. NWSRFS Users Manual. Part II.2 // National Weather Service. NOAA. DOC. Silver Spring. MD. — 1996.

7. Anderson E.A. Development and testing of snow pack energy balance equations // Water Resources Research. — 1968. – V. 4, №1.

8. Fowler A.C. An introduction to mathematical modeling. Mathematical Institute. – Oxford, 2002.

9. Gray J.M.N.T. Water movement in wet snow // Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1996. — V. 354, №1707.

10. Sellers S. Theory of water transport in melting snow with a moving surface // Cold Regions Science and Technology. — 2000. — V. 2000, №31.

11. Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. Алмата, 1996.

12. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. – Т. 49, №4.

13. Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009.

14. Папин А.А., , Коробкин А.А., Гоман В.А. Движение воды и воздуха в тающем снеге // Известия АлтГУ. — 2012. – №1/1(76).